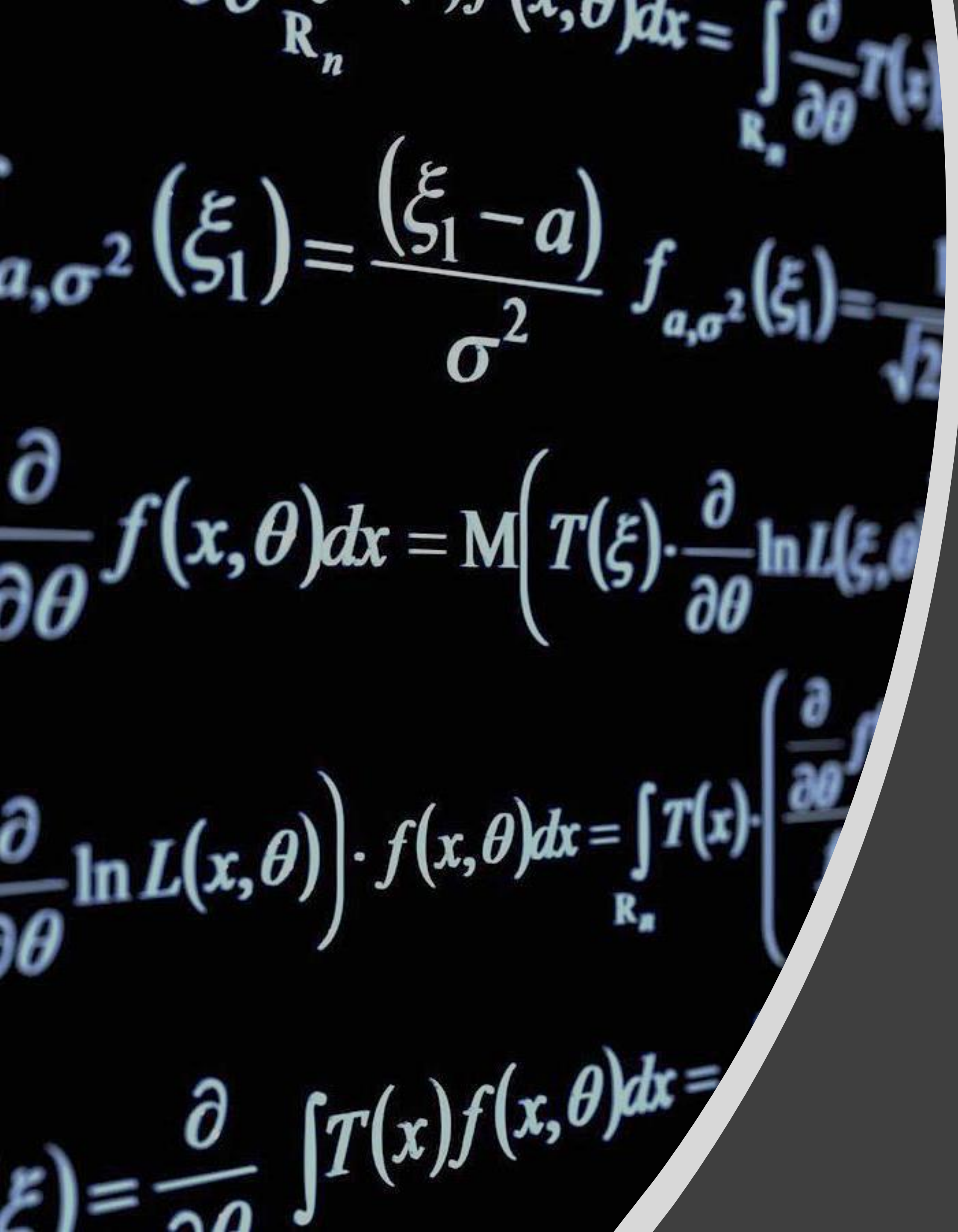


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, II семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 4

Математический анализ

Приложение производной

Асимптоты

Связь монотонности функции и знака ее производной

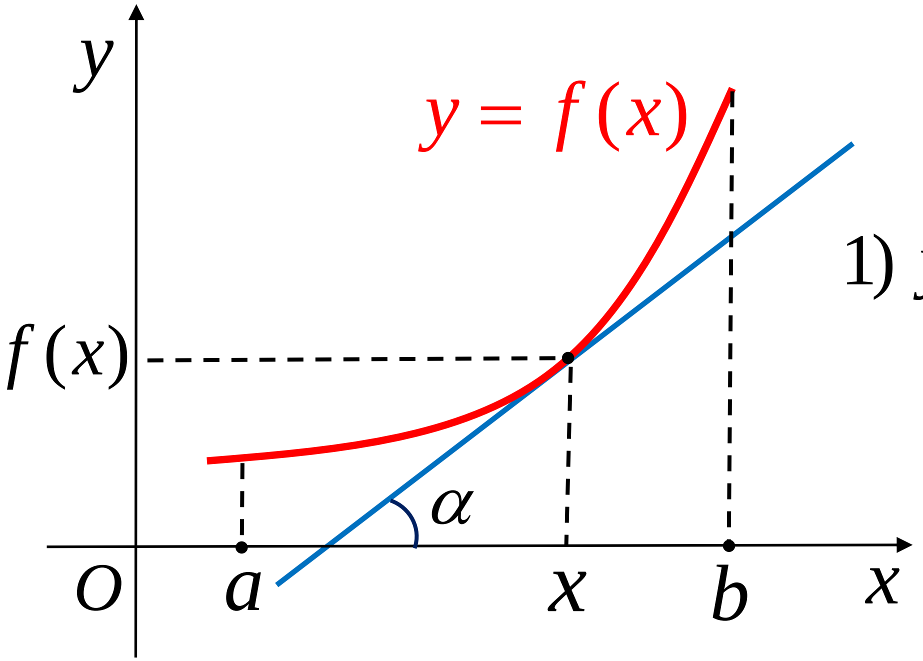
Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда

(1) Если функция $f(x)$ **возрастает (убывает)**, то $\boldsymbol{f'(x) \geq 0}$ $\boldsymbol{(f'(x) \leq 0)}$.

(2) Если $\boldsymbol{f'(x) > 0}$ $\boldsymbol{(f'(x) < 0)}$, то функция $\boldsymbol{f(x)}$ **возрастает (убывает)**.

Связь монотонности функции и знака ее производной

<u>Доказательство (иллюстрация).</u>



1) $y \uparrow \Rightarrow$ $\alpha -$ острый или равен 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow y' = \operatorname{tg} \alpha \geq 0$

2) аналогично ■

Определение локального экстремума

<u>Опр.</u> Пусть функция $f(x)$ определена на (a, b) и $x_0 \in (a, b)$. Точка $\boldsymbol{x = x_0}$ **называется точкой локального максимума (минимума) функции** $f(x)$, если $f(x_0)$ – наибольшее (наименьшее) значение функции $f(x)$ в некоторой $O(x_0) \subseteq (a, b)$.

Точки локального максимума и минимума функции $f(x)$ называются **точками локального экстремума** этой функции.

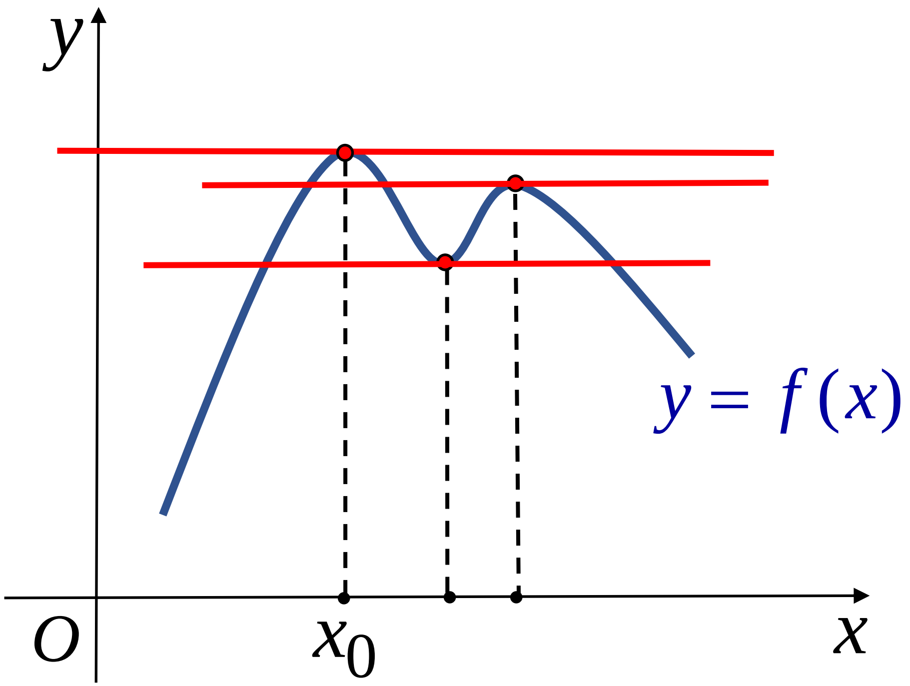
Необходимое условие экстремума

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$, дифференцируема в точке $x = x_0$ и $\boldsymbol{x = x_0}$ **– точка локального экстремума**.

Тогда $\boxed{\boldsymbol{f'(x_0) = 0}}$

Док-во: $x = x_0$ – точка локального экстремума $\Rightarrow$ в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ достигает наибольшего (наименьшего) значение на промежутке $O(x_0) \Rightarrow$ по теореме Ферма $f'(x_0) = 0$. ∎

Необходимое условие экстремума. Геометрическая интерпретация



Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ параллельна оси Ox.

Необходимое условие экстремума не является достаточным

Задача (упр.) Привести пример,
когда $f'(x_0) = 0$, но $x = x_0$ – не точка locextr.

Необходимое условие экстремума не является достаточным.

Первое достаточное условие экстремума

Теорема 3. Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в $O(x_0)$, $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ и при **переходе через точку $\boldsymbol{x = x_0}$ производная $\boldsymbol{f'(x)}$ меняет знак.**

Тогда $\boldsymbol{x = x_0}$ **– точка локального экстремума**.

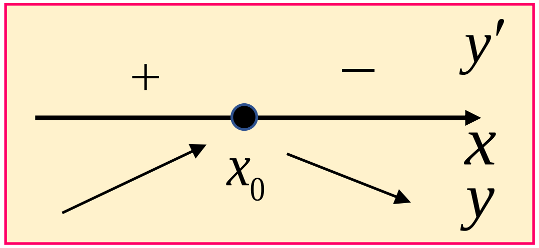
Первое достаточное условие экстремума

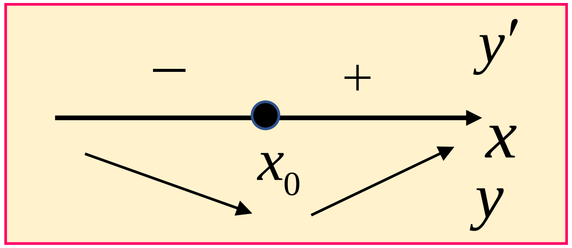
Причем если $\boldsymbol{f'(x)}$ **меняет знак с $+$ на $-$**, то

$\boldsymbol{x = x_0}$ – точка locmax.

если $\boldsymbol{f'(x)}$ **меняет знак с $-$ на $+$**, то

$\boldsymbol{x = x_0}$ – точка locmin.





Первое достаточное условие экстремума

Из теорем 1-3 следует

План исследования функции на монотонность и локальный экстремум

Следующий слайд можно не конспектировать

Алгоритм исследования функции на монотонность и на локальный экстремум

1). Найти критические точки функции, т.е. точки в которых $y' = 0$ или y' не существует.

2). Решить неравенства $y' > 0$ ($y' < 0$) методом интервалов. Если $y' > 0$, то $y \uparrow$, если $y' < 0$, то $y \downarrow$.

3). Найти промежутки монотонности и точки локального экстремума.

Точки локального экстремума должны принадлежать области определения функции!

Пример исследования функции на монотонность и на локальный экстремум

Пример 1. Исследовать на монотонность и локальный экстремум функцию $y = \frac{x^2+1}{x}$.

Решение.

Область определения функции:

$$D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$$

1). Найдем y' :

Пример исследования функции на монотонность и на локальный экстремум

$$y' = \left(\frac{x^2+1}{x}\right)' = \frac{\left(x^2+1\right)' x - \left(x^2+1\right)x'}{x^2} = \frac{2x \cdot x - \left(x^2+1\right)}{x^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2} = \frac{(x+1)(x-1)}{x^2}$$

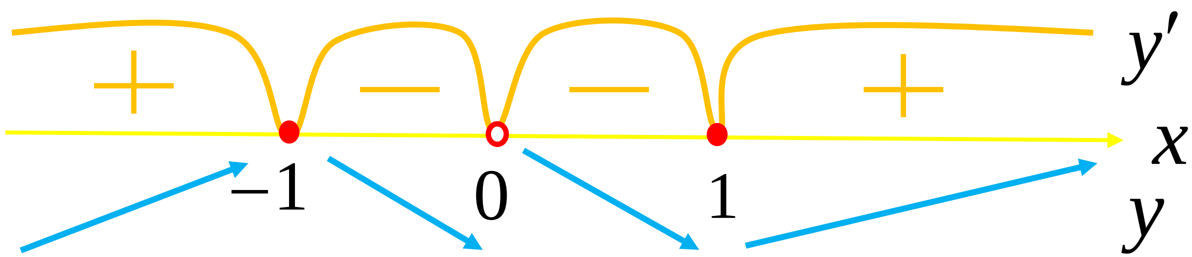
$y' = 0$ при $x_{1,2} = \pm 1$

y' не существует при $x_3 = 0$

Пример исследования функции на монотонность и на локальный экстремум

2). Решаем неравенство $y' > 0$ $(y' < 0)$ *методом интервалов*

$$\frac{(x+1)(x-1)}{x^2} > 0 \; (< 0)$$



Пример исследования функции на монотонность и на локальный экстремум

3). $y\uparrow$ при $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

$y\downarrow$ при $x\in(-1;0)\cup(0;1)$

$x=-1-\textit{точка loc}\max$ $\qquad y(-1)=-2$

$x=1-\textit{точка loc}\min$ $\qquad y(1)=2$

Второе достаточное условие экстремума

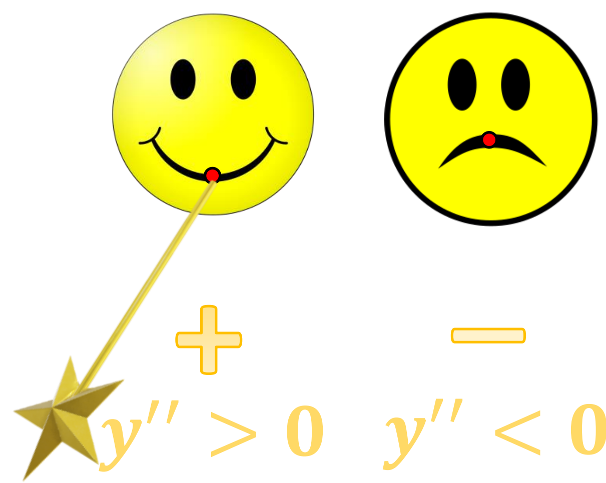
<u>Теорема 4.</u> Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в $O(x_0)$, дважды дифференцируема в точке $\boldsymbol{x = x_0}$ и $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$.

Тогда если $\boldsymbol{f''(x_0)} > 0$, то

$\boldsymbol{x = x_0}$ **– точка locmin,**

если $\boldsymbol{f''(x_0)} < 0$, то

$\boldsymbol{x = x_0}$ **– точка locmax.**



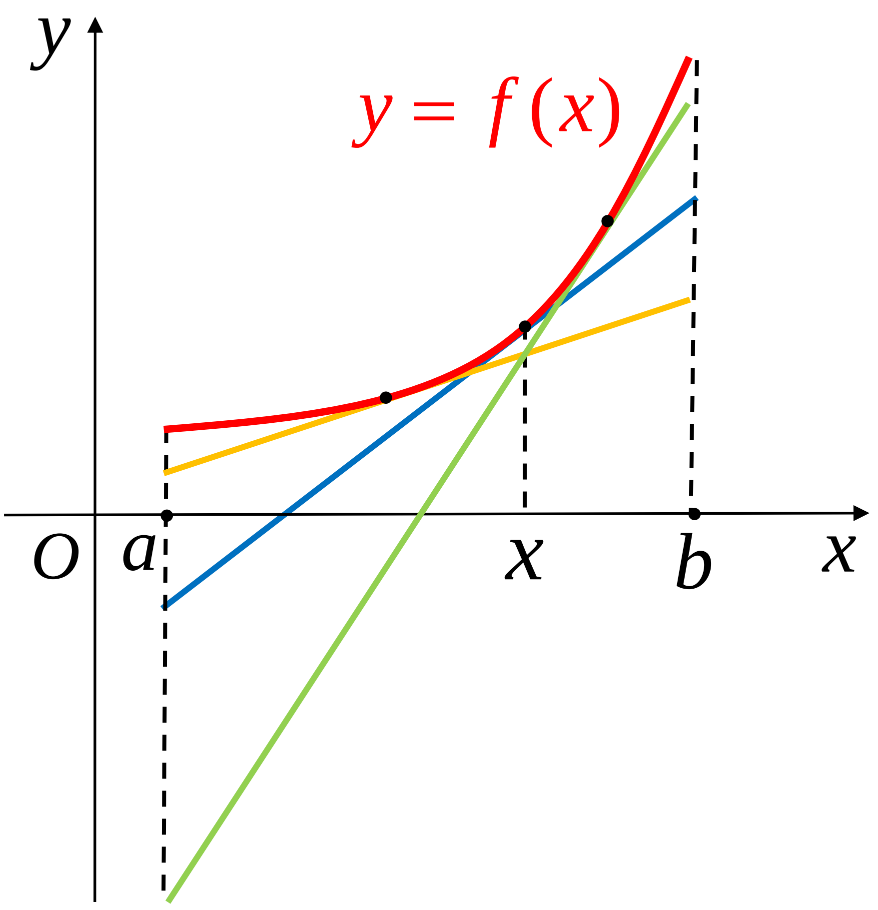
Определение выпуклости вниз

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема на (a, b).

Говорят, что функция $f(x)$ выпукла вниз [или что то же самое, вогнута] на (a, b), если ее график находится ВЫШЕ любой касательной, проведенной в любой точке $x \in (a, b)$.

Обозначение: $y \cup$

Определение выпуклости вниз ($y \cup$) Иллюстрация



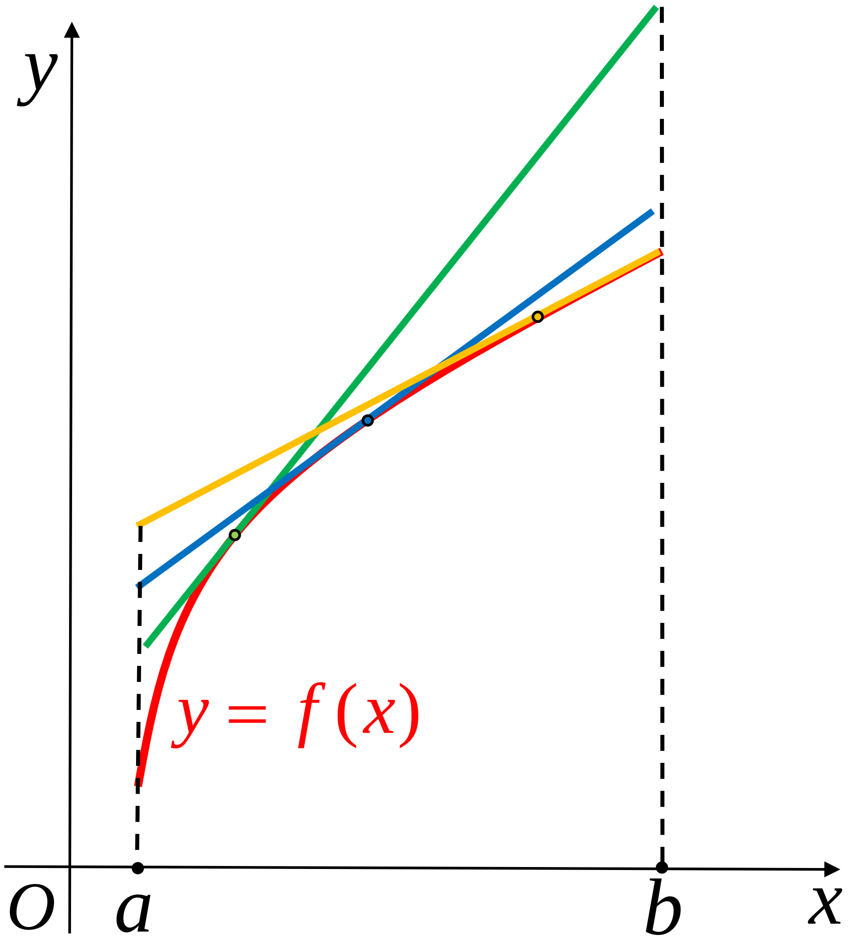
Определение выпуклости вверх

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема на (a, b).

Говорят, что функция $f(x)$ выпукла вверх [или что то же самое, выпукла] на (a, b), если ее график находится НИЖЕ любой касательной, проведенной в любой точке $x \in (a, b)$.

Обозначение: $y \cap$

Определение выпуклости вверх ($y \cap$) Иллюстрация



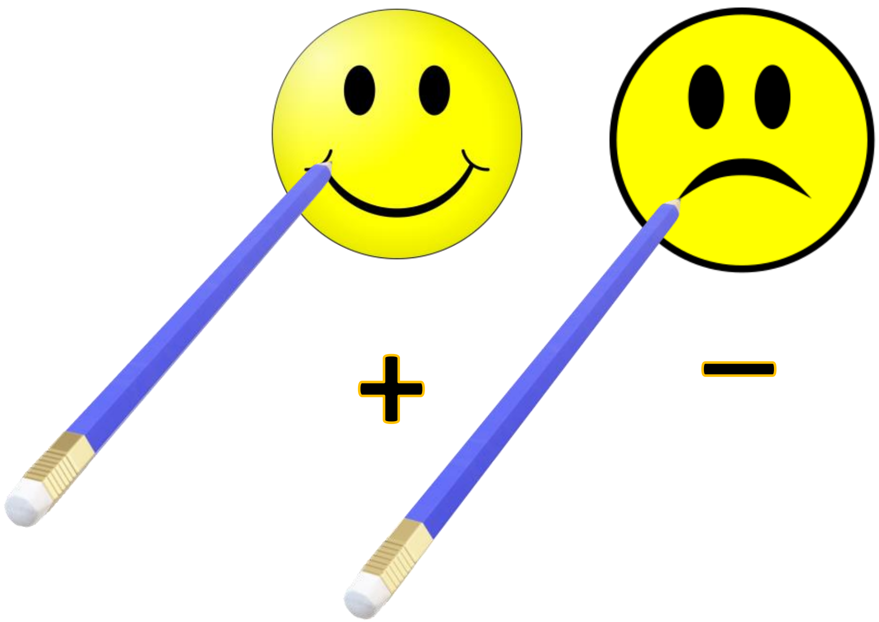
Связь выпуклости функции и знака ее второй производной

Теорема 5. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на (a, b). Тогда

(1) Если функция $\boldsymbol{f(x)} \cup$ **(**$\boldsymbol{f(x)} \cap$**)**,
то $\boldsymbol{f''(x) \geq 0}$ **(**$\boldsymbol{f''(x) \leq 0}$**)**.

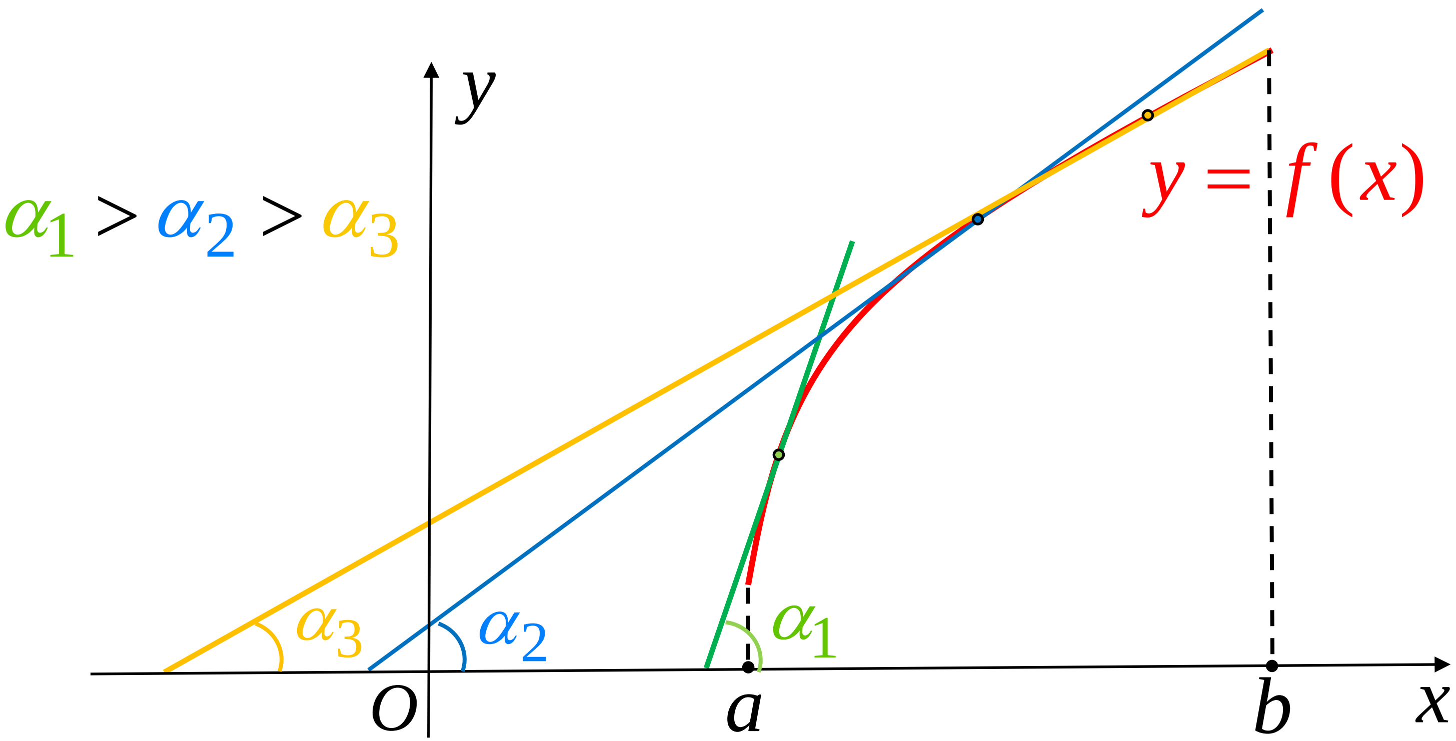
(2) Если $\boldsymbol{f''(x) > 0}$ $(\boldsymbol{f''(x) < 0})$,
то $\boldsymbol{f(x)} \cup$ **(**$\boldsymbol{f(x)} \cap$**)**.

Связь выпуклости функции и знака ее второй производной. Иллюстрация



$y'' > 0$ $\quad$ $y'' < 0$

Теорема о связи выпуклости и второй производной. Доказательство, иллюстрация



Теорема о связи выпуклости и второй производной. Доказательство

Доказательство. 1) Пусть $y \cap \Rightarrow$

$\Rightarrow \ \alpha$ уменьшается $\Rightarrow$ $\operatorname{tg}\alpha$ уменьшается

$\Rightarrow y' = \operatorname{tg}\alpha \downarrow \Rightarrow \left(y'\right)' = y'' \le 0$

2) упр. ■

Критерий выпуклости через монотонность производной

Следствие Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на (a, b). Тогда

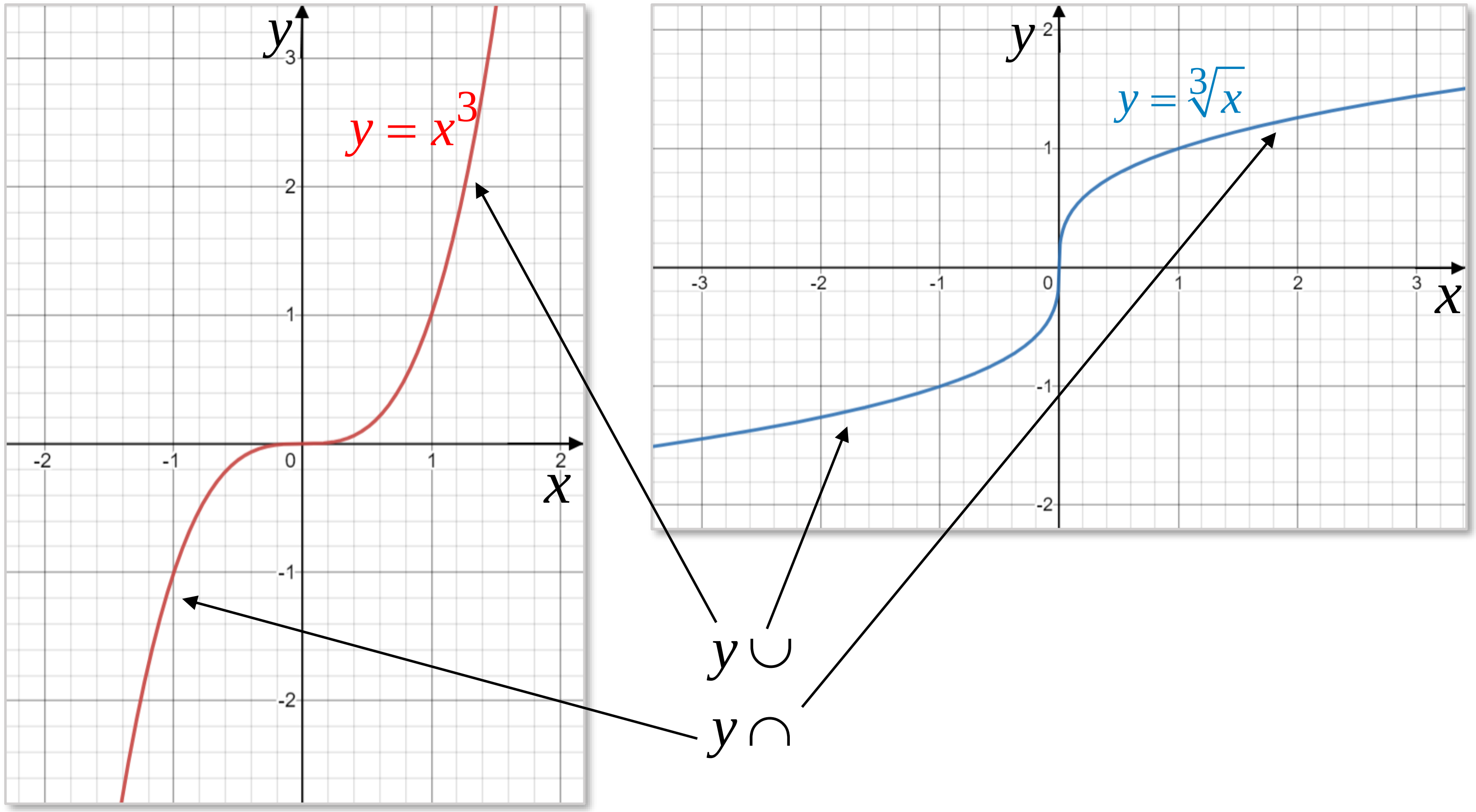
$$\boldsymbol{f(x)} \cup \ (\boldsymbol{f(x)} \cap) \Leftrightarrow \boldsymbol{f'(x)} \uparrow \ (\boldsymbol{f'(x)} \downarrow)$$

Точка перегиба. Определение

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$ и дифференцируема в $\hat{O}(x_0)$. Точка $x = x_0$ называется **точкой перегиба**, если при переходе через эту точку функция меняет выпуклость вверх на выпуклость вниз или наоборот.

Пример. Точка $x = 0$ является **точкой перегиба функции** $y = x^3, y = \sqrt[3]{x}$.

Точка перегиба. Определение



Необходимое условие точки перегиба

Теорема 6. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$, дифференцируема в $\hat{O}(x_0)$, дважды дифференцируема в точке $x = x_0$ и $\boldsymbol{x = x_0}$ – **точка перегиба**.

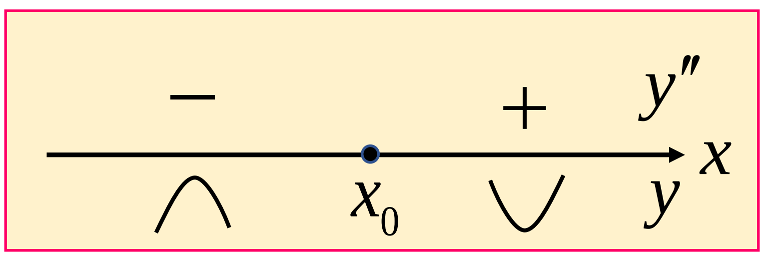
Тогда $\boxed{\boldsymbol{f''(x_0) = 0}}$

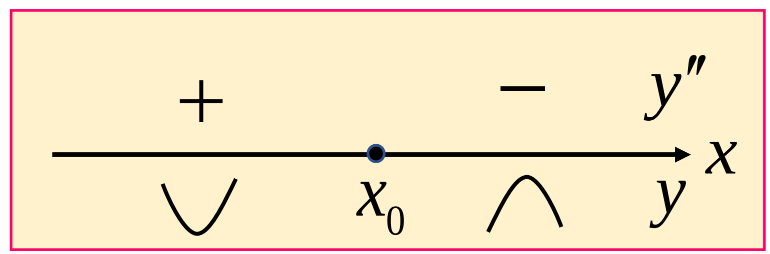
Без док-ва.

Достаточное условие точки перегиба

<u>Теорема 7.</u> Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$, дважды дифференцируема в $\hat{O}(x_0)$ и при **переходе через точку $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак.**

Тогда **$x = x_0$ – точка перегиба.**





Достаточное условие точки перегиба

Из теорем 5-7 следует

План исследования функции на выпуклость и точки перегиба

Следующий слайд можно не конспектировать

Алгоритм исследования функции на выпуклость и точки перегиба

1). Найти точки, в которых $y'' = 0$ или y'' не существует.

2). Решить неравенства $y'' > 0$ ($y'' < 0$) методом интервалов.
Если $y'' > 0$, то $y \cup$, если $y'' < 0$, то $y \cap$.

3). Найти промежутки выпуклости и точки перегиба.

Точки перегиба должны принадлежать области определения функции!

Пример исследования функции на выпуклость и точки перегиба

Пример 2. Исследовать на выпуклость и точки перегиба функцию $y = \frac{x^2+1}{x}$.

Решение.

1). Найдем y'': $\quad y'' = \left(y'\right)' = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right)' =$

$$= \frac{\left(x^2-1\right)' x^2 - (x^2-1)\cdot\left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} =$$

Пример исследования функции на выпуклость и точки перегиба

$$= \frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 1) \cdot 2x}{x^4} = \frac{\cancel{2x^3} - \cancel{2x^3} + 2x}{x^4} =$$

$$= \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

$y' \neq 0$ для любых x из $D(y)$,

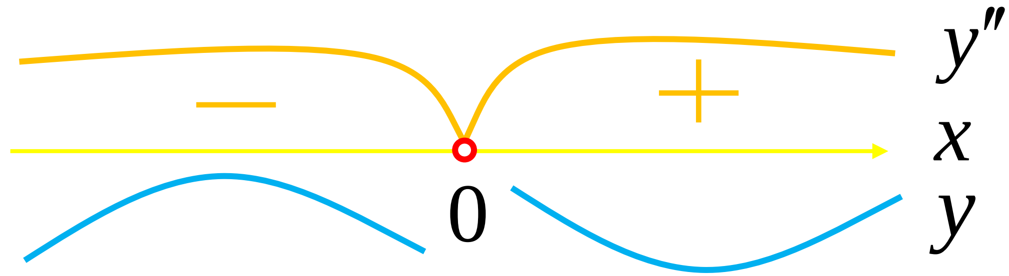
y' не существует при $x = 0$.

2). Решаем неравенство $y'' > 0$ $(y'' < 0)$

методом интервалов

Пример исследования функции на выпуклость и точки перегиба

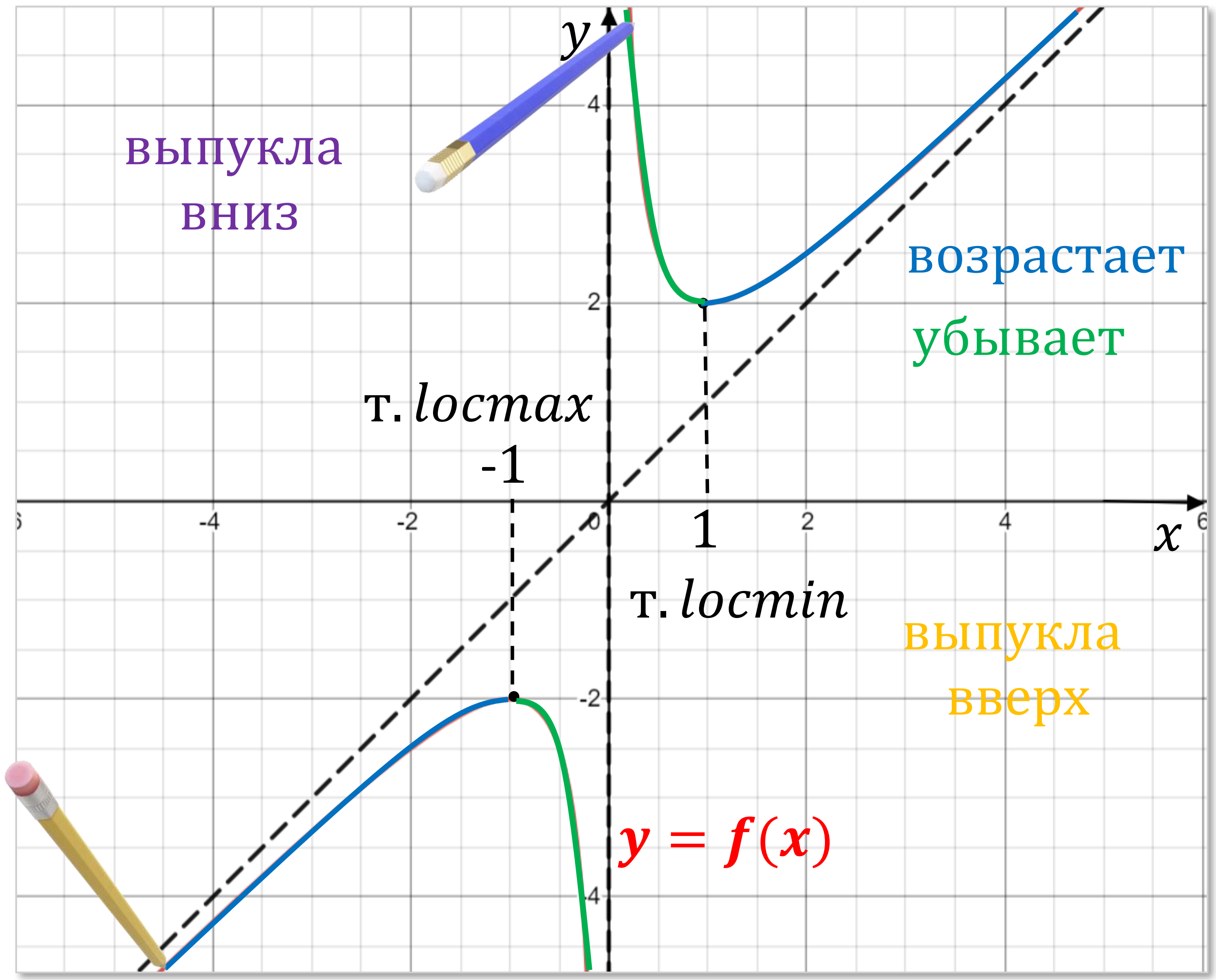
$$\frac{2}{x^3} > 0\ (< 0)$$



$$3).\ y \cap \text{ при } x \in (-\infty; 0)$$

$$y \cup \text{ при } x \in (0; +\infty)$$

Точка x=0 не является точкой перегиба, т.к. в этой точке функция *f* (*x*) не определена


y
4
выпукла
вниз
возрастает
2
убывает
т. locmax
-1
-4
-2
0
1
2
4
6
x
т. locmin
выпукла
вверх
-2
y = f(x)
-4

Наклонная и горизонтальная асимптота. Определение

Опр. Прямая $y = kx + b$ называется асимптотой (при $x \to \infty$) для графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to\infty}(f(x) - (kx + b)) = 0.$$

Если $k \neq 0$, то асимптота называется наклонной, а если $k = 0$, то горизонтальной.

Наклонная и горизонтальная асимптота. Пример

<u>Пример 3</u>. Прямая $y = x$ является наклонной асимптотой для графика функции $y = \frac{x^2+1}{x}$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x} =$$

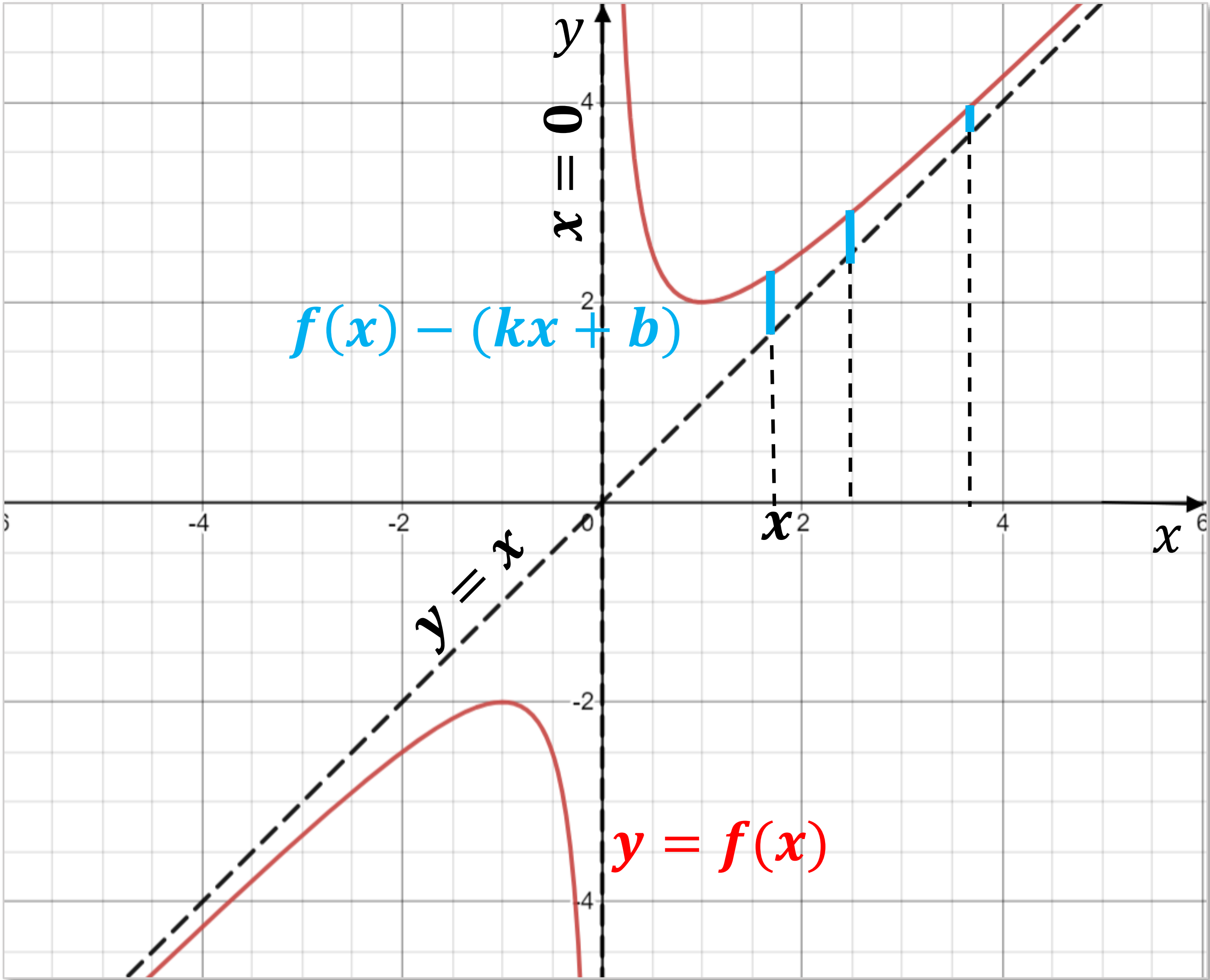
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

Определение вертикальной асимптоты

Опр. Прямая $x = a$ называется вертикальной асимптотой (при $x \to a$) для графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$

Пример. Прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой (при $x \to 0$) для графика функции $y = \frac{x^2+1}{x}$:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2 + 1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$$



y
$x = 0$
$f(x) - (kx + b)$
$y = x$
$y = f(x)$
x
-4
-2
0
2
4
6
-2
-4

Наклонная и горизонтальная асимптота. Вычисление

Теорема 8. Прямая $y = kx + b$ – наклонная (горизонтальная) асимптота для графика функции $y = f(x)$ (при $x \to \infty$) тогда и только тогда, когда

$$\boxed{k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx)}$$

Без док-ва.

Наклонная и горизонтальная асимптота. Вычисление. Пример

<u>Пример 4</u>. Для функции $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ имеем

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2} =$$

$$= \left[\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2}\right] = \left[\lim_{x\to\infty} 1\right] = 1$$

Наклонная и горизонтальная асимптота. Вычисление. Пример

$$b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x} - x\right) = 0$$

(вычислено ранее)

$\Rightarrow$ прямая $y = x$ является наклонной асимптотой

Наклонные и горизонтальные асимптоты при $x \to \pm\infty$. Односторонние вертикальные асимптоты

Наклонные и горизонтальные асимптоты $y = k_{\pm}x + b_{\pm}$ при $x \to \pm\infty$, а также односторонние вертикальные асимптоты $x = a$ при $x \to a \pm 0$ определяются и вычисляются аналогично.

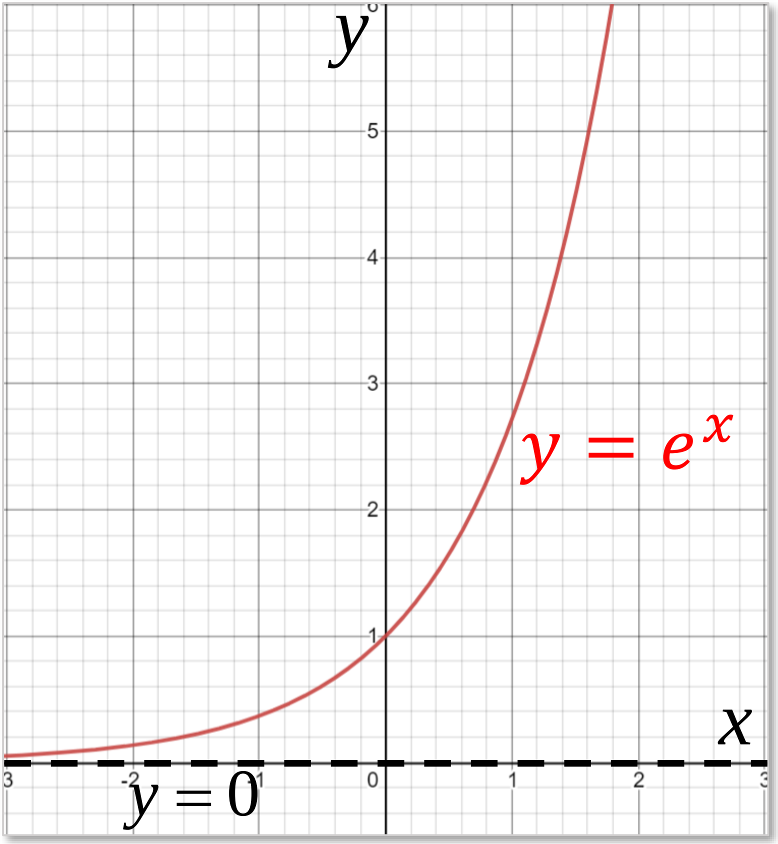
Наклонная горизонтальная асимптоты при $x \to \underline{+}\infty$. Пример

<u>Пример 5.</u> Для функции $f(x) = e^x$ и прямая $y = 0$ является асимптотой при $x \to -\infty$ (но не при $x \to +\infty$ – упр.):

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (kx + b)) = \lim_{x\to-\infty}(e^x - 0) =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} e^x = [e^{-\infty}] = \left[\frac{1}{e^{+\infty}}\right] = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$$

Асимптоты при $x \to \pm\infty$. Пример

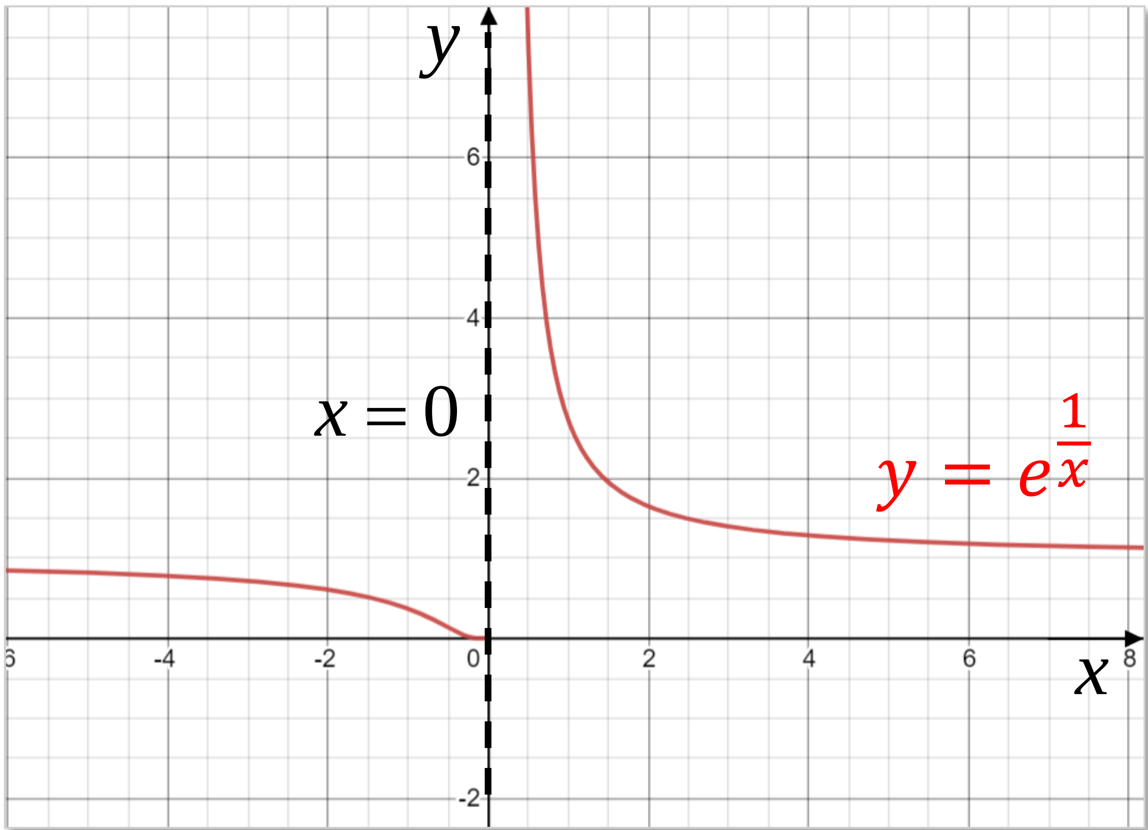


Односторонняя вертикальная асимптота

<u>Пример 6.</u> Для функции $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой при $x \to 0 + 0$ (но не при $x \to 0 - 0$ – упр.):

$$\lim_{x \to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^{\frac{1}{+0}}\right] = [e^{+\infty}] = +\infty$$

Односторонние вертикальные асимптоты. Пример



Исследование функции $y = f(x)$ и построение графика функции

По результатам данной лекции можно сформулировать
План исследования и построение графика функции

Следующие два слайда можно не конспектировать

Исследование функции $y = f(x)$ и построение графика функции

1). Найти область определения функции.

2). Найти точки пересечения с осями; решить неравенства $y > 0$ ($y < 0$) методом интервалов.

3). Выяснить, является ли функция, чётной, нечётной, общего вида, периодической.

4). Найти асимптоты.

5). Можно найти $\lim\limits_{x \to -\infty} y$, $\lim\limits_{x \to +\infty} y$,

6). Найти промежутки монотонности и точки локального экстремума. Алгоритм 1

Исследование функции $y = f(x)$ и построение графика функции

7). Найти интервалы выпуклости (вогнутости) графика функции; найти точки перегиба. Алгоритм 2

8). Найти дополнительные точки если нужно.

9). Построить график.

Для **многочленов** выполнить пункты: 1, 2, 3, (5), 6, 7, (8), 9.

Для **дробно-рациональных** функций выполнить пункты 1, 2, 3, 4, 6, 7, (8), 9.

Для **остальных**: 1 – 9.

Исследование функции $y = f(x)$ и построение графика функции. Примеры

Пример исследования и построение **графика функции по графику ее производной** (pdf-файл)

Пример исследования и построения **графика функции-многочлена** (pdf-файл)

Пример исследования и построения **графика дробно-рациональной функции** (pdf-файл)

Пример исследования и построения **графика трансцендентной функции** (pdf-файл)

Пример исследования и построения **графика иррациональной функции** (pdf-файл)