Лекция 4
Аналитическая геометрия
Прямая на плоскости

Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Презентации сделана на основе лекций

к.ф.-м.н., доцента Щербаковой В.А.

Глава 2. Аналитическая геометрия

§1. Прямая на плоскости

Уравнение линии на плоскости

Опр. Уравнением линии на плоскости называется уравнение $\boldsymbol{F(x,y)=0}$ такое, что точка $M(x_M,y_M)$ лежит на линии тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (т.е. $F(x_M,y_M)=0$ – верное числовое равенство).

Замечание: Координаты всех точек и векторов предполагаются декартовыми, а все базисы ортонормированными.

Векторное уравнение прямой на плоскости

Обозначения: L – прямая на плоскости;

$\vec{s}$ – направляющий вектор прямой, т.е. ненулевой вектор, коллинеарный прямой L;

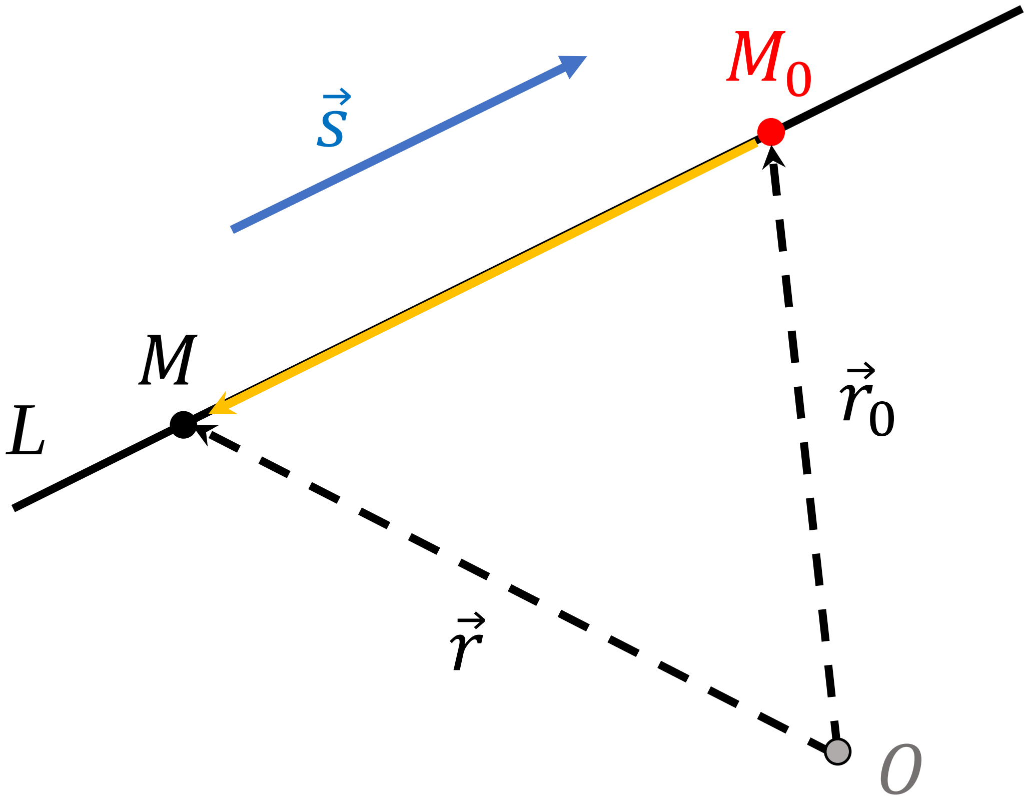
$M(x, y)$– произвольная точка на прямой;

$M_0(x_0, y_0)$– фиксированная точка на прямой.

$\vec{r}$ – радиус-вектор точки M на прямой;

$\vec{r}_0$ – радиус-вектор точки M_0.

Векторное уравнение прямой на плоскости



Векторное уравнение прямой на плоскости

$$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{r} - \vec{r}_0 = t \cdot \vec{s} \quad \text{или}$$

$$\boxed{\vec{r} = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{s}}$$

Параметрическое уравнение прямой на плоскости

Выводится из векторного уравнения:

Пусть $\vec{s} = (\ell, m)$;

$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x, y)$; $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0, y_0)$;

$\vec{r} - \vec{r}_0 = (x - x_0, y - y_0) \not\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{s}$

$(x - x_0, y - y_0) = t \cdot (\ell, m) \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x - x_0 = t \cdot \ell \\ y - y_0 = t \cdot m \end{cases}$ или $\boxed{\begin{cases} x = x_0 + t \cdot \ell \\ y = y_0 + t \cdot m \end{cases}}$

Каноническое уравнение прямой на плоскости

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0 = \left(x - x_0, y - y_0\right)$$

$\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s} \Leftrightarrow$ векторы коллинеарны т. и т. т., к. их координаты пропорциональны

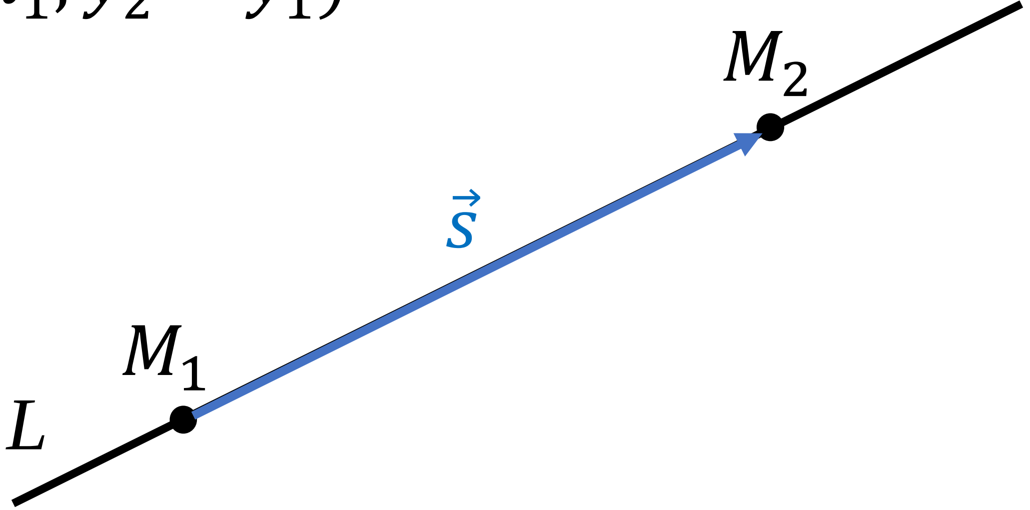
$$\boxed{\frac{x - x_0}{\ell} = \frac{y - y_0}{m}}$$

Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки

Пусть $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ – две несовпадающие фиксированные точки на прямой.

$$\vec{s} = \overrightarrow{M_1 M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

$$\boxed{\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}}$$



Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки

<u>Пример 2</u>. Найти каноническое и параметрическое уравнения прямой AB, если $A(-1,4), B(2,3)$.

По формуле $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$

$$AB:\ \frac{x-(-1)}{2-(-1)} = \frac{y-4}{3-4}$$

$$\frac{\boldsymbol{x+1}}{\boldsymbol{3}} = \frac{\boldsymbol{y-4}}{\boldsymbol{-1}} = \boldsymbol{t} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 3t \\ y-4 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = -1+3t} \\ \boldsymbol{y = 4-t} \end{cases}$$

каноническое уравнение

параметрическое уравнение

Общее уравнение прямой на плоскости

Выводится из канонического уравнения:

$$\frac{x-x_0}{\ell}=\frac{y-y_0}{m} \Rightarrow m(x-x_0)=\ell(y-y_0)$$

$$\Rightarrow m(x-x_0)-\ell(y-y_0)=0 \Rightarrow$$

$$m\,x+(-\ell)\,y+(-m\,x_0+\ell\,y_0)=0$$

Пусть $A=m,\;\; B=-\ell, C=(-m\,x_0+\ell\,y_0).$

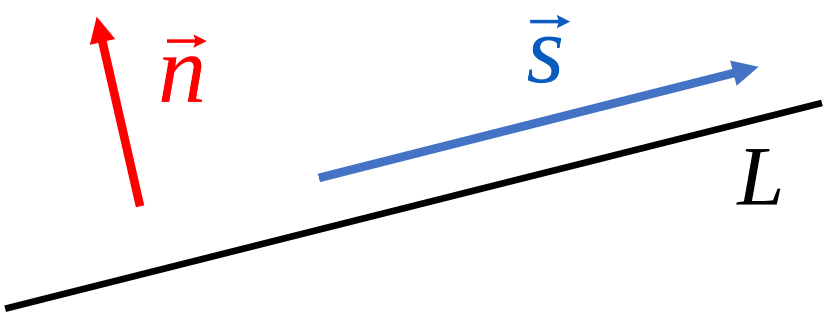
Общее уравнение прямой на плоскости

$\boxed{Ax + By + C = 0}$ - общее уравнение прямой

Замечание. $\vec{n} = (A, B)$- нормальный вектор прямой L, т.е. ненулевой вектор, перпендикулярный прямой

Действительно: $\vec{n} \cdot \vec{s} = m \cdot \ell + (-\ell) \cdot m = 0$

$\Rightarrow \vec{n} \perp \vec{s} \Rightarrow \vec{n} \perp L$



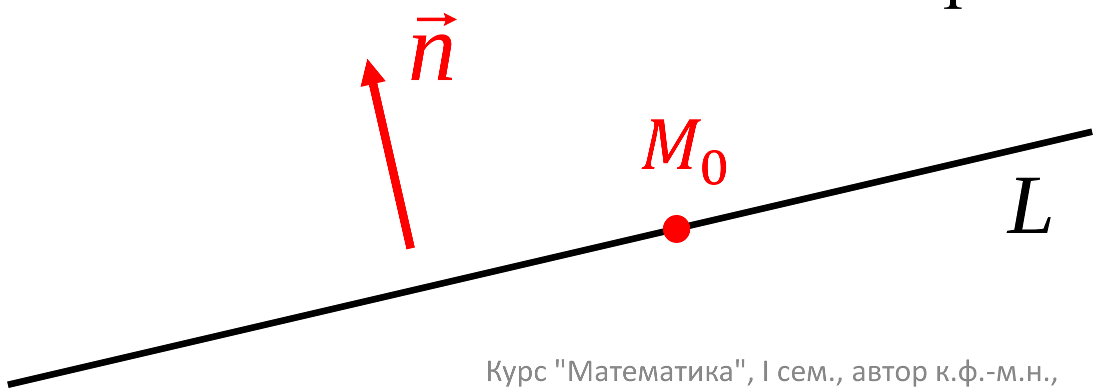
Общее уравнение прямой на плоскости, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором

Пусть $\vec{n} = (A, B) -$ нормальный вектор прямой L

$M_0(x_0, y_0) -$ точка на прямой L

$$\boxed{A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0}$$

- уравнение прямой, проходящ. через точку M_0 с норм. вектором $\vec{n}$



Общее уравнение прямой на плоскости, проходящей через данную точку с данным нормальным вектором

Пример 2. Написать общее уравнение а) прямой L_1, перпендикулярной к прямой L: $2x-3y+1=0$, проходящей через точку P(-1,1), и б) прямой L_2, параллельной прямой L, проходящей через эту точку.

Решение (I способ). Нормальный вектор $\vec{n}=(2,-3)$ прямой L является направляющим вектором $\vec{s}_1$ прямой L_1 $\Rightarrow$

$\left[\text{по формуле } \frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}\right]$

$$L_1: \frac{x-(-1)}{2}=\frac{y-1}{-3} \Rightarrow \frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-3} \Rightarrow$$

Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две точки

$$-3(x+1) = 2(y-1) \Rightarrow -3x - 3 = 2y - 2 \Rightarrow$$

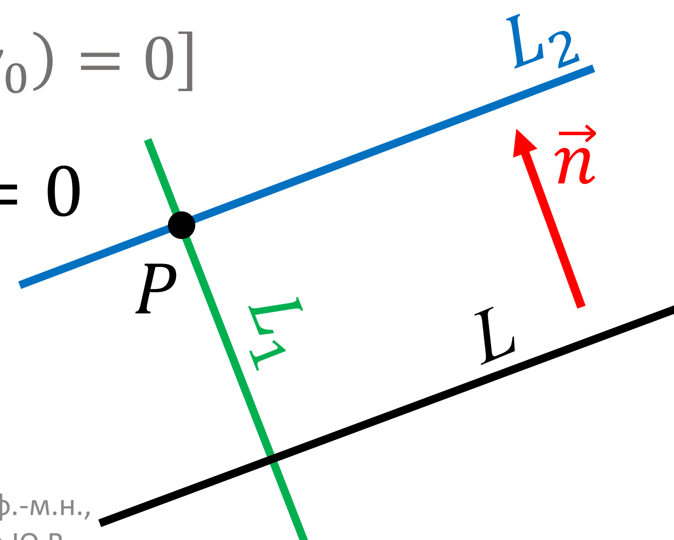
$$L_1\colon 3x + 2y + 1 = 0$$

Нормальный вектор $\vec{n} = (2, -3)$ прямой L является нормальным вектором $\vec{s}_2$ прямой L_2 $\Rightarrow$

[по формуле $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$]

$$L_2\colon\ 2\big(x - (-1)\big) - 3(y - 1) = 0$$

$$L_2\colon\ 2x - 3y + 5 = 0$$



Уравнение прямой «в отрезках»

Выводится из общего уравнения прямой:

Пусть $A \neq 0,\ B \neq 0,\ C \neq 0.$

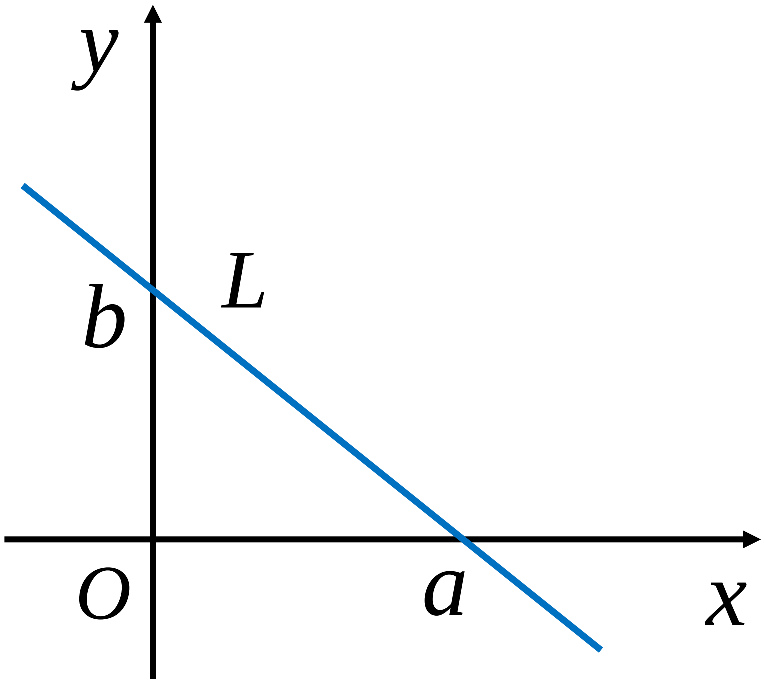
$$Ax + By = -C \ \Rightarrow\ \frac{Ax}{-C} + \frac{By}{-C} = 1 \ \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$$

Пусть $\dfrac{-C}{A} = a;\ \dfrac{-C}{B} = b.$

Тогда $$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

Уравнение прямой «в отрезках»



$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Пересечение с Ox:

$$y=0 \Rightarrow x=a$$

Пересечение с Oy:

$$x=0 \Rightarrow y=b$$

a, b – отрезки, отсекаемые прямой на координатных осях

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Выводится из общего уравнения прямой

$Ax + By + C = 0$:

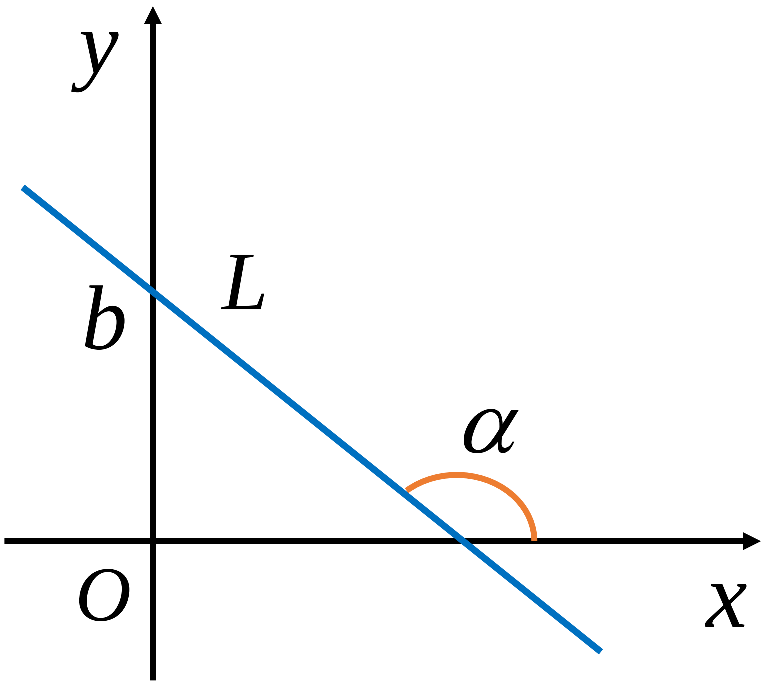
Пусть $B \neq 0$.

$$Ax + By + C = 0 \Rightarrow y = \frac{-A}{B}x + \frac{-C}{B}$$

Обозначим через $\frac{-A}{B} = k;\ \frac{-C}{B} = b.$ Тогда

$\boxed{y = kx + b}$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом

Уравнение прямой с угловым коэффициентом



Замечание:

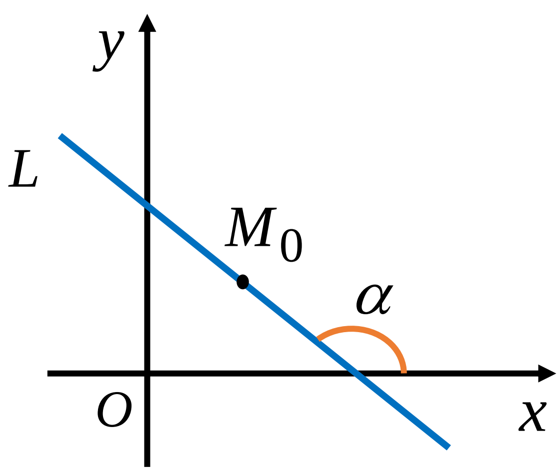
1) точка пересечения прямой с Oy: $x = 0$, $y = b$;

2) $k = \operatorname{tg} \alpha$: угловой коэффициент прямой равен тангенсу угла наклона прямой

Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом

Пусть k - угловой коэффициент прямой L

$M_0(x_0, y_0) -$ точка на прямой L



$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}$$

- уравнение прямой L, с угловым коэффициентом k, проходящей через точку M_0

Уравнение прямой, проходящей через данную точку с данным угловым коэффициентом

Пример 2.

Решение (II способ).

$$L:\ 2x-3y+1=0 \Rightarrow -3y=-2x-1 \Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3} \Rightarrow k=\frac{2}{3}$$

$$L_1 \perp L \Rightarrow k_1=-\frac{1}{k}=-\frac{3}{2}$$ [по формуле $y-y_0=k(x-x_0)$]

$$\Rightarrow L_1:\ y-1=-\frac{3}{2}(x+1) \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow L_1:\ 3x+2y+1=0$$

$$L_2 \parallel L \Rightarrow k_2=k=\frac{2}{3} \Rightarrow y-1=\frac{2}{3}(x+1)$$

$$\Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3} \Rightarrow L_2:\ 2x-3y+5=0$$

Теорема об общем уравнение прямой на плоскости

<u>Теорема</u>. Любая прямая задается общим уравнением, и наоборот, любое уравнение $Ax + By + C = 0$ задает прямую линию (если $A^2 + B^2 \neq 0$).

Теорема об общем уравнение прямой на плоскости

<u>Доказательство</u>.

1) Пусть прямая L не параллельна оси Oy. Тогда она задаётся уравнением с угловым коэффициентом $y = kx + b$, которое можно переписать как $k \cdot x + (-1) \cdot y + b = 0$ или $Ax + By + C = 0$, где $A = k,\ B = -1,\ C = b$.

2) Пусть прямая L параллельна оси Oy. Тогда она задаётся уравнением $x = a$ или $Ax + By + C = 0$, где $A = 1,\ B = 0,\ C = -a$.

Обратное утверждение аналогично. ■

Взаимное расположение двух прямых

$$L_1: \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad \vec{n}_1 = (A_1, B_1)$$

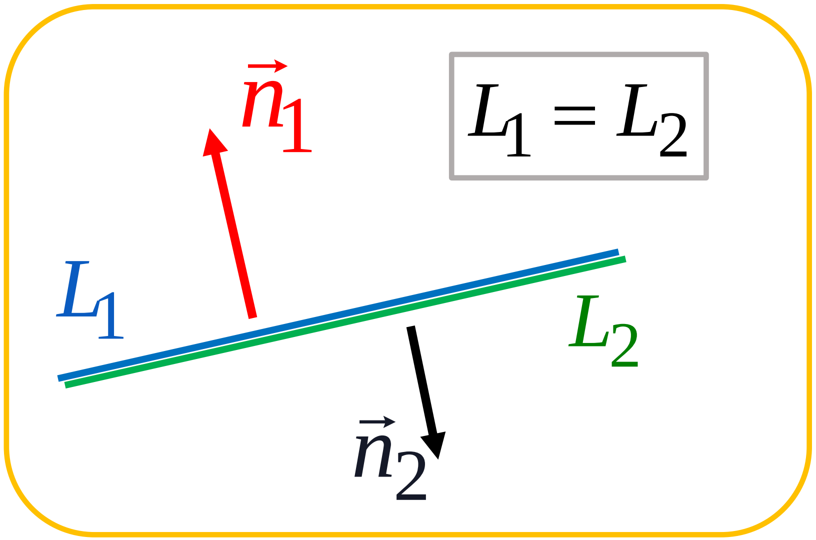
$$L_2: \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad \vec{n}_2 = (A_2, B_2)$$

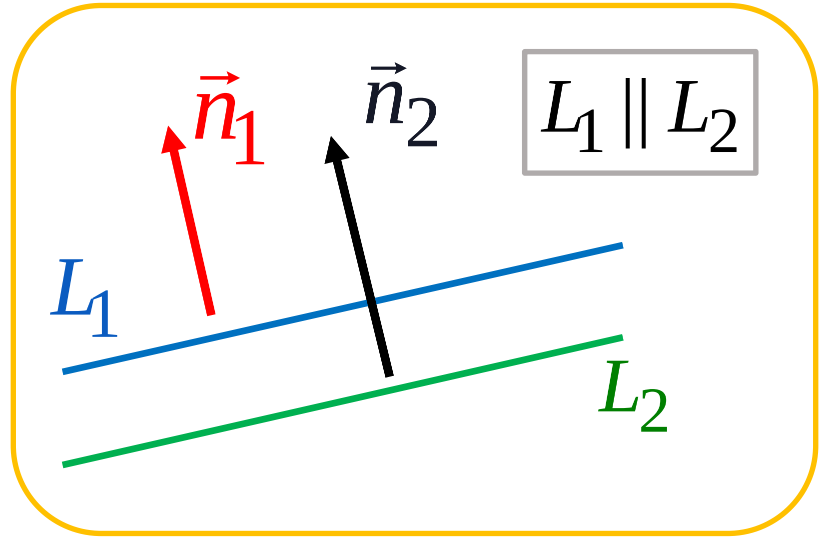
$$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$$

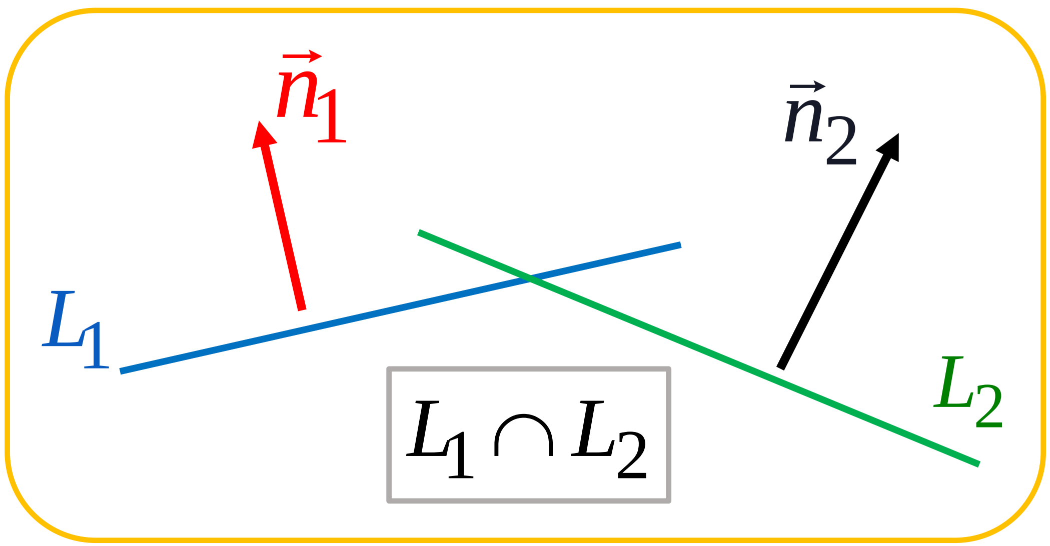
$$\boxed{L_1 = L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}} \qquad \boxed{L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}}$$

$$\boxed{L_1 \text{ и } L_2 \text{ пересекаются} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}}$$

Взаимное расположение двух прямых

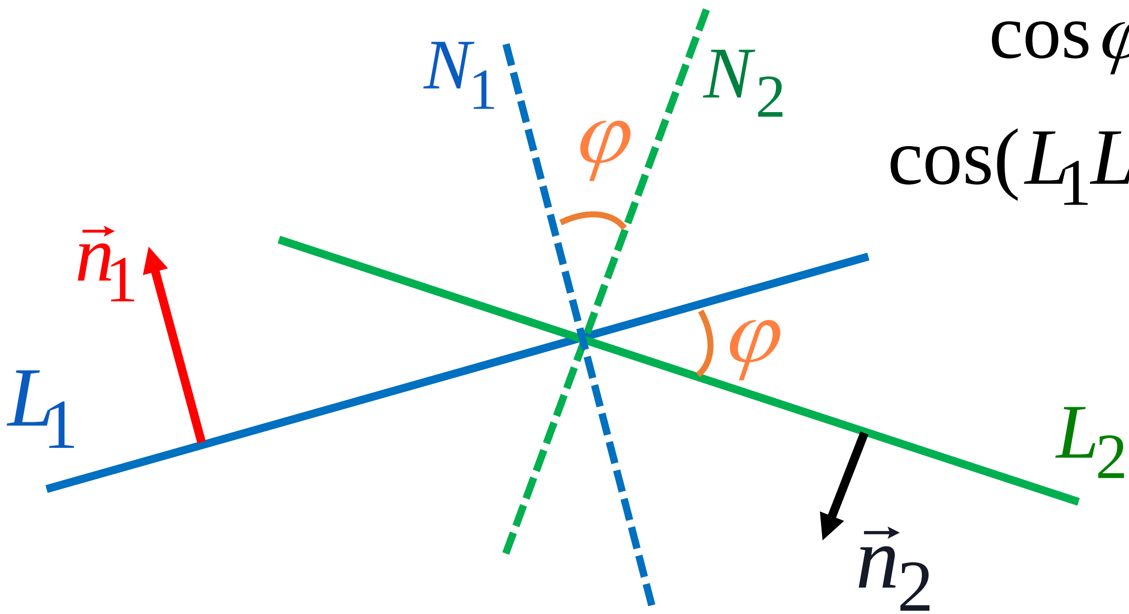






Угол между двумя прямыми

Утв. Острый **угол** φ **между прямыми** L_1 и L_2 равен острому углу между прямыми N_1 и N_2, перпендикулярными к данным.

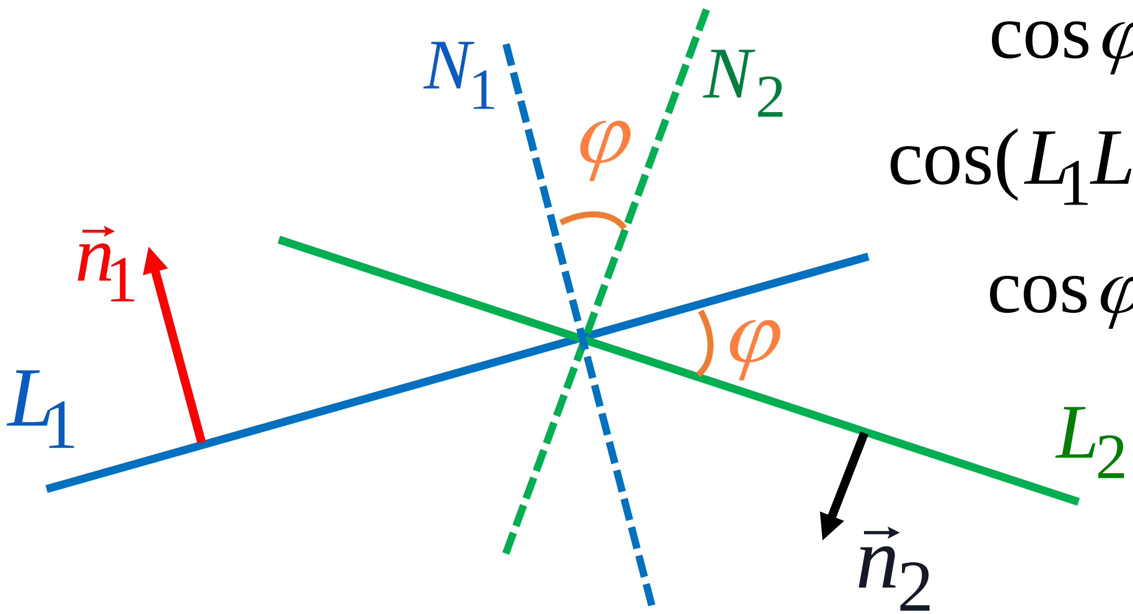


$$\cos\varphi = \cos(L_1 L_2)$$

$$\cos(L_1 L_2) = \cos(N_1 N_2)$$

Угол между двумя прямыми

<u>Утв.</u> Острый **угол φ между прямыми** L_1 и L_2 равен острому углу между прямыми N_1 и N_2, перпендикулярными к данным.



$$\cos\varphi = \cos(L_1 L_2)$$

$$\cos(L_1 L_2) = \cos(N_1 N_2)$$

$$\cos\varphi = \left|\cos(\vec{n}_1 \vec{n}_2)\right|$$

Угол между двумя прямыми

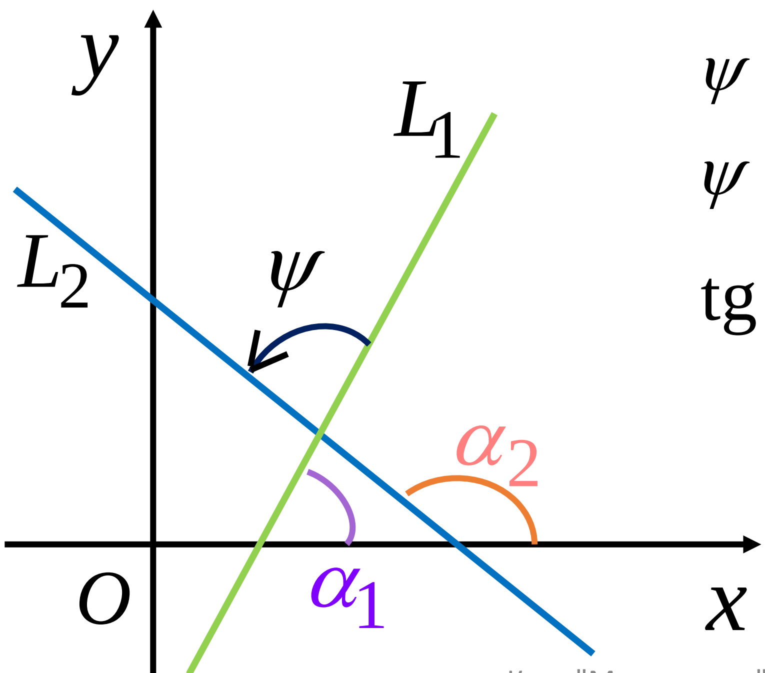
$$\boxed{\cos\varphi = \cos(L_1 L_2) = \left|\cos(\vec{n}_1 \vec{n}_2)\right|}$$

$$\cos(\vec{n}_1 \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} \cdot \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2}}$$

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1{}^2 + B_1{}^2} \cdot \sqrt{A_2{}^2 + B_2{}^2}}}$$

Угол между двумя прямыми

<u>Опр</u>. **Углом ψ от прямой L_1 до прямой L_2** называется наименьший угол (пр. часов. стрелки), на который нужно повернуть прямую L_1 до совмещения с прямой L_2 .



$$\psi = 180^0 - (\alpha_1 + (180^0 - \alpha_2))$$

$$\psi = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_1}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \operatorname{tg}\alpha_2}$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\psi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}}$$

Угол между двумя прямыми

$$L_1: \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \qquad k_1 = -\frac{A_1}{B_1}; \quad b_1 = -\frac{C_1}{B_1}$$

$$B_1 y = -A_1 x - C_1$$

$$y = -\frac{A_1}{B_1} x - \frac{C_1}{B_1}$$

$$L_2: \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \qquad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}; \quad b_2 = -\frac{C_2}{B_2}$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\frac{A_2}{B_2} - \left(-\frac{A_1}{B_1}\right)}{1 + \left(-\frac{A_1}{B_1}\right)\left(-\frac{A_2}{B_2}\right)} = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2} \ \blacksquare$$

Взаимное расположение двух прямых

Следствие. 1) $L_1 \| L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$;

2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$;

3) $$\boxed{\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|}$$

Доказательство.

1) $L_1 \| L_2 \Leftrightarrow \psi = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\psi = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2$;

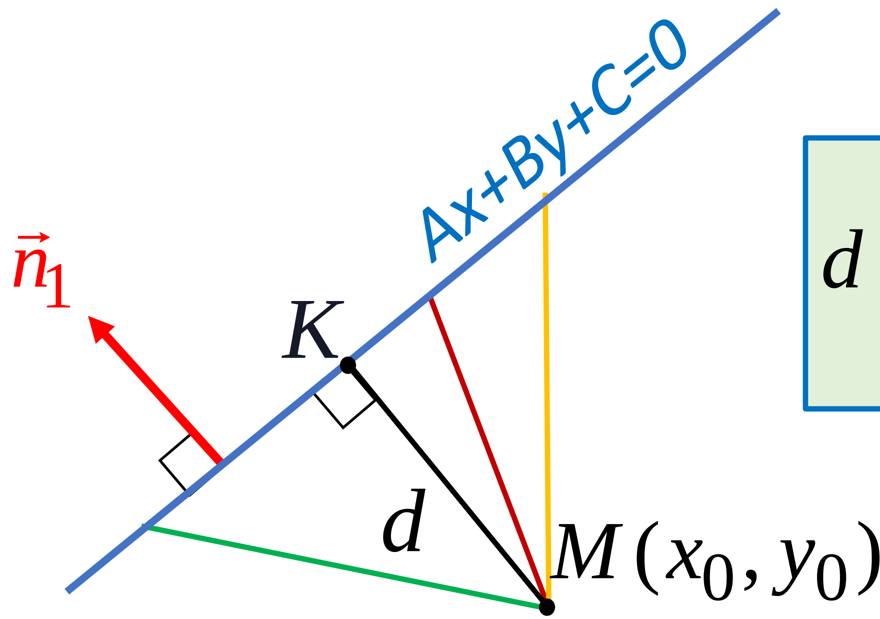
2) $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \psi = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg}\psi = \infty \Leftrightarrow 1 + k_1 k_2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = -\dfrac{1}{k_1}$;

3) $\operatorname{tg}\varphi = |\operatorname{tg}\psi|$

Расстояние от точки до прямой

Опр. Расстояние м d от точки M до прямой называется наименьшее расстояние от M до точек прямой.



$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Расстояние от точки до прямой

Пусть $K(x_1, y_1), M(x_0, y_0)$

$$L: \quad Ax + By + C = 0$$

$$\overrightarrow{KM} \; || \; \vec{n} \Rightarrow \overrightarrow{KM} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{KM}| \cdot |\vec{n}| \cdot (\pm 1) = d \cdot |\vec{n}| \cdot (\pm 1)$$

$$\left| \overrightarrow{KM} \cdot \vec{n} \right| = d \cdot |\vec{n}| \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{KM} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$\overrightarrow{KM} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1), \quad \vec{n} = (A, B)$$

Расстояние от точки до прямой

$$\left|\overrightarrow{KM}\cdot\vec{n}\right| = d\cdot|\vec{n}| \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{KM}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

$$\overrightarrow{KM} = (x_0 - x_1, y_0 - y_1), \quad \vec{n} = (A, B)$$

$$d = \frac{\left|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\left|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\begin{bmatrix} Ax_1 + By_1 + C = 0 \\ C = -Ax_1 - By_1 \end{bmatrix} = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \blacksquare$$