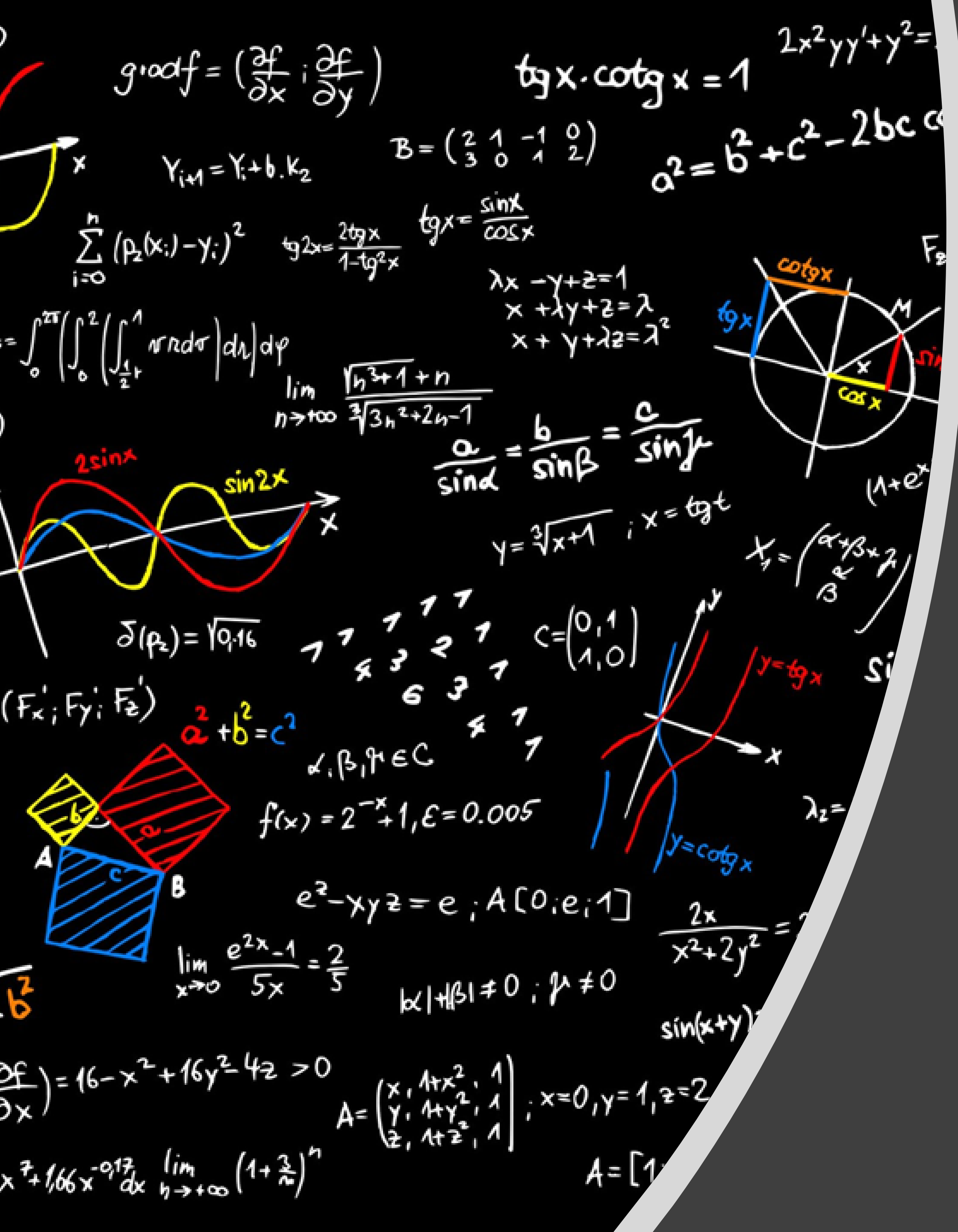


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III семестр (II курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 3

Двойной интеграл

Лекция 3
Двойной интеграл

1. Задача о массе неоднородной пластины. Понятие двойного интеграла.

2. Вычисление двойного интеграла по прямоугольнику.

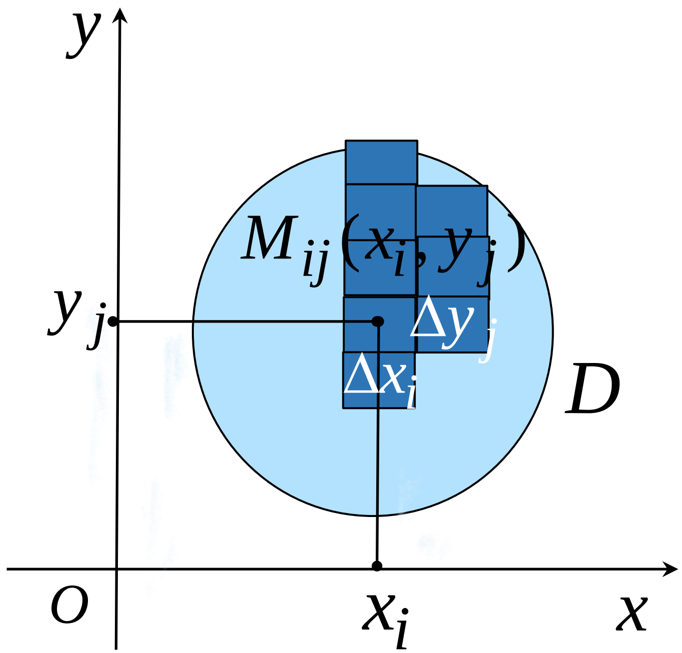
3. Вычисление двойного интеграла по правильной области.

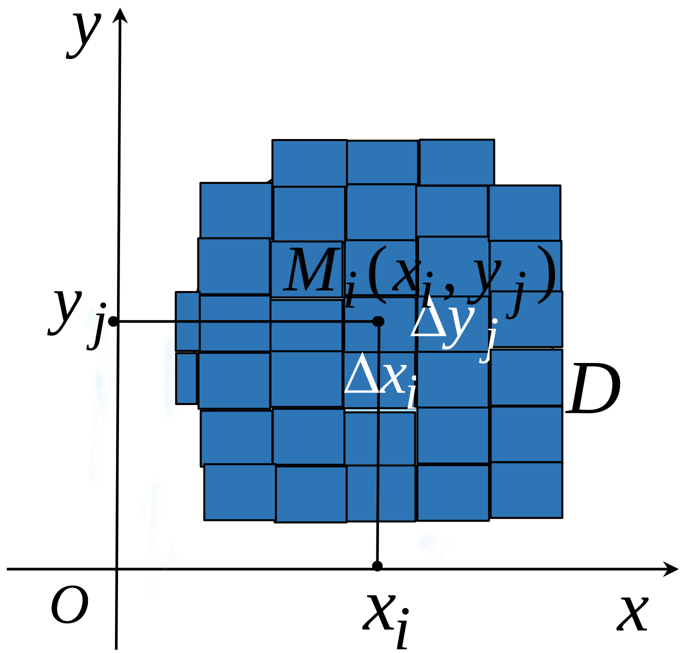
Задача о массе неоднородной пластины

Задача: Найти массу неоднородной пластины D с плотностью $f(M) = f(x, y)$.

- Разобьем пластину на фрагменты - прямоугольники.
- Внутри каждого фрагмента выберем точку $M_{ij}(x_i, y_j)$.

Задача о массе неоднородной пластины





Задача о массе неоднородной пластины

- Посчитаем массу m_{ij} каждого фрагмента, считая плотность постоянной и равной $f\left(M_{ij}\right) = f\left(x_i, y_j\right)$:

$\Delta S_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ – площадь фрагмента

$\Delta m_{ij} \approx f(x_i, y_j)\Delta S_{ij} = f(x_i, y_j)\Delta x_i \Delta y_j$
масса фрагмента

Задача о массе неоднородной пластины

- Вычислим приближенно массу m всей пластины, сложив массы всех фрагментов

$$m \approx \sum_{i,j} \Delta m_{ij} \approx \sum_{i,j} f(x_i, y_j) \Delta x_i \Delta y_j -$$

масса пластины D

Задача о массе неоднородной пластины

- Перейдем к пределу:

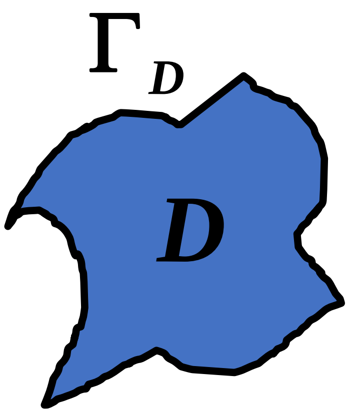
$$\boxed{m = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i,j} f(x_i,y_j)\cdot \Delta x_i \Delta y_j}$$

где $\lambda = \max_{i,j}\{\Delta x_i, \Delta y_j\}$

Двойной интеграл

Теорема о существовании и свойства двойного интеграла

Теорема 1. Интеграл $\iint_D f(x,y)dxdy$ существует, если функция $z = f(x,y)$ **непрерывна** на **области** (ограниченном, связном множестве) D , ограниченной **кусочно-гладкой линией** Γ_D.



Свойства двойного интеграла аналогичны свойствам определенного интеграла.

Вычисление двойного интеграла. Область – прямоугольник

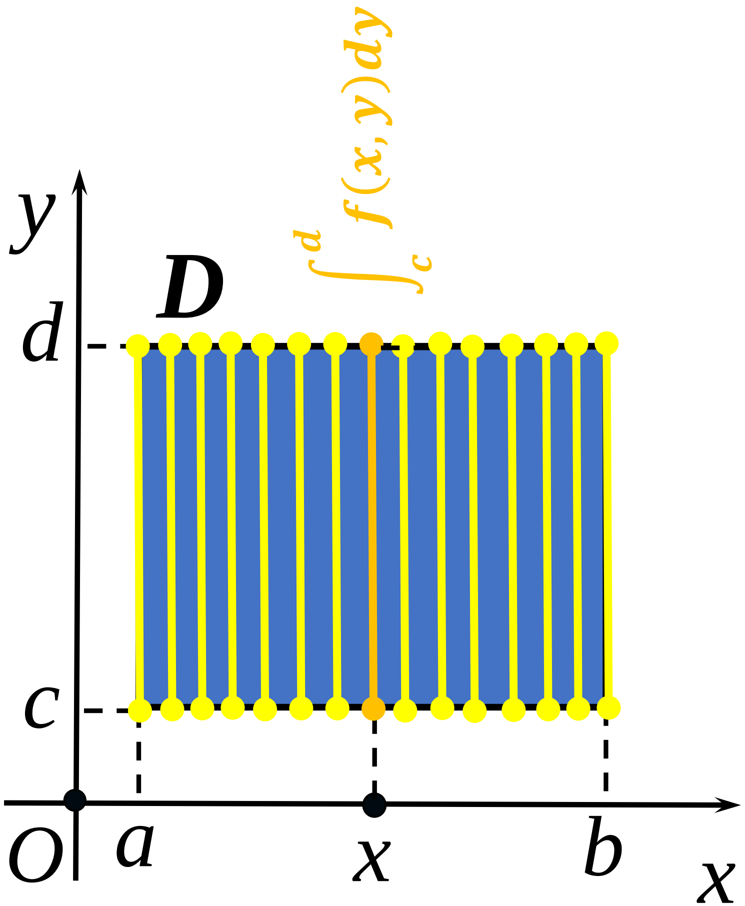
Теорема 2. Пусть область D является **прямоугольником:** $a \le x \le b, c \le y \le d.$

Тогда

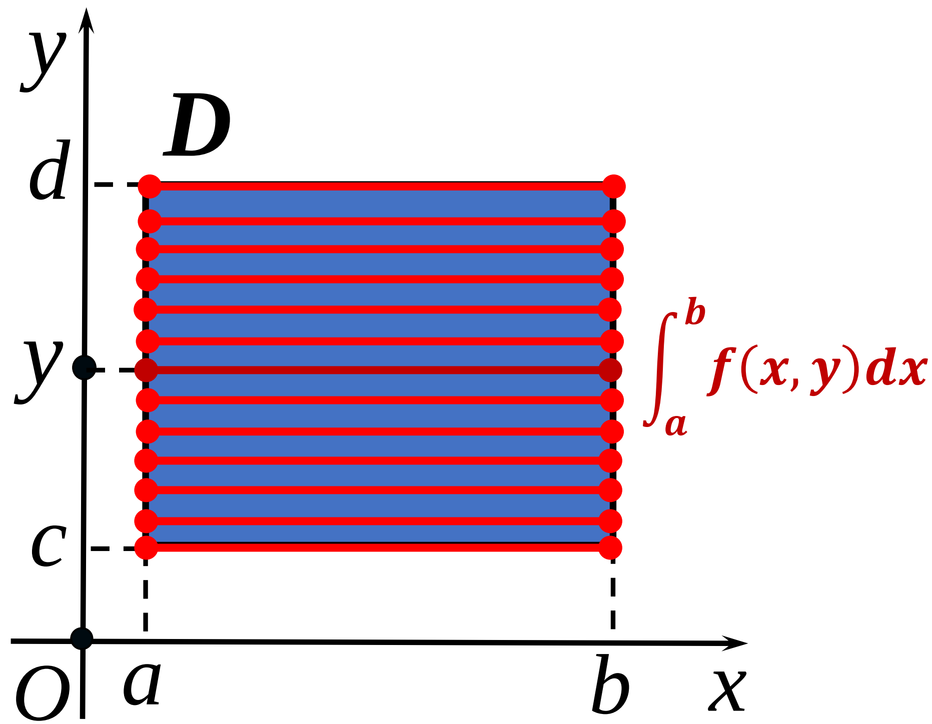
$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy}$$

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)dx}$$

повторные интегралы



$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy$$

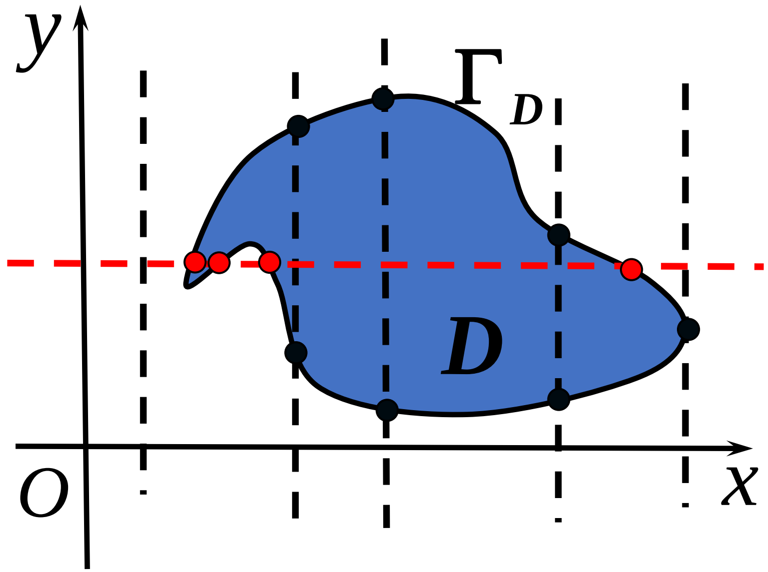


$$\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

Определение правильной области

<u>Опр</u>. Область D в плоскости Oxy называется правильной в направлении оси Oy (или Ox), если любая прямая, параллельная соответствующей оси, пересекает границы Γ_D области D не более, чем в 2-х точках.

Определение правильной области



<u>Пример 1</u>. Область D – правильная в напр. оси Oy, но неправильная в напр. оси Ox.

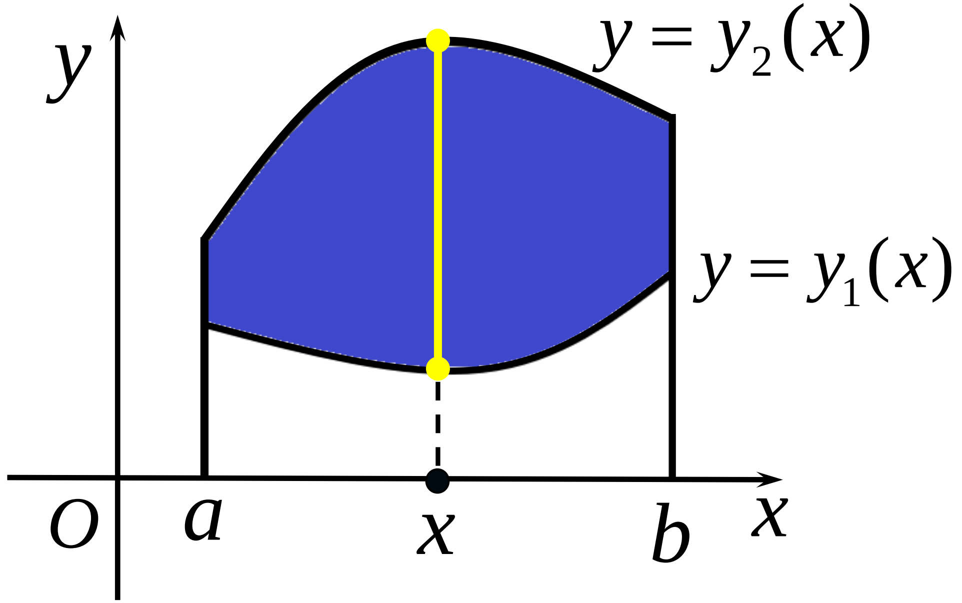
Двойной интеграл по правильной области

<u>Теорема 3</u>.

- Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D,
- область D **ограничена линиями**
$$\boldsymbol{y = y_1(x), y = y_2(x), x = a, x = b},$$
- причем функции $y_1(x), y_2(x)$ непрерывно дифференцируемы и $y_1(x) \leq y_2(x)$ для $x \in [a, b]$,
- (в частности, область D правильная в напр. оси Oy).

Двойной интеграл по правильной области

Тогда $$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy}$$



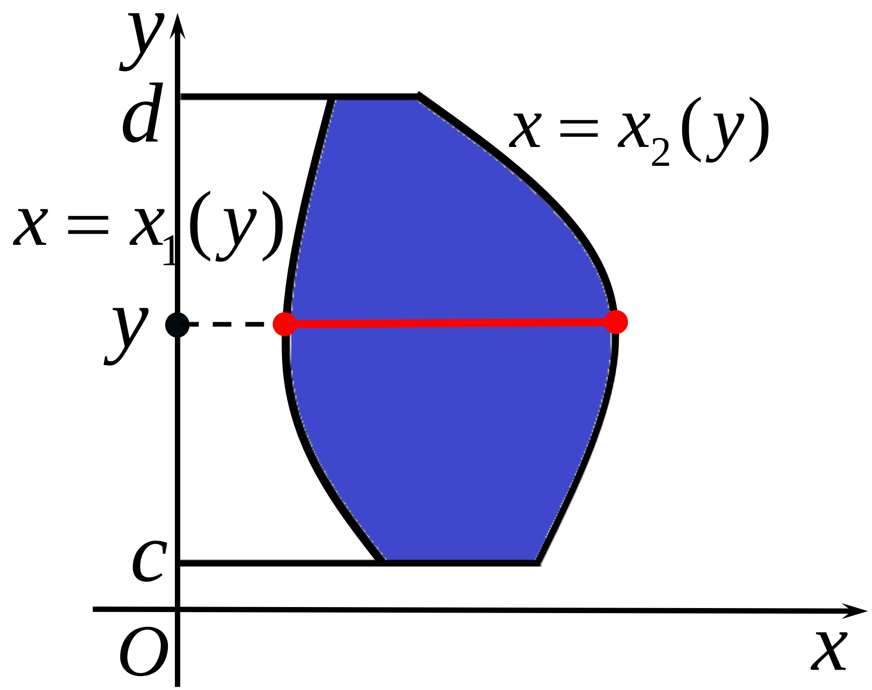
Двойной интеграл по правильной области

Теорема 4.

- Пусть функция $z = f(x, y)$ непрерывна в области D,
- область D **ограничена линиями**
  $$\boldsymbol{x = x_1(y), x = x_2(y), y = c, y = d},$$
- причем функции $x_1(y), x_2(y)$ непрерывно дифференцируемы и $x_1(y) \leq x_2(y)$ для $y \in [c, d]$,
- (в частности, область D правильная в напр. оси Ox).

Двойной интеграл по правильной области

Тогда $$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\text{c}}^{d} dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx}$$



Двойной интеграл. Пример 2

Пример 2. $f(x,y) = x^2 y$

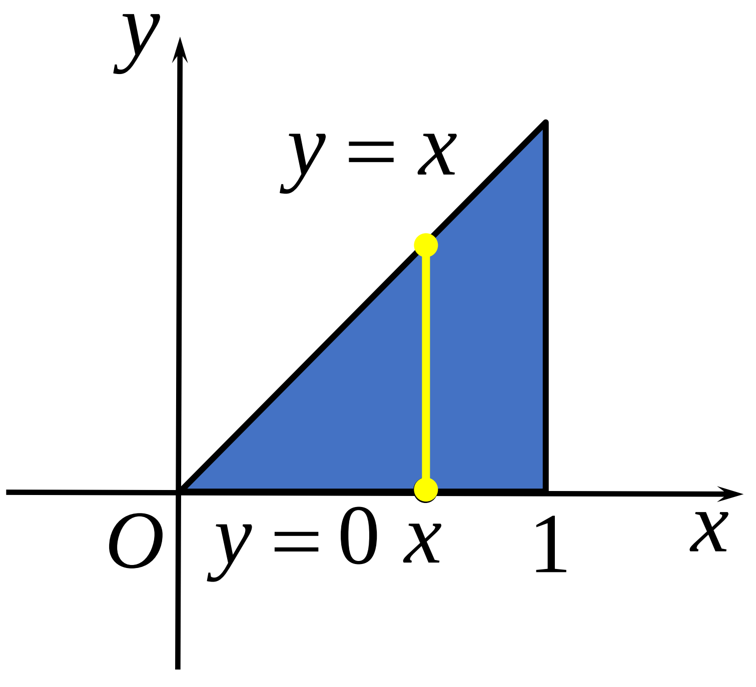
$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases} \qquad \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy - ?$$

Решение. Чтобы найти уравнение линий, для Γ_D «превращаем» все **неравенства** для D в **равенства**:

$$\Gamma_D: \begin{array}{l} x = 0, \;\; x = 1, \\ y = 0, \;\; y = x \end{array}$$

Двойной интеграл. Пример 2

Изображаем область D и применяем теорему 3:



Двойной интеграл. Пример 2

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_D x^2 y dxdy = \int_0^1 dx \int_0^x x^2 y dy =$$

$$= \int_0^1 dx \left(x^2 \int_0^x y dy \right) = \int_0^1 dx \left(x^2 \frac{y^2}{2} \Big|_0^x \right) =$$

$$= \int_0^1 dx \frac{x^4}{2} = \int_0^1 \frac{x^4}{2} dx = \frac{x^5}{10} \Big|_0^1 = \frac{1}{10}$$

Двойной интеграл. Пример 3

Пример 3. Переменить порядок интегрирования в повторном интеграле

$$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy$$

Решение. 1) Применим теорему 3:

$$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)dy = \iint\limits_{D} f(x,y)dxdy$$

Двойной интеграл. Пример 3

2) По пределам интегрирования в интеграле выписываем неравенства для области D:

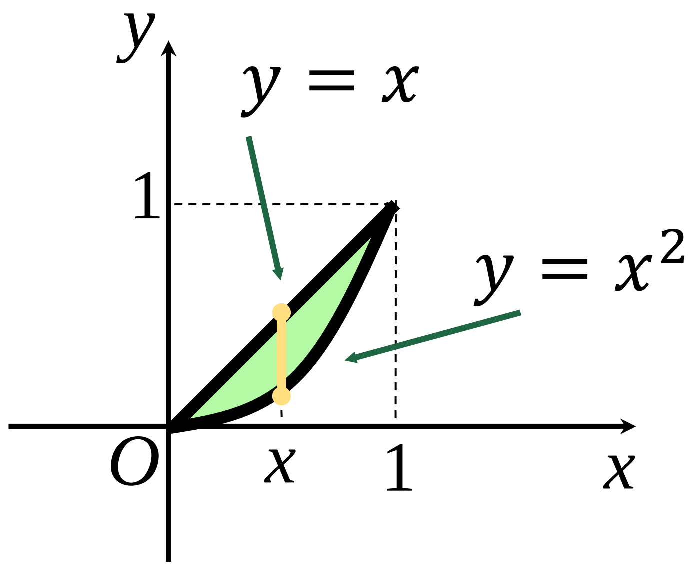
$$D:\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases}$$

3) Находим уравнения для границы Γ_D, «превращая» неравенства D для в равенства:

$$\Gamma_D: \quad \begin{matrix} x = 0, \ x = 1, \\ y = x, \, y = x^2 \end{matrix}$$

Двойной интеграл. Пример 3

4) Изображаем область D:



Двойной интеграл. Пример 3

5) Выражаем x через y в тех уравнения границы Γ_D, где это возможно:

$$y = x \to x = y$$

$$y = x^2 \to x = \sqrt{y}$$

6) Переписываем неравенства для области D:

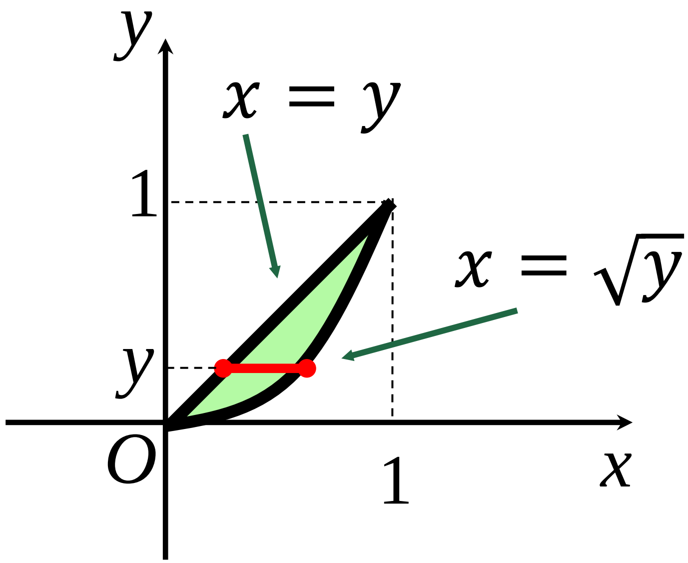
$$D: \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le \sqrt{y} \end{cases}$$

Двойной интеграл. Пример 2

7) Применим теорему 4:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$$



<u>Ответ</u>: $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx.$

Двойной интеграл

1). Внешний интеграл всегда в постоянных пределах.

2). Величина двойного интеграла не зависит от порядка интегрирования.

Двойной интеграл. Пример 4

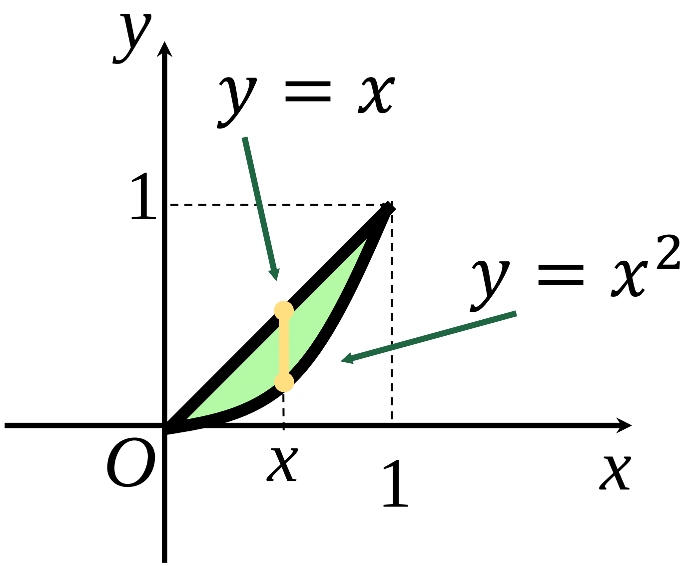
Пример 4. $f(x,y) = x$

$$D: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^2 \le y \le x \end{cases} \qquad \iint\limits_D f(x,y)\,dxdy - ?$$

Решение. I способ. Фиксируем x (пример 3):

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} f(x,y)\,dy =$$

Двойной интеграл. Пример 4



$$= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{x} x\,dy = \int_0^1 dx \left(x \int_{x^2}^{x} dy \right) =$$

Двойной интеграл. Пример 4

$$= \int_0^1 dx\, x\left(y\Big|_{x^2}^{x}\right) = \int_0^1 dx\, x(x - x^2) =$$

$$= \int_0^1 (x^2 - x^3)\, dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{12}$$

Двойной интеграл. Пример 4

II способ. Фиксируем y (пример 3):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{y}} xdx =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \left(\left. \frac{x^2}{2} \right|_y^{\sqrt{y}} \right) = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 (y - y^2)\, dy =$$

$$= \frac{1}{2} \left. \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \right|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

Двойной интеграл. Пример 5

<u>Пример 5</u>. Свести сумму повторных интегралов к двойному и переменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$$

Двойной интеграл. Пример 5

Решение. 1) Применим теорему 3:

$$\int_0^1 dx \int_0^x f(x,y)dy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy$$

$$\int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy = \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

Область D – есть объединение правильных областей D_1 и D_2.

Двойной интеграл. Пример 5

2) По пределам интегрирования в первом интеграле выписываем неравенства для области D_1:

$$D_1: \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

По второму интегралу выписываем неравенства для области D_2:

$$D_2: \begin{cases} 1 \le x \le \sqrt{2} \\ 0 \le y \le \sqrt{2 - x^2} \end{cases}$$

Двойной интеграл. Пример 5

3) Находим уравнения для границы Γ_{D_1}, «превращая» неравенства для D_1 для в равенства:

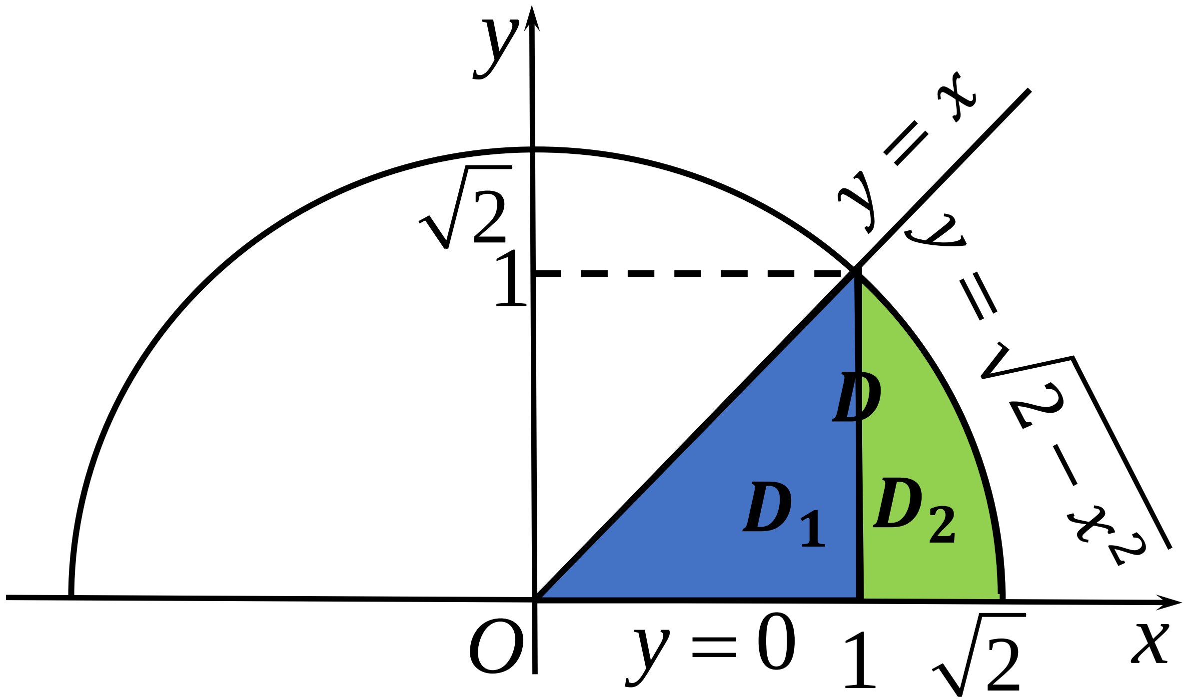
$$\Gamma_{D_1}: \begin{matrix} x=0, & x=1, \\ y=0, & y=x \end{matrix}$$

Аналогично для Γ_{D_2}:

$$\Gamma_{D_2}: \begin{matrix} x=1,\ x=\sqrt{2},\ y=0, \\ y=\sqrt{2-x^2}\ \left(x^2+y^2=2,\ y\geq 0\right) \end{matrix}$$

Двойной интеграл. Пример 3

4) Изображаем области D_1 и D_2, а значит и область D – объединение этих областей:



Двойной интеграл. Пример 5

5) Выражаем x через y в тех уравнения границы Γ_{D_1}, где это возможно:

$$y = x \to x = y$$

Аналогично, для Γ_{D_2}, где это возможно:

$$y = \sqrt{2 - x^2} \to y^2 = 2 - x^2, y \geq 0$$

$$\to x^2 = 2 - y^2, y \geq 0 \to x = \sqrt{2 - y^2}$$

Двойной интеграл. Пример 5

6) Переписываем неравенства для областей D_1, D_2:

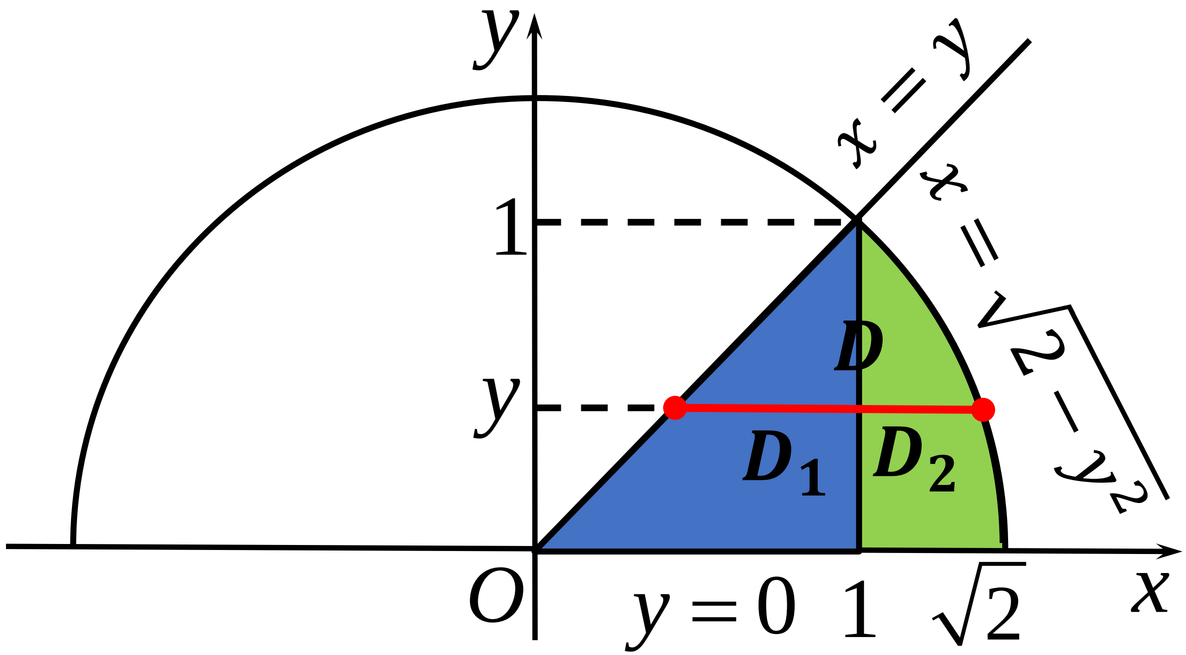
$$D_1 : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le 1 \end{cases} \qquad D_2 : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ 1 \le x \le \sqrt{2 - y^2} \end{cases}$$

Неравенства для области D:

$$D : \begin{cases} 0 \le y \le 1 \\ y \le x \le \sqrt{2 - y^2} \end{cases}$$

Двойной интеграл. Пример 5

Изображаем области D_1 и D_2, а значит и область D – объединение этих областей:



Двойной интеграл. Пример 5

7) Применим теорему 2:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$$

Ответ: $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx.$