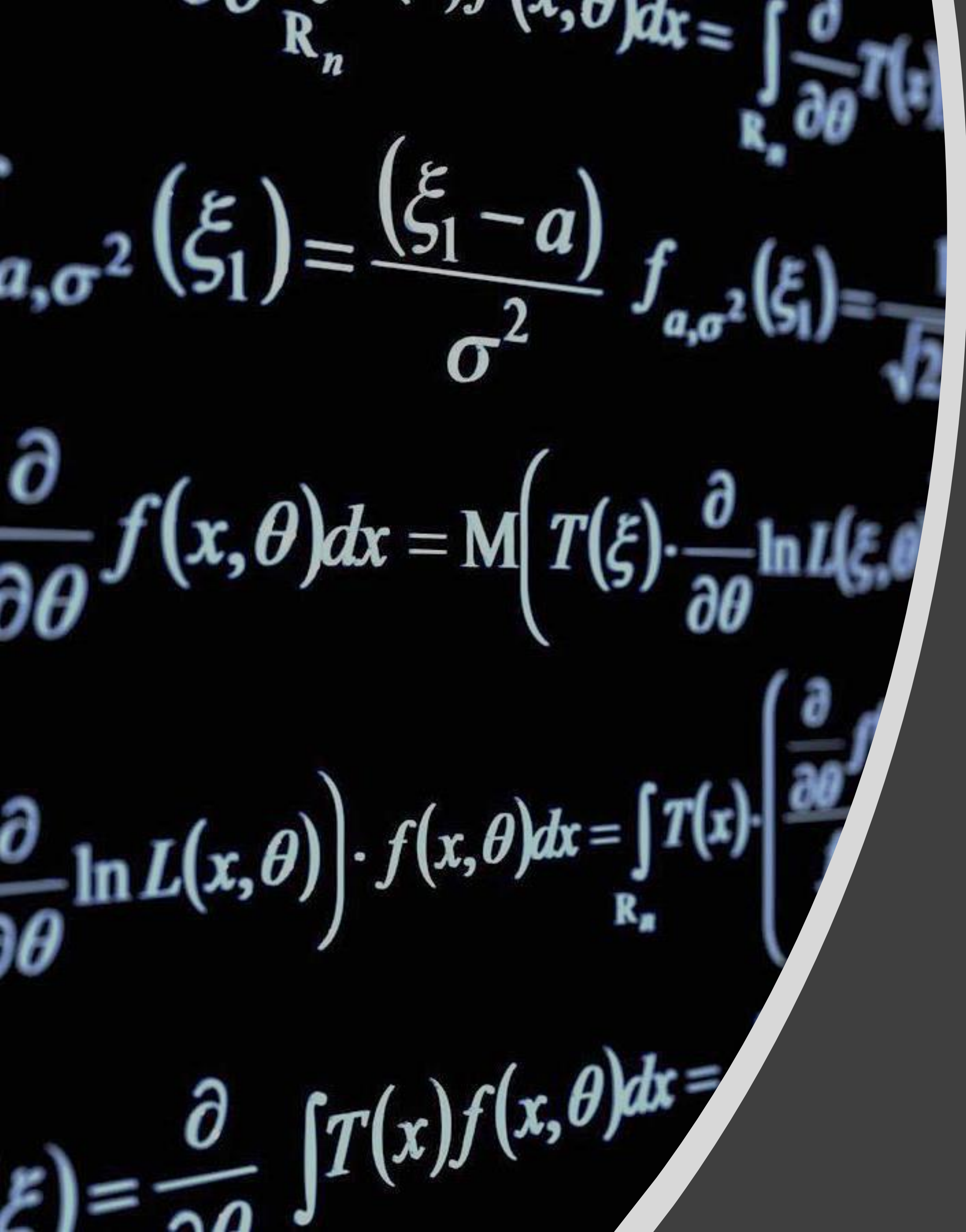


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, II семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 3

Математический анализ

Производная неявной и параметрической функций

Теоремы о среднем

Производные высших порядков

<u>Опр.</u> Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в $O(x_0)$ и функция $f'(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$.

Тогда производная функции $f'(x)$ в точке $x = x_0$ называется второй производной функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, а функция $f(x)$ называется дважды дифференцируемой в точке $x = x_0$.

<u>Обозначение</u>: $f''(x_0) = (f'(x))'|_{x=x_0}$

Производные высших порядков

Опр. Если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в любой точке интервала (a, b), то говорят, что она дважды дифференцируема на (a, b):

$$f''(x) = (f'(x))'$$

Аналогично определяются третья, четвертая производная и т. д., а также трижды, четырежды дифференцируемость и т.д.

Производные высших порядков. Пример 1

Пример 1. Найти $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ для $y = e^{2x}$.

Решение. $y' = (e^{2x})' = 2e^{2x}$,

$$y'' = (2e^{2x})' = 4e^{2x},$$

$$y''' = (4e^{2x})' = 8e^{2x},$$

$$\ldots$$

$$y^{(n)} = 2^n e^{2x}$$

Дифференцирование неявной функции

Опр. Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ определяет неявную функцию $y = y(x)$ на (a, b), т.е. $F(x, y(x)) = 0$ для $x \in (a, b)$.

Предположим, что функция $y = y(x)$ дифференцируема. Тогда её производную можно найти, дифференцируя уравнение $F(x, y) = 0$.

Дифференцирование неявной функции. Пример 2

Пример 2. Найти производную функции, заданную неявно уравнением
$x^2 - 4xy + y^2 + 1 = 0$.

Решение. Продифференцируем по x тождество

$$x^2 - 4xy(x) + y^2(x) + 1 = 0:$$

$$2x - 4(x'y(x) + xy'(x)) + 2y(x)y'(x) = 0 \quad (:2)$$

Дифференцирование неявной функции. Пример 2

$$x - 2(y(x) + xy'(x)) + y(x)y'(x) = 0$$

Заменим $y(x)$ и $y'(x)$ на y и y' соответственно и выразим y' через x и y:

$$x - 2(y + xy') + yy' = 0$$

$$x - 2y - 2xy' + yy' = 0$$

$$x - 2y - y'(2x - y) = 0$$

$$y' = \frac{x-2y}{2x-y}$$

Параметрически заданная функция
Определение

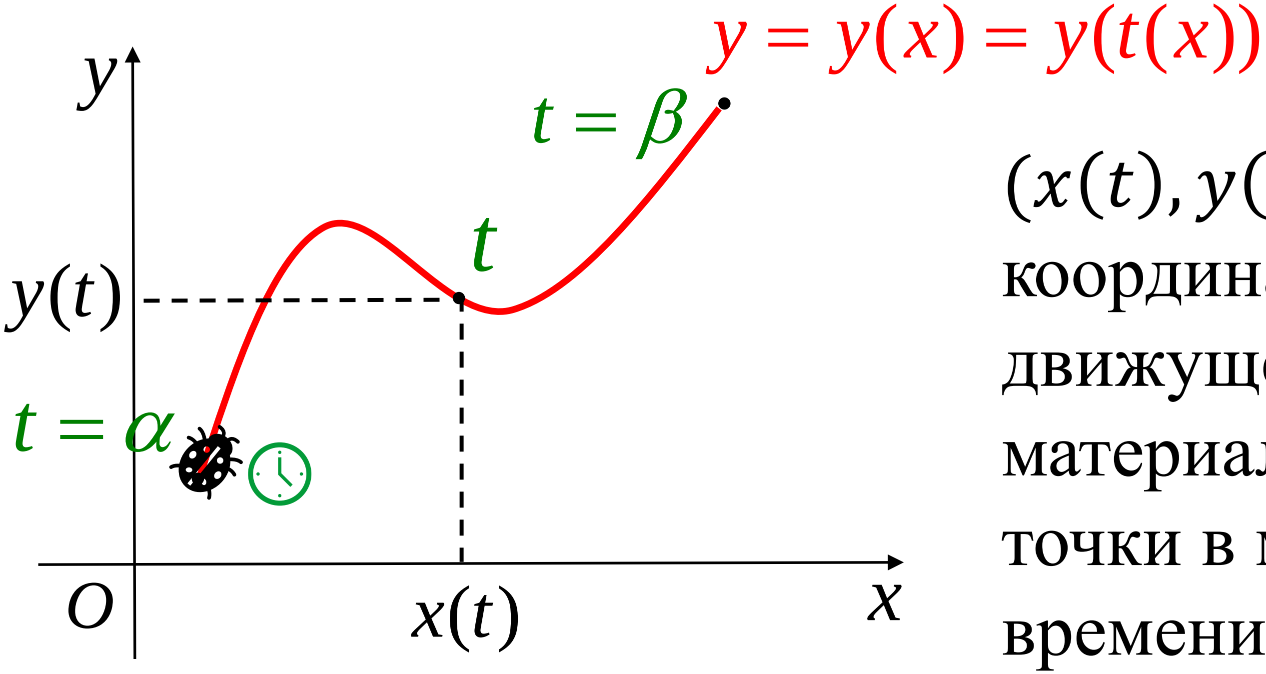
Опр. Функция $y = y(x)$ задана параметрически

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha, \beta]$$

если функция $x = x(t)$ обратима и для обратной функции $t = t(x)$ справедливо тождество

$$y(x) = y\big(t(x)\big)$$

Параметрически заданная функция. Геометрическая интерпретация



$(x(t), y(t))$ – координаты движущейся материальной точки в момент времени t

Дифференцирование параметрически заданной функции

Теорема 1. Производная параметрически заданной функцией задается уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}, \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta]$$

Доказательство. $y'_x = y'(x) = \left[y\big(t(x)\big)\right]' =$

$$= y'\ (t(x))t'(x) = y'(t)\frac{1}{x'(t)} \blacksquare$$

Дифференцирование параметрически заданной функции. Пример 3

Пример 3. Найти уравнение касательной к циклоиде

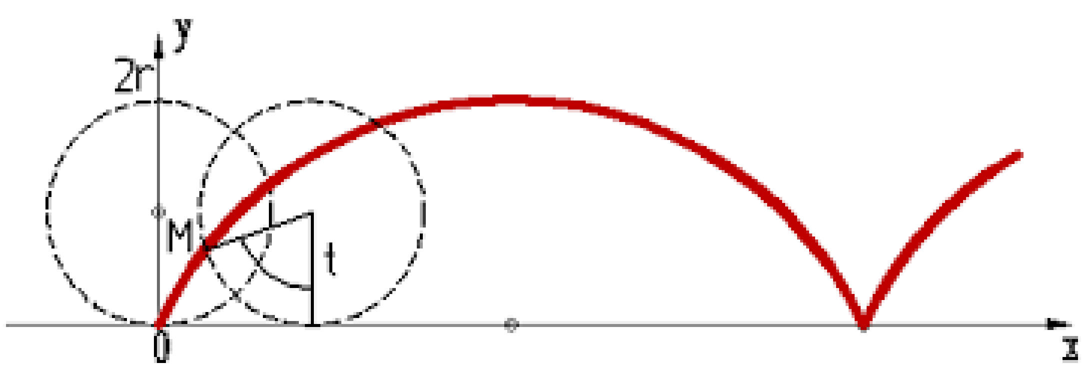
$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [\alpha, \beta],$$

в точке $t = \frac{\pi}{2}$.

Упр. Объяснить, почему грязь попадает на спину велосипедисту, даже если заднее колесо прикрыто щитком.

Дифференцирование параметрически заданной функции. Пример 3

Изображения взяты с [САЙТА]



Курс "Математика", II сем., автор к.ф.-м.н., доцент ИЕНиМ УрФУ Нагребецкая Ю.В.

Дифференцирование параметрически заданной функции. Пример 3

Решение. $x'(t) = [a(t - \sin t)]' = a(1 - \cos t)$

$$y'(t) = [a(1 - \cos t)]' = a\sin t$$

$$y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{a\sin t}{a(1 - \cos t)} = \left[t = \frac{\pi}{2}\right] = 1$$

$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x_0 = a(t - \sin t) = a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

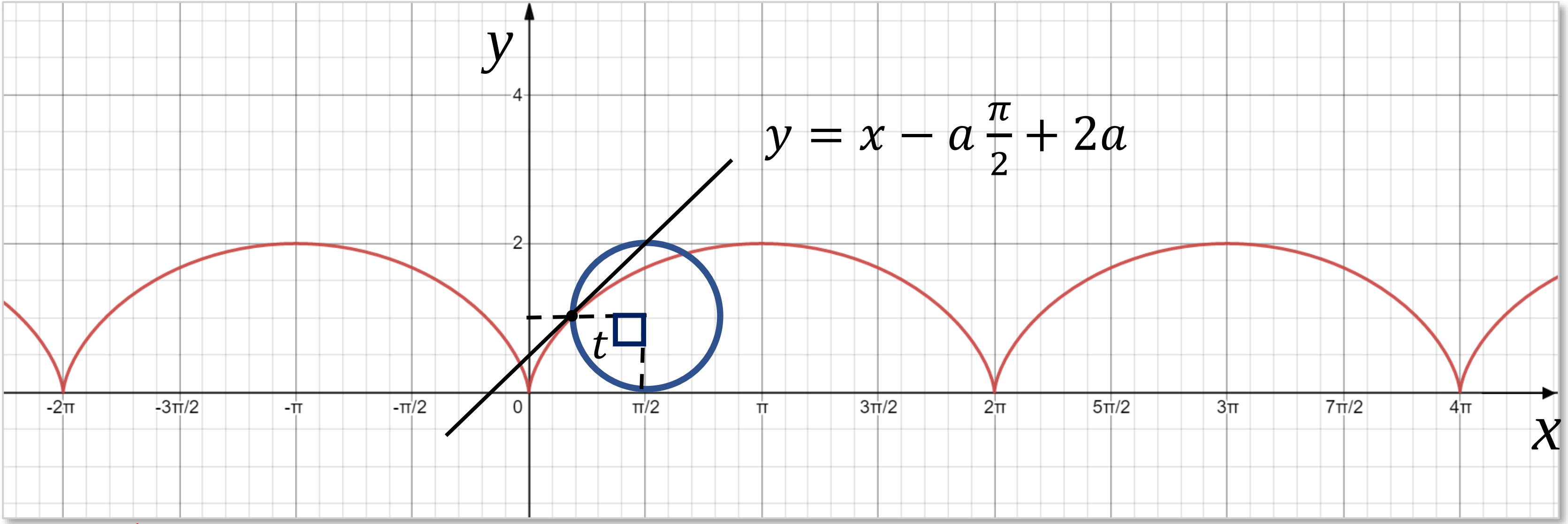
$$y_0 = a(1 - \cos t) = a$$

$$y = x - a\frac{\pi}{2} + 2a$$

$$\Uparrow$$

$$y - y_0 = y'_x(x_0)(x - x_0) \Rightarrow y - a = x - a\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

Дифференцирование параметрически заданной функции. Пример 3



$a = 1$

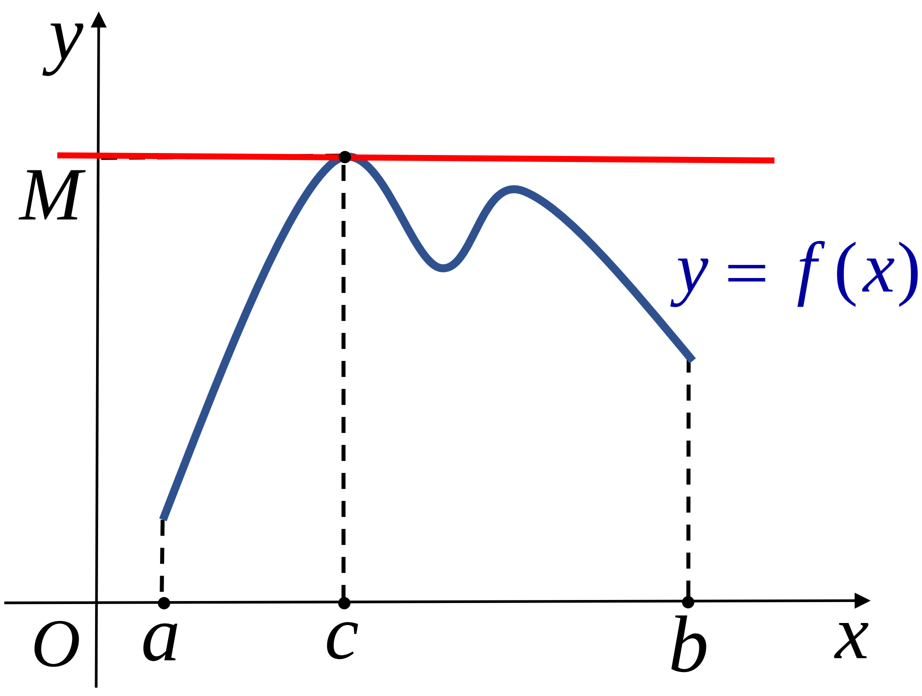
Этот слайд можно не конспектировать

Теорема Ферма

Теорема 2. Пусть наибольшее (наименьшее) значение M (значение m) функции $f(x)$ на промежутке X достигается во внутренней точке $x = c$ этого промежутка.

Тогда если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = c$, то $f'(c) = 0$.

Теорема Ферма. Геометрическая иллюстрация



Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = c$ параллельна оси Ox.

Теорема Ферма. Доказательство

<u>Доказательство.</u> Поскольку $M -$ наибольшее значение функции $f(x)$ на промежутке X, то

$\Delta f = f(x) - f(c) \leq 0$ для любого $x \in X$.

$$\Downarrow$$

Если $\Delta x > 0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \leq 0$

Если $\Delta x < 0$, то $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0 \Rightarrow \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} \geq 0$

Теорема Ферма. Доказательство

$f(x)$ дифференцируема в точке $x = c$

$$\Downarrow$$

существует $f'(c) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f}{\Delta x}$

$\Rightarrow f'(c) \geq 0$ и $f'(c) \leq 0 \Rightarrow f'(c) = 0$ ∎

Для наименьшего значения m функции $f(x)$ на промежутке X – упр.

Наибольшее и наименьшее значение непрерывной функции на отрезке

Пусть функция $f(x)$ непрерывна отрезке $[a, b]$. Тогда по **теореме Вейерштрасса** она достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений.

Из теоремы Ферма следует алгоритм вычисления наиб. и наим. значений непрерывной функции на отрезке.

Алгоритм нахождения наиб. и наим. значения непрерывной функции на отрезке

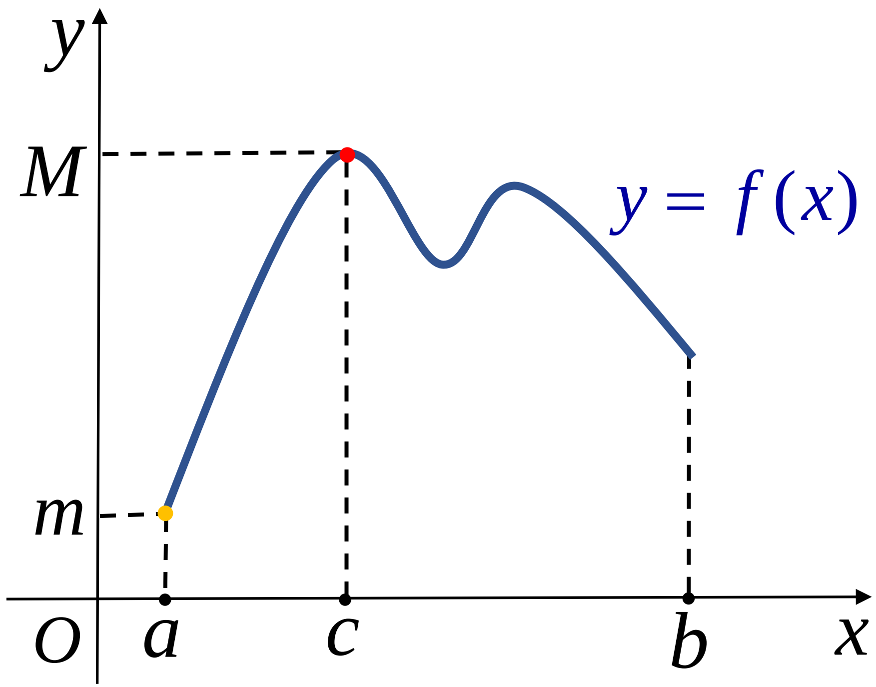
1). Найти критические точки функции, т.е. точки в которых $f'(x) = 0$ или $f'(x)$ не существует.

2). Выбрать среди них внутренние точки, т.е. те, которые лежат на интервале (a, b).

3). Вычислить значения функции в полученных точках и на концах отрезка.

4). Выбрать наибольшее и наименьшее среди найденных значений.

Наиб. и наименьш. значение непрерывной функции на отрезке. Геометрическая иллюстрация



$$M = \text{наиб. } f(x) = f(c)$$

$$m = \text{наим. } f(x) = f(a)$$

Алгоритм нахождения наиб. и наим. значения непрерывной функции на отрезке. Пример 4

Пример 4. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 6$ на отрезке $[-2,2]$. Функция непрерывна на $\mathbb{R}$ (упр.)

Решение. 1). $y' = 6x^2 - 6x - 12 =$

$$= 6(x^2 - x - 2) = 6(x+1)(x-2)$$

$$y' = 6(x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$$

y' существует для любого $x \in \mathbb{R}$

Алгоритм нахождения наиб. и наим. значения непрерывной функции на отрезке. Пример 4

2). $x_1 \in (-2,2)$, $x_2 \notin (-2,2)$.

3). $y(x_1) = y(-1) =$

$$= 2(-1)^3 - 3(-1)^2 - 12(-1) + 6 = 13$$

$$y(-2) = 2(-2)^3 - 3(-2)^2 - 12(-2) + 6 = 2$$

$$y(2) = 2 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 6 = -14$$

4). наиб. $y = 13$ наим. $y = -14$

Алгоритм нахождения наиб. и наим. значения непрерывной функции на отрезке. Пример 5

Пример 5. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x - 3\sqrt[3]{x}$ на отрезке $[-1,1]$.

Решение. 1). $y' = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}$

$$y' = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x^2} = 1 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

y' не существует при $x_3 = 0$

Алгоритм нахождения наиб. и наим. значения непрерывной функции на отрезке. Пример 5

2). $x_{1,2} \notin (-1,1),\ x_3 \in (-1,1)$

3). $y(x_3) = y(0) = 0$

$y(-1) = 2$

$y(1) = -2$

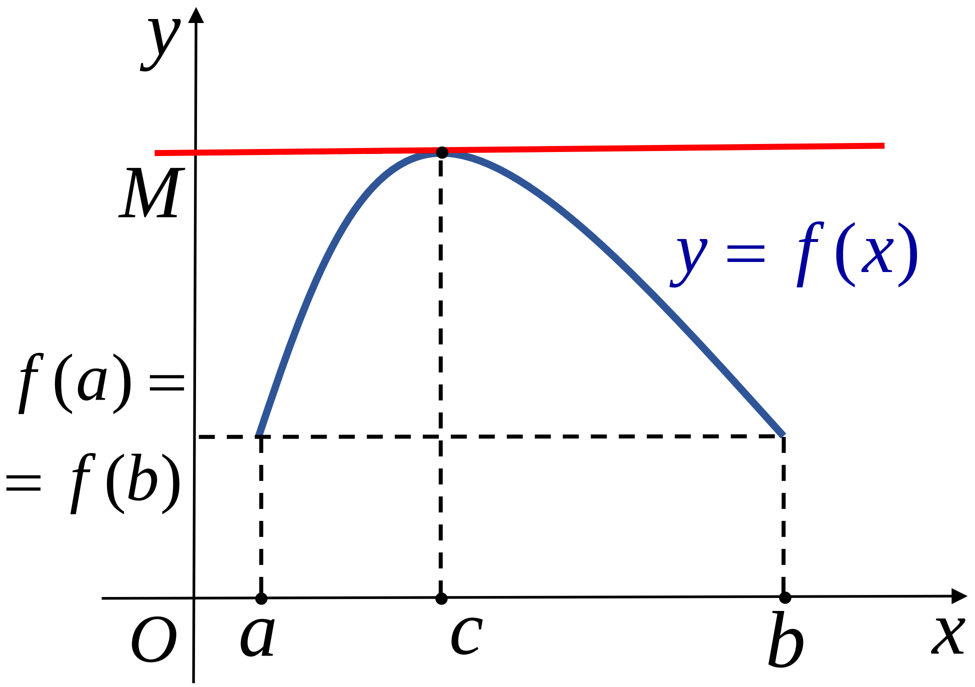
4). наиб. $y = 2$ наим. $y = -2$

Теорема Ролля

Теорема 3. Пусть для непрерывной на $[a, b]$ и дифференцируемой на (a, b) функции $f(x)$ справедиво равенство $f(a) = f(b)$.

Тогда существует такая точка с $\in (a, b)$, что $f'(c) = 0$.

Теорема Ролля. Геометрическая иллюстрация



Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = c$ параллельна оси Ox.

Теорема Ролля. Доказательство

Доказательство. Возможны 2 случая.

1 случай. Если $M = m = f(a) = f(b)$, то $f(x) = \text{const}$ (упр.)

2 случай. Пусть $M = f(c)$ или $m = f(c)$ для внутренней точки $c \in (a, b)$ промежутка $X = [a, b]$. Тогда по теореме Ферма $f'(c) = 0$. ∎

Теорема Лагранжа

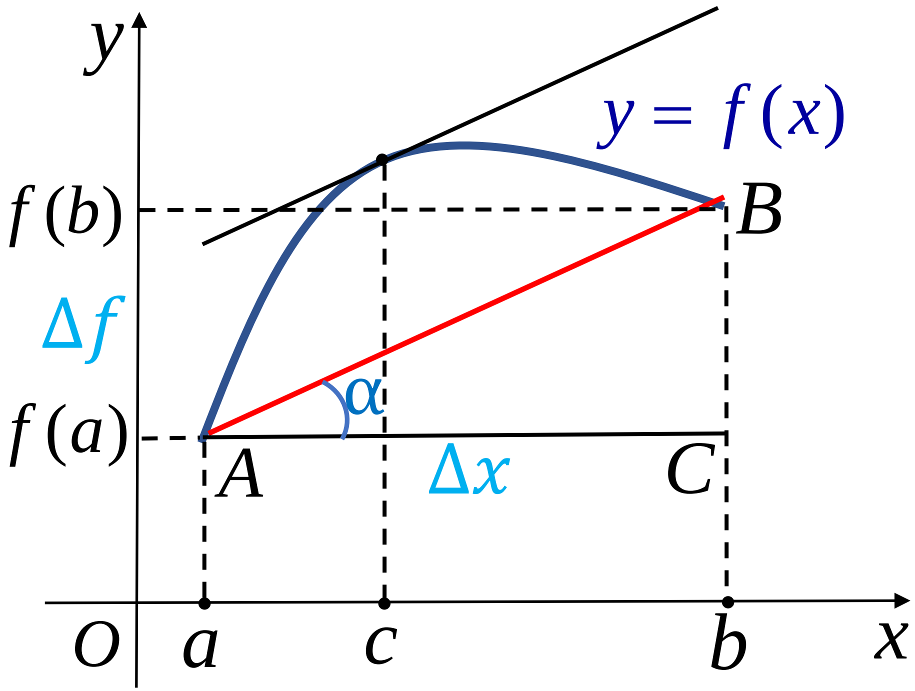
Теорема 4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b).

Тогда существует $c \in (a,b)$ такая, что справедливо равенство

$$\boxed{f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)} \quad \boxed{\Delta f = f'(c)\Delta x}$$

Без доказательства.

Теорема Лагранжа. Геометрическая иллюстрация



Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = c$ параллельна секущей AB.

$$k_{\text{сек.}AB} = \operatorname{tg}\alpha$$

$$k_{\text{сек.}AB} = \frac{BC}{AC} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) = k_{\text{касательн.}}$$

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ в точке x_0

Теорема 5. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ – дифференцируемы в $O(x_0)$ и пусть $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в $\breve{O}(x_0)$.

Тогда если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Без док-ва.

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ в точке. Пример 6

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+6}-3}{2x^2+4x-30}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{2x^2+4x-30}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)'}{(2x^2+4x-30)'}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+6}}(x+6)'}{4x+4}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+6}}}{4x+4}=\left[\frac{\frac{1}{2\sqrt{3+6}}}{4\cdot 3+4}\right]=\mathbf{\frac{1}{96}}$$

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ в точке x_0

Теорема 6. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ – дифференцируемы в $O(x_0)$ и пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$,
$g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в $\breve{O}(x_0)$.

Тогда если существует $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g\,(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Без док-ва.

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ в точке x_0. Пример 7

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ в точке x_0. Пример 8

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

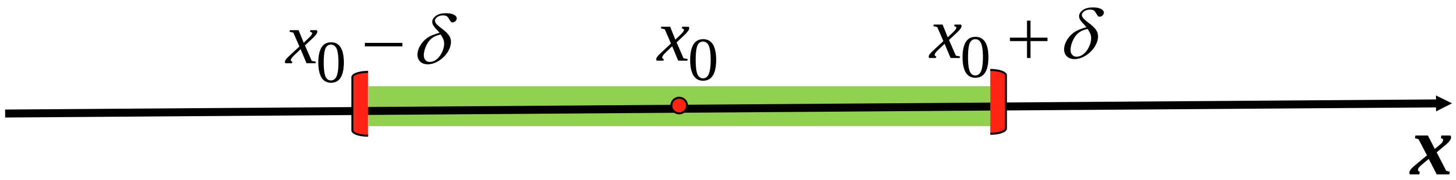
Решение.

$$\lim_{x\to 0} x^x = [0^0] = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\ln x} =$$

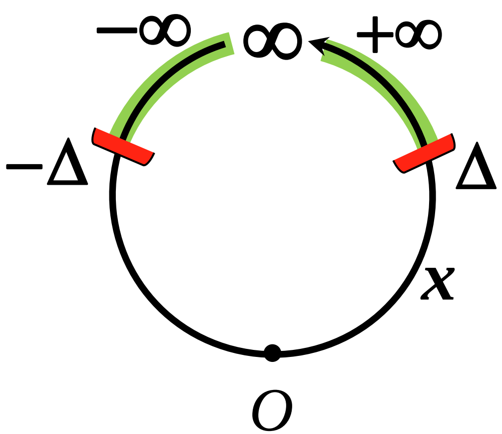
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

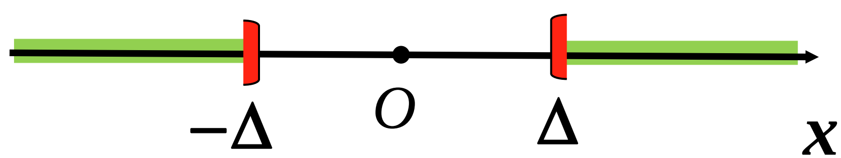
Определение $O_\Delta(\infty)$

<u>Повторение.</u> $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



<u>Опр.</u> $O_\Delta(\infty) = (-\infty; -\Delta) \cup (\Delta; \infty)$





Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ в ∞.

<u>Теорема 7.</u> Пусть функции $f(x), g(x)$ – дифференцируемы в $O_\Delta(\infty) = (-\infty; -\Delta) \cup (\Delta; \infty;)$ и пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в $O_\Delta(\infty)$.

Тогда если существует $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

<u>Без док-ва.</u>

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ в ∞.

<u>Теорема 8.</u> Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ – дифференцируемы в $O_\Delta(\infty) = (-\infty; -\Delta) \cup (\Delta; \infty;)$ и пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$,
$g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в $O_\Delta(\infty)$.

Тогда если существует $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

<u>Без док-ва.</u>

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ в ∞. Пример 9

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{e^x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = \left[\frac{\mathbf{2}}{\infty}\right] = 0$$