Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

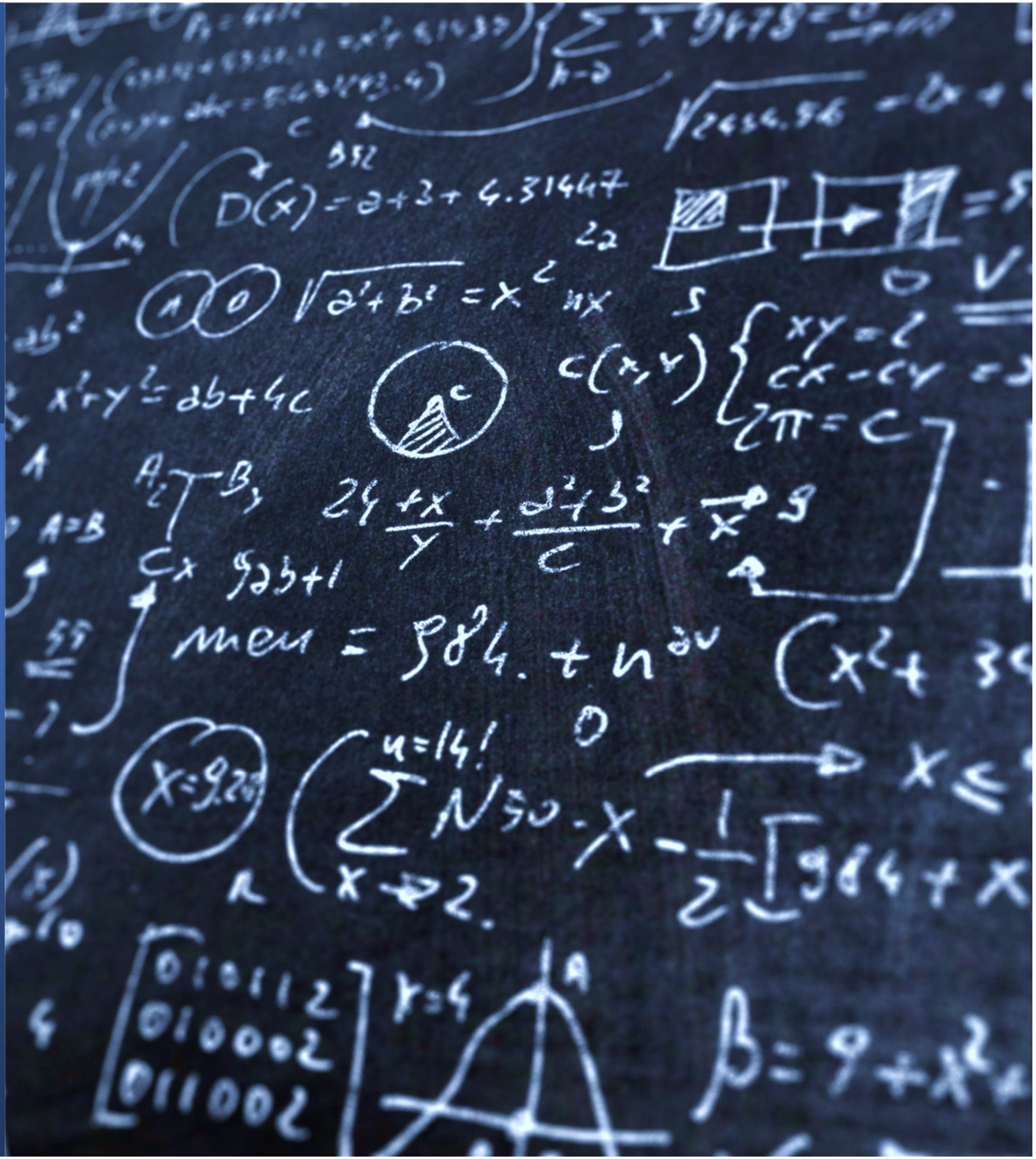
к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 3 Векторная алгебра Скалярное, векторное, смешанное произведения

Презентации сделана на основе лекций

к.ф.-м.н., доцента Щербаковой В.А.



Глава 1. Векторная алгебра

§1. Скалярное произведение

Опр. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное $|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}\right)$.

(произведение модулей векторов на косинус угла между ними)

Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b},\ (\vec{a}, \vec{b})$.

§1. Скалярное произведение

Опр. Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется $\vec{a}^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$.

Замечание: Из определений следует, что

(1) $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, т. е. $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$;

(2) $\cos\left(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}\right) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$;

(3) $\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$;

(4) $\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$ – острый, если $\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ и

$\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$ – тупой, если $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$

§1. Скалярное произведение

Свойства скалярного произведения.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$

2) Коммутативность: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}.$

3) Дистрибутивность скалярного произведения относительно сложения векторов:

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}.$$

4) Однородность:

$$(m\cdot\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(m\cdot\vec{b}) = m\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

§1. Скалярное произведение

<u>Доказательство</u>.

1) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = |\vec{b}||\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = |\vec{b}|\cdot \text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$

$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = |\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}.$

(по свойству (1) проекции вектора, см. лекц.1,2)

2) $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}) = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{b}\vec{a}}) = \vec{b}\cdot\vec{a}.$

3) $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\cdot(\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} + \text{пр}_{\vec{a}}\vec{c})$

$= |\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} + |\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$

(по свойству (2) проекции вектора)

§1. Скалярное произведение

$$4)\ \vec{a}\cdot(m\cdot\vec{b})=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}(m\cdot\vec{b})=|\vec{a}|\cdot m\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=$$

$$=m\cdot|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=m\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$$

(по свойству (1) проекции вектора
и по свойству (1) скалярного произведения)

$$(m\cdot\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot(m\cdot\vec{a})=\ldots \text{ далее самост.} \blacksquare$$

§1. Скалярное произведение

<u>Теорема</u>. Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в ОНБ $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$.

<u>Доказательство</u>: из свойств скалярного произведения

$$\vec{a} = x_1 \cdot \vec{\imath} + y_1 \cdot \vec{\jmath} + z_1 \cdot \vec{k};\ \vec{b} = x_2 \cdot \vec{\imath} + y_2 \cdot \vec{\jmath} + z_2 \cdot \vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(x_1 \cdot \vec{\imath} + y_1 \cdot \vec{\jmath} + z_1 \cdot \vec{k}\right) \cdot \left(x_2 \cdot \vec{\imath} + y_2 \cdot \vec{\jmath} + z_2 \cdot \vec{k}\right)$$

$$= x_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{\imath} \cdot \vec{\imath}) + x_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath}) + x_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{\imath} \cdot \vec{k}) +$$

$$+ y_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{\jmath} \cdot \vec{\imath}) + y_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath}) + y_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{\jmath} \cdot \vec{k}) +$$

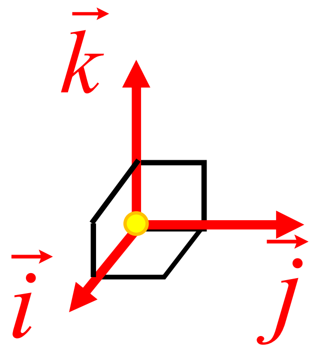
$$+ z_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{k} \cdot \vec{\imath}) + z_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{k} \cdot \vec{\jmath}) + z_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{k} \cdot \vec{k}) =$$

§1. Скалярное произведение

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = |\vec{i}|\cdot|\vec{i}|\cdot\cos 0 = 1$$

$$\vec{j}\cdot\vec{j} = |\vec{j}|\cdot|\vec{j}|\cdot\cos 0 = 1$$

$$\vec{k}\cdot\vec{k} = \left|\vec{k}\right|\cdot\left|\vec{k}\right|\cdot\cos 0 = 1$$



$$\vec{i}\cdot\vec{j} = |\vec{i}|\cdot|\vec{j}|\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{k} = |\vec{i}|\cdot\left|\vec{k}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\vec{j}\cdot\vec{k} = |\vec{j}|\cdot\left|\vec{k}\right|\cdot\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

Следовательно,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot x_2\cdot 1 + y_1\cdot y_2\cdot 1 + z_1\cdot z_2\cdot 1 =$$
$$= x_1\cdot x_2 + y_1\cdot y_2 + z_1\cdot z_2. \blacksquare$$

§1. Скалярное произведение

Следствие. Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в ОНБ $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, то

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{{x_1}^2 + {y_1}^2 + {z_1}^2}}$$

$$\boxed{\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}}$$

§1. Скалярное произведение

$$\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$$

§1. Скалярное произведение

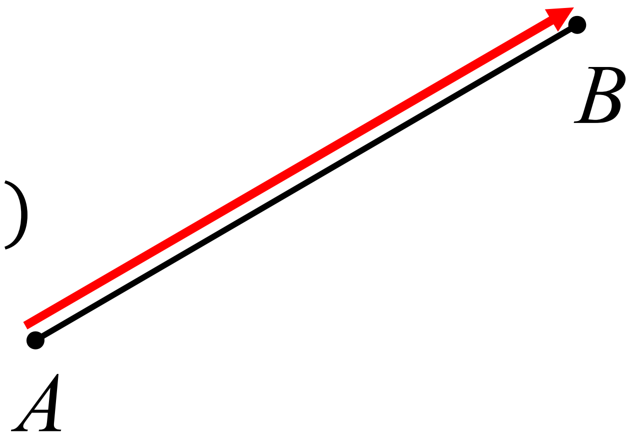
Следствие. Если $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ в ОНБ $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, то

$$\boxed{|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Доказательство.

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

$$\boxed{|AB| = \left|\overrightarrow{AB}\right|}\ \blacksquare$$



§1. Скалярное произведение

Упр. Написать формулы для скалярного произведения векторов, длины вектора и косинуса угла между векторами, если они даны своими координатами в ОНБ $(\vec{i}, \vec{j})$ на плоскости.

§1. Скалярное произведение

<u>Пример 1</u>. Пусть $\vec{a} = (-1,1,0)$, $\vec{b} = (2,1,1)$ в $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Найти $\widehat{\vec{a}\vec{b}}$.

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{(-1)\cdot 2 + 1\cdot 1 + 0\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2}\cdot\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$\cos\left(\widehat{\vec{a}\vec{b}}\right) = \frac{-1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{12}}$$

$$\widehat{\vec{a}\vec{b}} = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{12}}\right) = \pi - \arccos\frac{1}{\sqrt{12}}$$

§1. Скалярное произведение

<u>Пример 2</u>. Пусть $\vec{a} = (-1{,}1), \vec{b} = (2{,}1)$ в базисе $\left(\vec{c}, \vec{d}\right)$, где $|\vec{c}| = 1, \left|\vec{d}\right| = 2, \widehat{\vec{c}\vec{d}} = \frac{\pi}{3}$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$.

<u>Решение</u>. Поскольку координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы не ОНБ, то нельзя пользоваться формулами со слайдов 8,9.

Воспользуемся формулой $\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}$

и свойствами скалярного произведения (слайд ◀)

§1. Скалярное произведение

$$\vec{a} = (-1{,}1) = -\vec{c} + \vec{d},\ \vec{b} = (2{,}1) = 2\vec{c} + \vec{d}\ \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(-\vec{c} + \vec{d}\right) \cdot \left(2\vec{c} + \vec{d}\right) =$$

$$= (-\vec{c}) \cdot (2\vec{c}) + \vec{d} \cdot (2\vec{c}) + (-\vec{c}) \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{d} =$$

$$= -2\vec{c}^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{d} - \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{d}^2 = -2\vec{c}^2 + \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{d}^2$$

$$\vec{b}^2 = (2\vec{c} + \vec{d})^2 = (2\vec{c})^2 + 2(2\vec{c})\vec{d} + \vec{d}^2 =$$

$$= 4\vec{c}^2 + 4\vec{c}\vec{d} + \vec{d}^2$$

§1. Скалярное произведение

Найдем $\vec{c}\cdot\vec{d}$, $\vec{c}^{\,2}$, $\vec{d}^{\,2}$.

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=|\vec{c}|\cdot\left|\vec{d}\right|\cdot\cos(\widehat{\vec{c}\vec{d}})\ =1\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=1\cdot 2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$\vec{c}^{\,2}=|\vec{c}|^2=1^2=1 \qquad \vec{d}^{\,2}=|\vec{d}|^2=2^2=4$$

Подставим $\vec{c}\cdot\vec{d}$, $\vec{c}^{\,2}$, $\vec{d}^{\,2}$ в $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}^{\,2}$: Тогда

$$\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}=\frac{\mathbf{3}}{\sqrt{\mathbf{12}}}=\frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{2}}$$

§1. Скалярное произведение

$$\vec{a} = (-1,1) = -\vec{c} + \vec{d},\ \vec{b} = (2,1) = 2\vec{c} + \vec{d}\ \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(-\vec{c} + \vec{d}\right) \cdot \left(2\vec{c} + \vec{d}\right) =$$

$$= (-\vec{c}) \cdot (2\vec{c}) + \vec{d} \cdot (2\vec{c}) + (-\vec{c}) \cdot \vec{d} + \vec{d} \cdot \vec{d} =$$

$$= -2\vec{c}^2 + 2\vec{c} \cdot \vec{d} - \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{d}^2 = -2\vec{c}^2 + \vec{c} \cdot \vec{d} + \vec{d}^2$$

$$\boxed{= -2 \cdot 1 + 1 + 4 = 3}$$

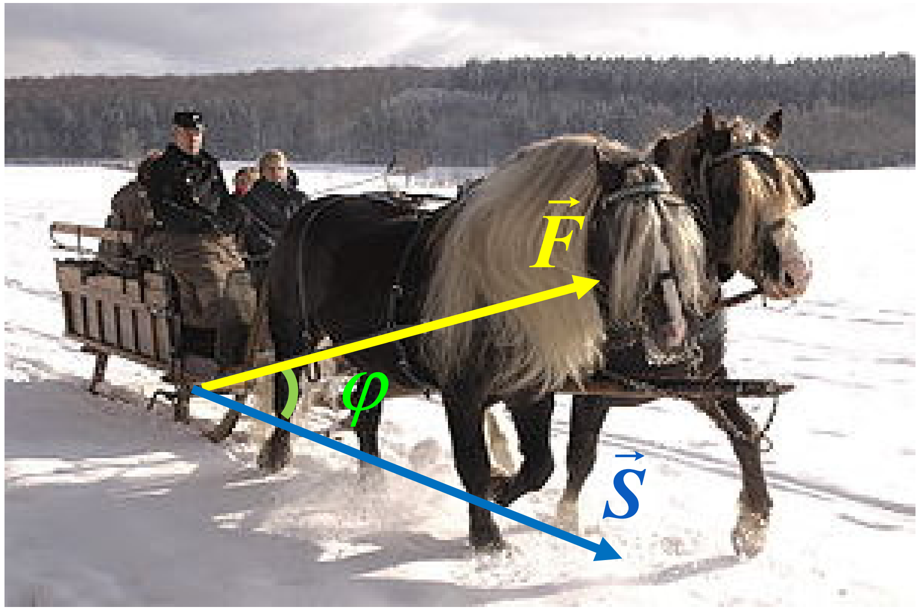
$$\vec{b}^2 = (2\vec{c} + \vec{d})^2 = (2\vec{c})^2 + 2(2\vec{c})\vec{d} + \vec{d}^2 =$$

$$= 4\vec{c}^2 + 4\vec{c}\vec{d} + \vec{d}^2 =$$

$$\boxed{= 4 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 4 = \mathbf{12}} \Rightarrow \left|\vec{b}\right| = \sqrt{\vec{b}^2} = \sqrt{\mathbf{12}}$$

§1. Скалярное произведение

Физический смысл скалярного произведения: работа постоянной силы по перемещению тела.

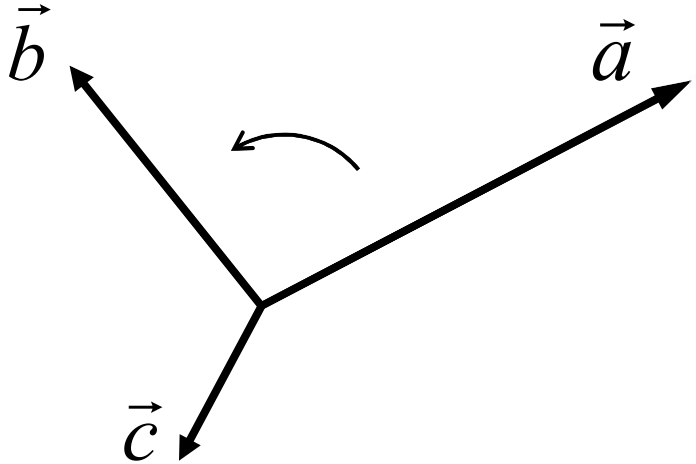


$$A = F \cdot S \cdot \cos\varphi =$$

$$= \left|\vec{F}\right| \cdot \left|\vec{S}\right| \cdot \cos\widehat{\vec{F}\vec{S}} = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

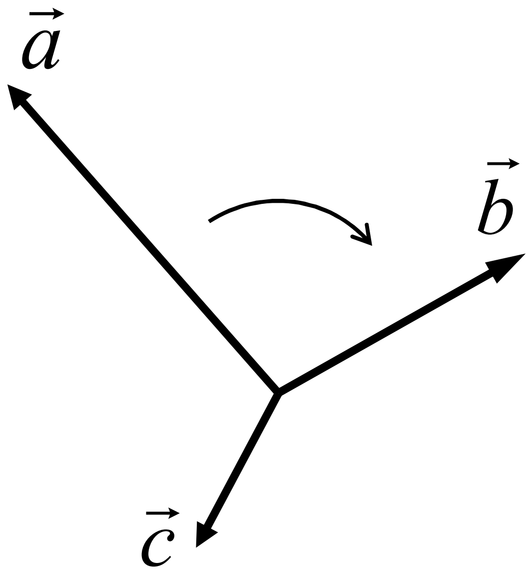
§1. Векторное произведение

<u>Опр</u>. Упорядоченная тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ называется правой, если переход от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ по наименьшему углу видится **против часовой стрелки**, когда векторы отложены от одной точки, и наблюдение ведется с конца вектора $\vec{c}$.



§1. Векторное произведение

<u>Опр</u>. Упорядоченная тройка векторов $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ называется левой в противном случае (т.е. переход от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ с конца вектора $\vec{c}$ видится **по часовой стрелке**).

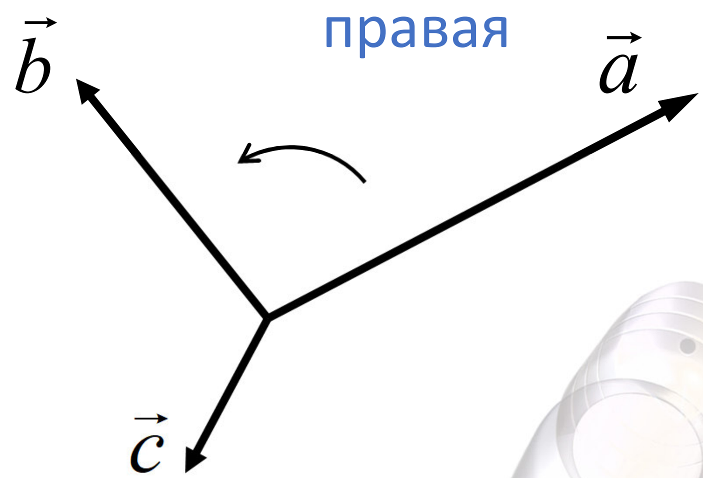


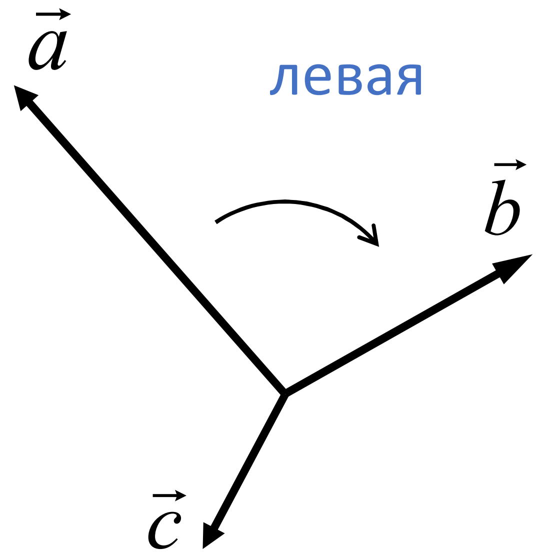
§1. Векторное произведение

Замечание. Для определения того, является ли тройка правой или левой, можно пользоваться **«правилом буравчика»** или **«правилом отвинчивающейся крышки»**.

Если $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ – правая, то при переходе от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ по наименьшему углу направление вектора $\vec{c}$ *согласовано* с движением буравчика или крышки, а если левая, то нет.

§1. Векторное произведение





§1. Векторное произведение

<u>Опр.</u> Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$ такой, что:

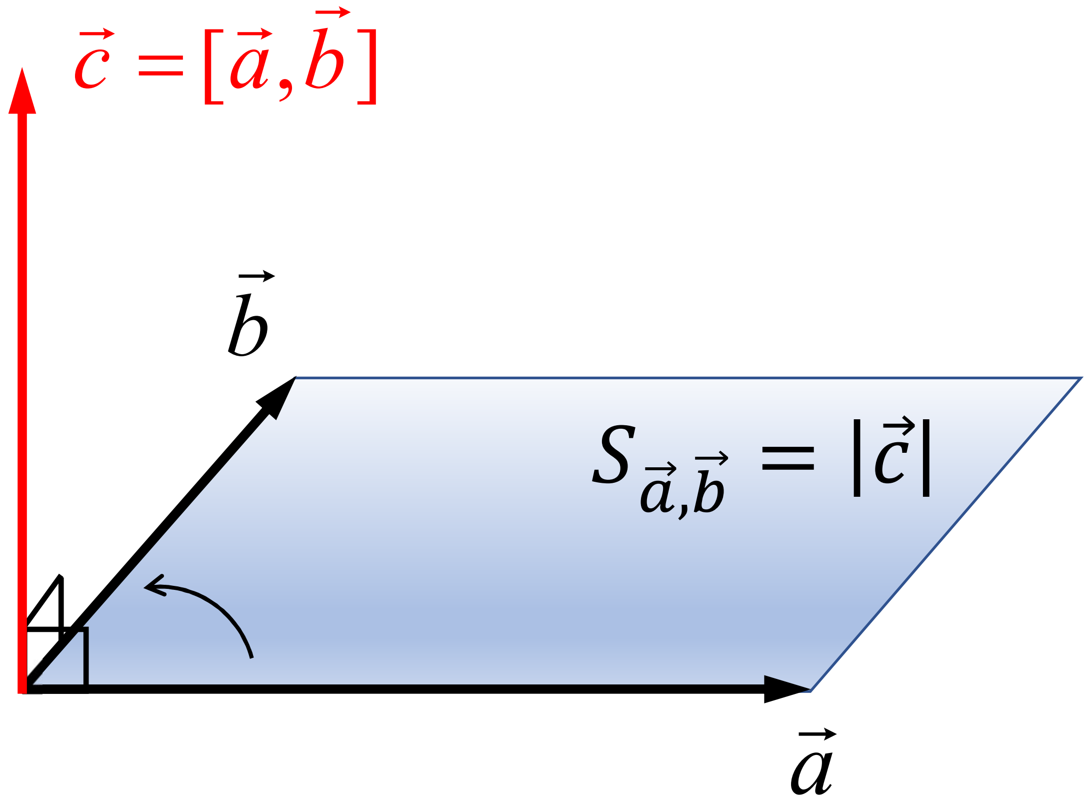
1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}) = S_{\vec{a},\vec{b}}$;

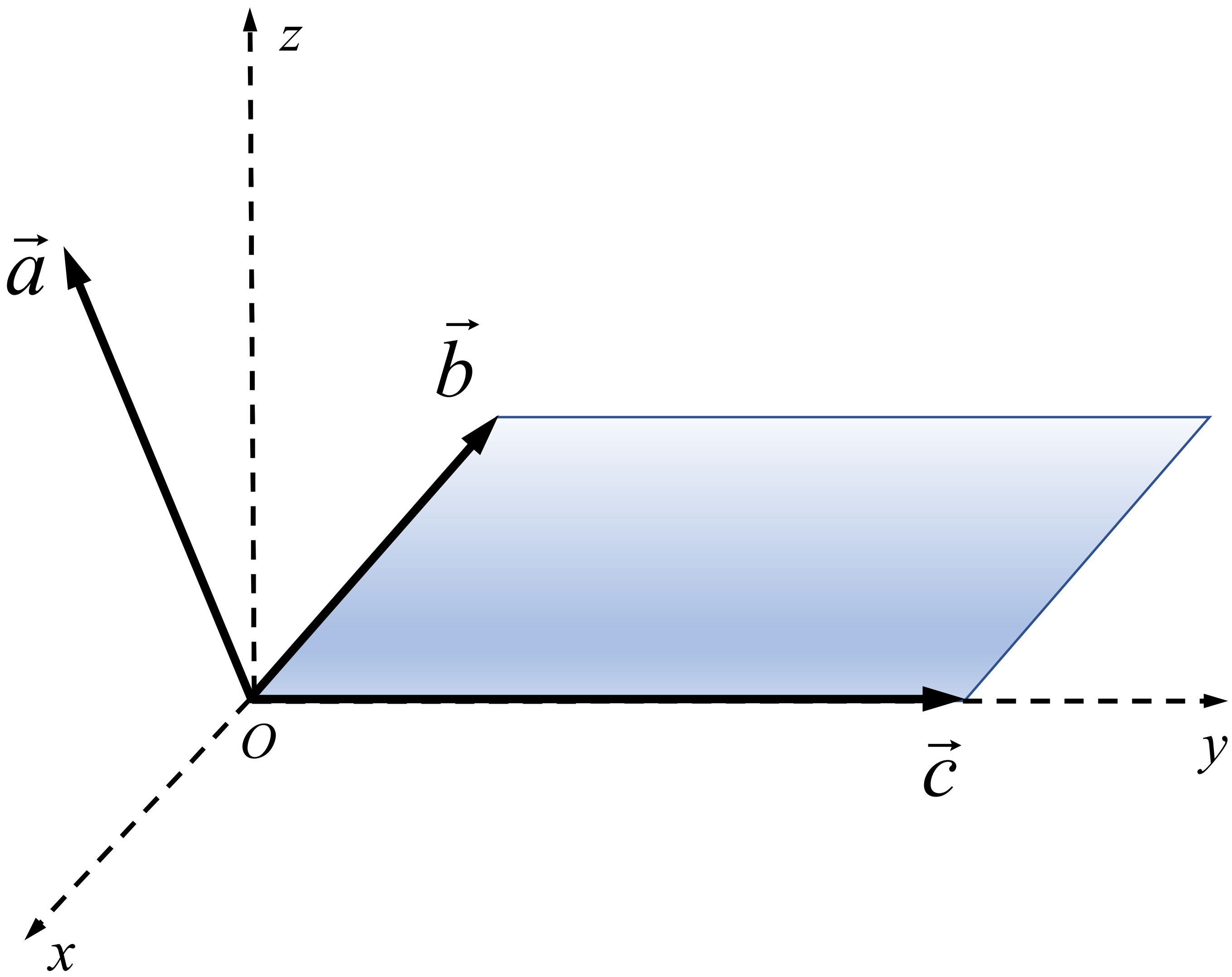
2) $\vec{c} \perp \vec{a}, \quad \vec{c} \perp \vec{b},$
т.е. $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;

3) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ правая.

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$, $[\vec{a}, \vec{b}]$.

§1. Векторное произведение





z
$\vec{a}$
$\vec{b}$
O
$\vec{c}$
y
x

§1. Векторное произведение

Свойства векторного произведения

1. Антикоммутативность: $\vec{a} \times \vec{b} = -\,\vec{b} \times \vec{a}$.

2. Дистрибутивность относительно сложения:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c};$$

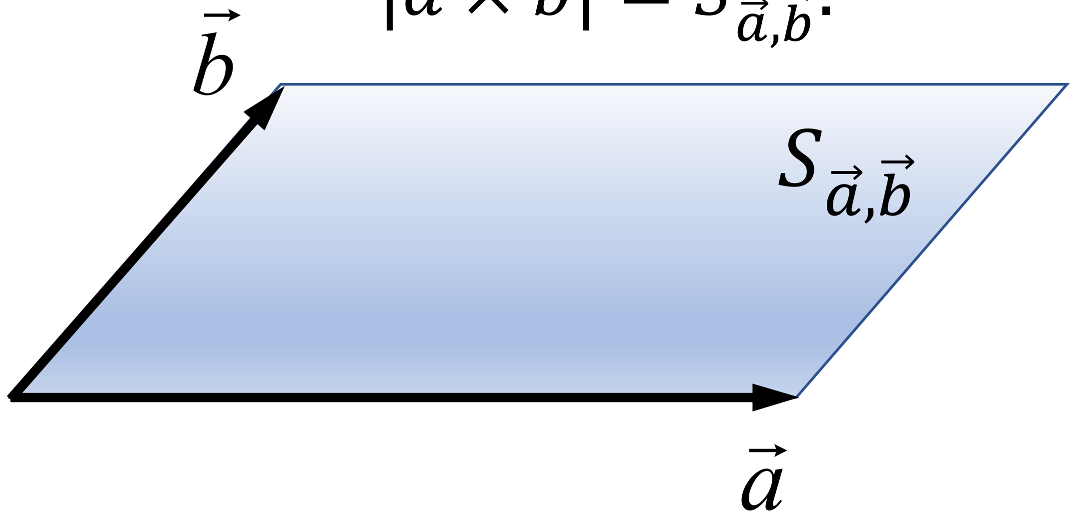
3. Однородность:

$$(m \cdot \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (m \cdot \vec{b}) = m \cdot (\vec{a} \times \vec{b}).$$

§1. Векторное произведение

4. Длина векторного произведения равна площади параллелограмма, построенного на $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = S_{\vec{a},\vec{b}}.$$

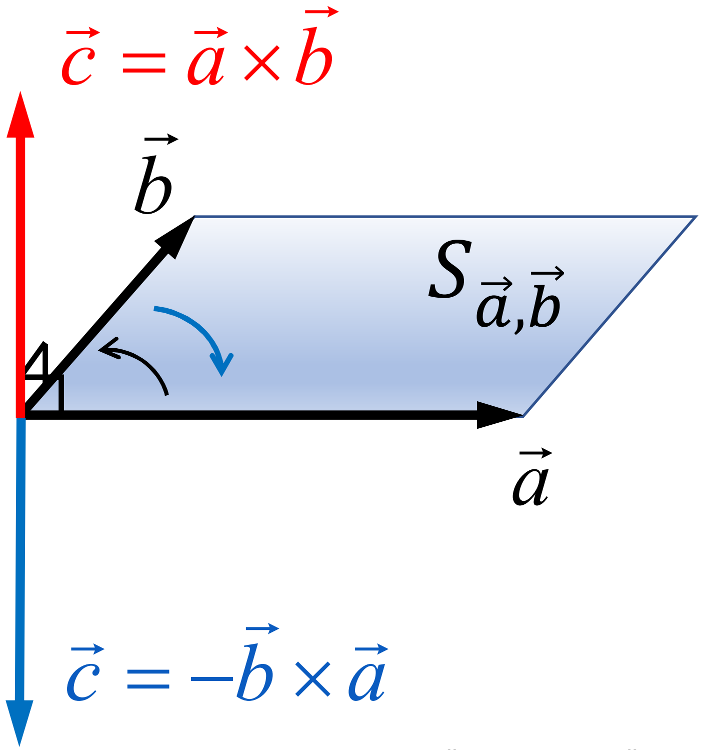


5. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

§1. Векторное произведение

<u>Доказательство</u>

1) Надо доказать: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.



2), 3) без док-ва;

4) очевидно.

§1. Векторное произведение

<u>Доказательство</u>

5) $\vec{a}||\vec{b} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \begin{cases} |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin 0^0, \text{ если } \vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}, \\ |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\sin 180^0, \text{ если } \vec{a}\uparrow\downarrow\vec{b} \end{cases} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0} \quad \blacksquare$$

§1. Векторное произведение

<u>Теорема</u>. Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ в ОНБ $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, то

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\text{или } \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

§1. Векторное произведение

Доказательство.

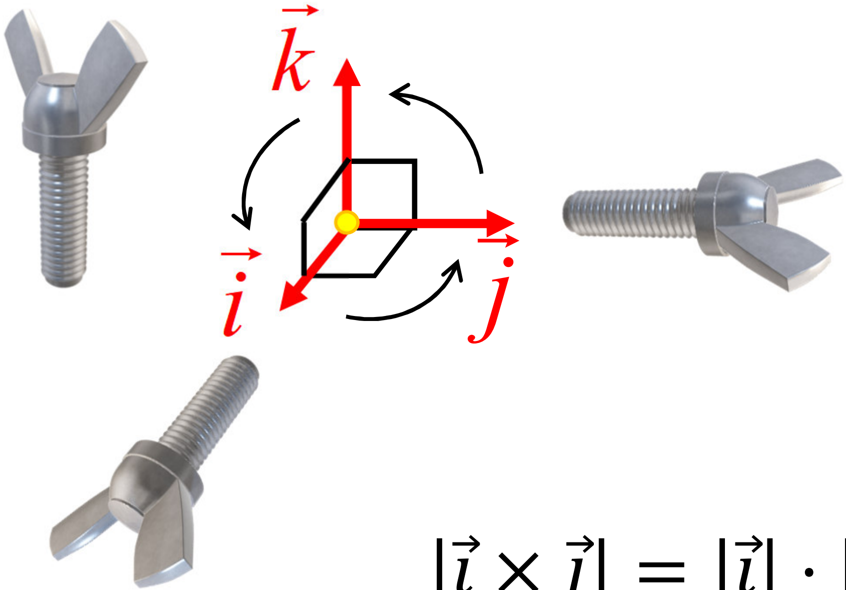
$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_1 \cdot \vec{i} + y_1 \cdot \vec{j} + z_1 \cdot \vec{k}) \times (x_2 \cdot \vec{i} + y_2 \cdot \vec{j} + z_2 \cdot \vec{k}) =$$

$$= x_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{i} \times \vec{i}) + x_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{i} \times \vec{j}) + x_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{i} \times \vec{k}) +$$

$$+ y_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{j} \times \vec{i}) + y_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{j} \times \vec{j}) + y_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{j} \times \vec{k}) +$$

$$+ z_1 \cdot x_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{i}) + z_1 \cdot y_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{j}) + z_1 \cdot z_2 \cdot (\vec{k} \times \vec{k}) =$$

§1. Векторное произведение



$$\vec{i} \,||\, \vec{i} \Rightarrow \quad \vec{i} \times \vec{i} = \vec{o}$$

Аналогично,

$$\vec{j} \times \vec{j} = \vec{o},$$

$$\vec{k} \times \vec{k} = \vec{o}.$$

$$|\vec{i} \times \vec{j}| = |\vec{i}| \cdot |\vec{j}| \sin\left(\widehat{\vec{i}\vec{j}}\right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \Rightarrow \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k};$$

$$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \Rightarrow \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i};$$

$$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \Rightarrow \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}.$$

§1. Векторное произведение

Доказательство.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k})\times(x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k})=$$

$$=x_1\cdot x_2\cdot\underbrace{(\vec{i}\times\vec{i})}_{\vec{o}}+x_1\cdot y_2\cdot(\vec{i}\times\vec{j})+x_1\cdot z_2\cdot(\vec{i}\times\vec{k})+$$

$$+y_1\cdot x_2\cdot(\vec{j}\times\vec{i})+y_1\cdot y_2\cdot\underbrace{(\vec{j}\times\vec{j})}_{\vec{o}}+y_1\cdot z_2\cdot(\vec{j}\times\vec{k})+$$

$$+z_1\cdot x_2\cdot(\vec{k}\times\vec{i})+z_1\cdot y_2\cdot(\vec{k}\times\vec{j})+z_1\cdot z_2\cdot\underbrace{(\vec{k}\times\vec{k})}_{\vec{o}}=$$

§1. Векторное произведение

<u>Доказательство</u>.

$$\vec{a}\times\vec{b}=(x_1\cdot\vec{i}+y_1\cdot\vec{j}+z_1\cdot\vec{k})\times(x_2\cdot\vec{i}+y_2\cdot\vec{j}+z_2\cdot\vec{k})=$$

$$=x_1\cdot x_2\cdot\overset{\vec{o}}{\cancel{(\vec{i}\times\vec{i})}}+x_1\cdot y_2\cdot\overset{\vec{k}}{\cancel{(\vec{i}\times\vec{j})}}-x_1\cdot z_2\cdot\overset{\vec{j}}{\cancel{(\vec{k}\times\vec{i})}}+$$

$$-y_1\cdot x_2\cdot\overset{\vec{k}}{\cancel{(\vec{i}\times\vec{j})}}+y_1\cdot y_2\cdot\overset{\vec{o}}{\cancel{(\vec{j}\times\vec{j})}}+y_1\cdot z_2\cdot\overset{\vec{i}}{\cancel{(\vec{j}\times\vec{k})}}+$$

$$+z_1\cdot x_2\cdot\overset{\vec{j}}{\cancel{(\vec{k}\times\vec{i})}}-z_1\cdot y_2\cdot\overset{\vec{i}}{\cancel{(\vec{j}\times\vec{k})}}+z_1\cdot z_2\cdot\overset{\vec{o}}{\cancel{(\vec{k}\times\vec{k})}}=$$

§1. Векторное произведение

Доказательство.

$$\vec{a}\times\vec{b} = x_1\cdot y_2\cdot\vec{k} - x_1\cdot z_2\cdot\vec{j} - y_1\cdot x_2\cdot\vec{k} + y_1\cdot z_2\cdot\vec{i} + $$

$$+z_1\cdot x_2\cdot\vec{j} - z_1\cdot y_2\cdot\vec{i} =$$

$$=\left(y_1\cdot z_2 - z_1\cdot y_2\right)\cdot\vec{i} - \left(x_1\cdot z_2 - z_1\cdot x_2\right)\cdot\vec{j} +$$

$$+\left(x_1\cdot y_2 - y_1\cdot x_2\right)\cdot\vec{k} \Rightarrow$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right)$$

§2. Векторное произведение

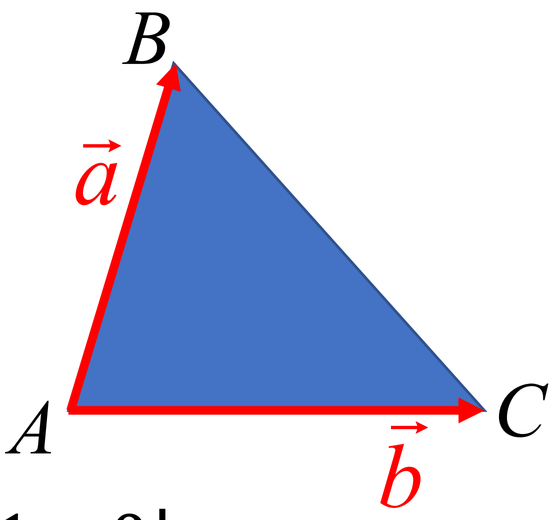
<u>Пример 3</u>. Пусть $A(-1,1,0)$, $B(-2,1,-1)$, $C(3,1,0)$ в $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Найти площадь ΔABC.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2,1,-1) - (-1,1,0) =$$
$$= (-1,0,-1),$$

$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (3,1,0) - (-1,1,0) =$$
$$= (4,0,0),$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}|$$

§2. Векторное произведение



$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i} \cdot 0 - \vec{j} \cdot 4 + \vec{k} \cdot 0 = (0; -4; 0)$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = \mathbf{2}$$

§1. Векторное произведение

Пример 4. Пусть $\vec{a} = (-1,1)$, $\vec{b} = (2,1)$ в базисе $\left(\vec{c}, \vec{d}\right)$, где $|\vec{c}| = 1$, $\left|\vec{d}\right| = 2$, $\widehat{\vec{c}\vec{d}} = \frac{\pi}{3}$. Найти $\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right|$.

Решение.

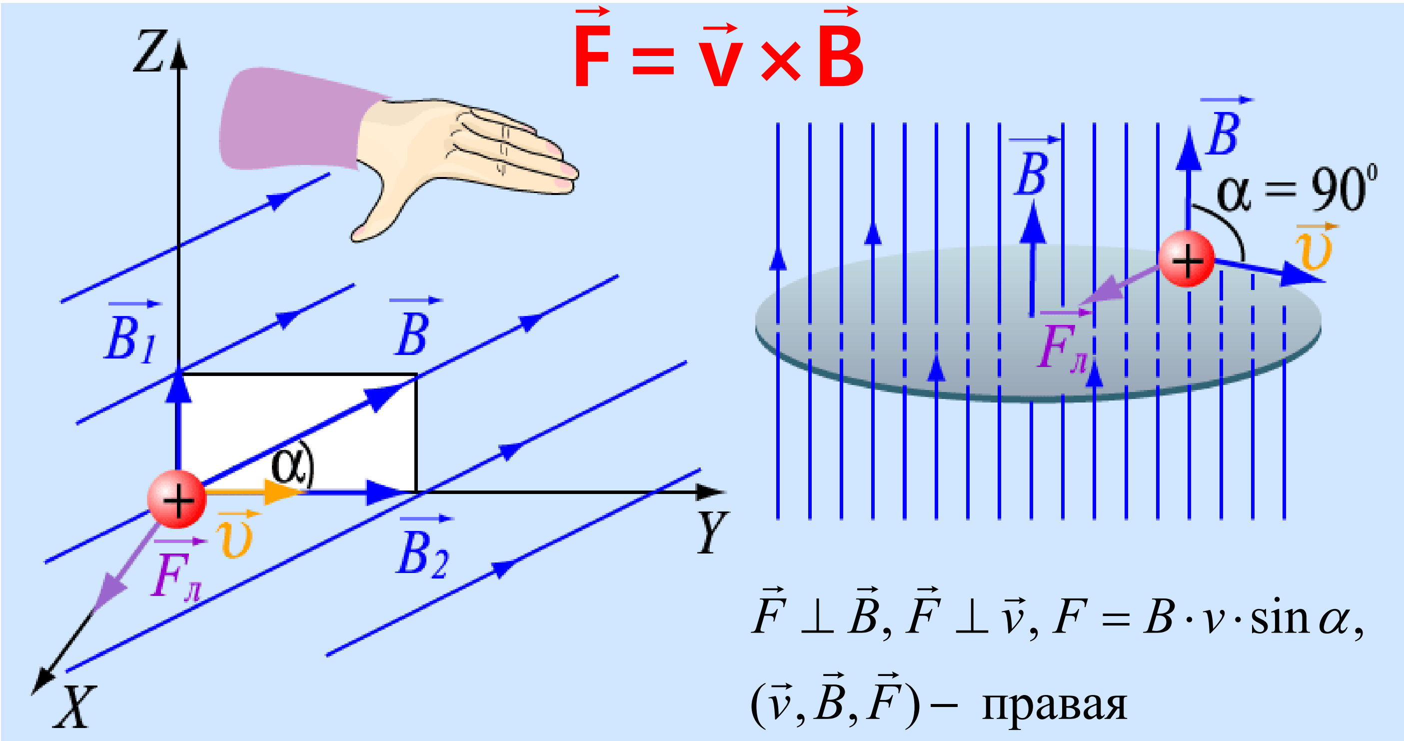
$$\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \left[-\vec{c} + \vec{d}, 2\vec{c} + \vec{d}\right] = [-\vec{c}, 2\vec{c}] + \left[-\vec{c}, \vec{d}\right] +$$
$$+ \left[\vec{d}, 2\vec{c}\right] + \left[\vec{d}, \vec{d}\right] = \vec{0} - \left[\vec{c}, \vec{d}\right] - 2\left[\vec{c}, \vec{d}\right] + \vec{0} = -3\left[\vec{c}, \vec{d}\right]$$

$$\left|[\vec{a}, \vec{b}]\right| = \left|-3\left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right| = 3\left|\left[\vec{c}, \vec{d}\right]\right| = 3|\vec{c}|\left|\vec{d}\right| \sin\frac{\pi}{3} = \mathbf{\frac{3\sqrt{3}}{2}}$$

§1.Векторное произведение

Физический смысл векторного произведения:

1) момент силы;
2) Сила Лоренца; и др.



Картинка взята с [САЙТА]

§1. Смешанное произведение

Опр. Смешанным произведением векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$

Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.

§1. Смешанное произведение

Свойства.

1. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$. (упр)

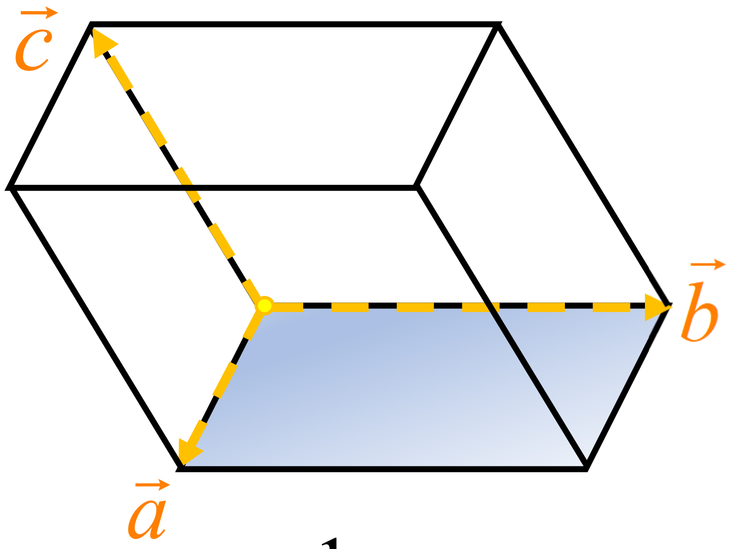
2. $$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{cases} V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}, & \text{если } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \text{ правая;} \\ -V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}, & \text{если } (\vec{a},\vec{b},\vec{c}) \text{ левая;} \\ 0, & \text{если } \vec{a},\vec{b},\vec{c} \text{ компланарны.} \end{cases}$$

3. Объем параллелепипеда: $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}}=|\,\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|$.

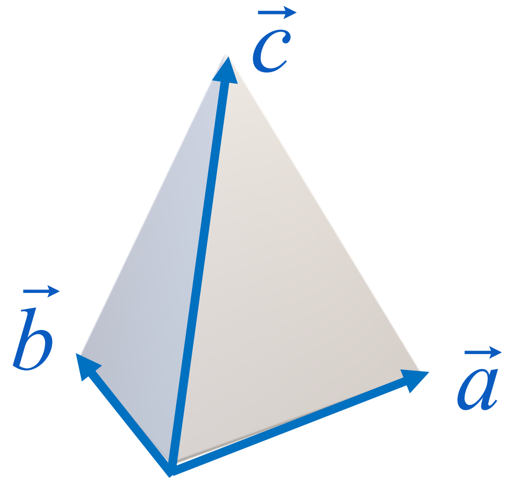
§1. Смешанное произведение

<u>Свойства.</u>

3. Объем параллелепипеда: $V_{\vec{a},\vec{b},\vec{c}} = |\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|$.



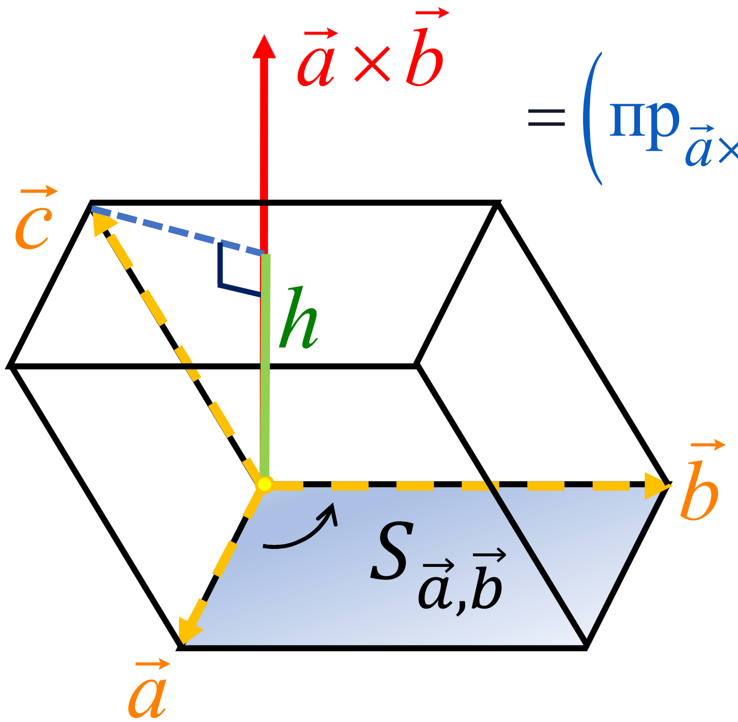
4. $V_{mетр.} = \dfrac{1}{6}|\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}\,|$



§1. Смешанное произведение

<u>Доказательство.</u>

$$3.\ V_{\vec a,\vec b,\vec c} = h\cdot S_{\vec a,\vec b} = \left(\text{пр}_{\vec a\times\vec b}\vec c\right)\cdot S_{\vec a,\vec b} =$$



$$= \left(\text{пр}_{\vec a\times\vec b}\vec c\right)\cdot S_{\vec a,\vec b} = \frac{\left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c}{\cancel{\left|\vec a\times\vec b\right|}}\cancel{\left|\vec a\times\vec b\right|} =$$

$$= \left(\vec a\times\vec b\right)\cdot\vec c = \vec a\vec b\vec c$$

Пусть $\left(\vec a,\vec b,\vec c\right)$ – правая для простоты.

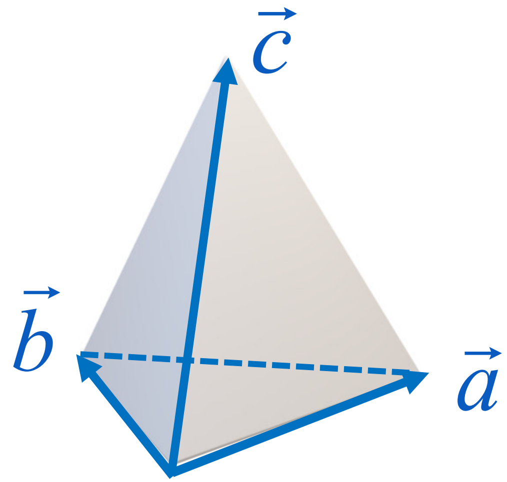
§1. Смешанное произведение

Доказательство.

$$4.\ V_{тетр.} = \frac{1}{3}\cdot h\cdot S_{\triangle} = \frac{1}{3}\cdot h\cdot \frac{1}{2}\cdot S_{\vec a,\vec b} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot h\cdot S_{\vec a,\vec b} = \frac{1}{6}\cdot V_{\vec a,\vec b,\vec c} =$$

$$= \frac{1}{6}\cdot |\,\vec a\,\vec b\,\vec c\,|\ \blacksquare$$



§1. Смешанное произведение

<u>Свойства (следуют из определения).</u>

5. При перестановке двух сомножителей в смешанном произведении знак смешанного произведения меняется на противоположный.
6. При циклической перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется.
7. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.
8. Тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – правая $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$,
   $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – левая $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$.

§1. Смешанное произведение

Теорема. Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ в правом ОНБ, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$.

$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$;

$$\vec{b} \times \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) \Rightarrow$$

§1. Смешанное произведение

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1);$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \left(\begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix}, \ -\begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} \right) \Rightarrow$$

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} \times \vec{c} \right) =$$

$$= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - y_1 \begin{vmatrix} x_2 & z_2 \\ x_3 & z_3 \end{vmatrix} + z_1 \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \blacksquare$$

§1. Смешанное произведение

Пример 4. Пусть $A(-1,1,0)$, $B(-2,1,-1)$, $C(3,1,0), D(-2,2,1)$ в $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Найти объем тетраэдра $ABCD$.

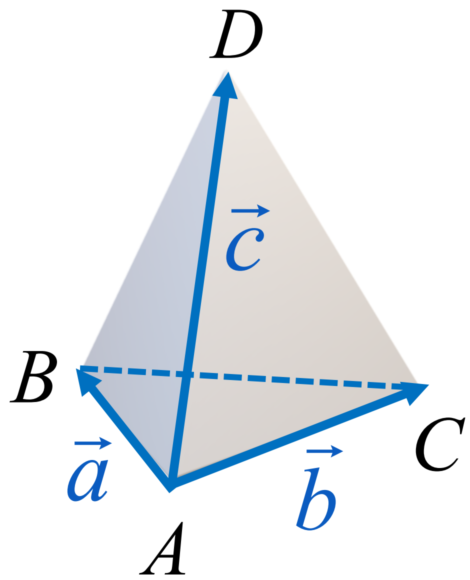
$$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=B-A=(-2,1,-1)-(-1,1,0)= \\ =(-1,0,-1),$$

$$\vec{b}=\overrightarrow{AC}=C-A=(3,1,0)-(-1,1,0)= \\ =(4,0,0),$$

$$\vec{c}=\overrightarrow{AD}=D-A=(-2,2,1)-(-1,1,0)= \\ =(-1,1,1),$$

§1. Смешанное произведение

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} \left| \vec{a}\vec{b}\vec{c} \right|$$



$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{-4}$$

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} \left| -4 \right| = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

Обобщение теоремы о вычислении смешанного произведения

Упражнение. Если $\vec{x} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{y} = (x_2, y_2, z_2)$, $\vec{z} = (x_3, y_3, z_3)$ – координаты в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, т. е.

$\vec{x} = x_1 \cdot \vec{a} + y_1 \cdot \vec{b} + z_1 \cdot \vec{c}$,

$\vec{y} = x_2 \cdot \vec{a} + y_2 \cdot \vec{b} + z_2 \cdot \vec{c}$,

$\vec{z} = x_3 \cdot \vec{a} + y_3 \cdot \vec{b} + z_3 \cdot \vec{c}$,

то

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \cdot \vec{a}\vec{b}\vec{c}$$

Обобщение теоремы о вычислении смешанного произведения

Указание:

$$\vec{x}\vec{y}\vec{z} = (\vec{x} \times \vec{y}) \cdot \vec{z} =$$

$$((x_1 \cdot \vec{a} + y_1 \cdot \vec{b} + z_1 \cdot \vec{c}) \times (x_2 \cdot \vec{a} + y_2 \cdot \vec{b} + z_2 \cdot \vec{c})) \cdot (x_3 \cdot \vec{a} + y_3 \cdot \vec{b} + z_3 \cdot \vec{c}) = \cdots$$