Лекция 3, 07.10.11

Предложение 1. *Любые две максимальные подгруппы внутри одного $\mathscr{D}$-класса изоморфны.*

Доказательство. Пусть H_1 и H_2 – две такие подгруппы. По следствию из теоремы Миллера-Клиффорда существуют идемпотенты e и f такие, что $H_1 = H_e$ и $H_2 = H_f$. Поскольку все происходит внутри одного $\mathscr{D}$-класса, имеем $e \mathscr{D} f$. Таким образом, $e \mathscr{R} a \mathscr{L} f$ для некоторого $a \in S$. Из того, что $a \mathscr{L} f$, получаем, что существует элемент $a' \in S^1$, для которого $f = a'a$.

На H_e рассмотрим отображение, определенное правилом $x \mapsto a'xa$. Из леммы Грина и утверждения, двойственного к ней, следует, что это отображение есть биекция H_e на H_f. Осталось проверить, что это отображение является гомоморфизмом.

Заметим, что $aa'a = af = a$. Отсюда $(aa')(aa') = (aa'a)a' = aa'$, т. е. aa' — идемпотент из R_a.

Для произвольных $x, y \in H_e$, поскольку $(aa')y = y$, получаем

$$(a'xa)(a'ya) = a'x(aa'y)a = a'xya,$$

что и показывает, что отображение $x \mapsto a'xa$ есть гомоморфизм. □

Элемент $a \in S$ называется *регулярным*, если существует такой $x \in S$, что $axa = a$. Класс отношения Грина называется *регулярным*, если все его элементы регулярны.

Предложение 2. *Пусть D – некоторый $\mathscr{D}$-класс. Следующие условия эквивалентны:*

(1) D – регулярный $\mathscr{D}$-класс;

(2) в D есть регулярный элемент;

(3) каждый $\mathscr{R}$-класс внутри D содержит идемпотент;

(4) каждый $\mathscr{L}$-класс внутри D содержит идемпотент;

(5) в D есть идемпотент;

(6) существуют такие $x, y \in D$, что $xy \in D$.

Доказательство. Эквивалентность условий (1)–(5) вытекает из следующей леммы и двойственного ей утверждения:

Лемма 1. *$\mathscr{R}$-класс регулярен тогда и только тогда, когда он содержит идемпотент.*

Доказательство. Пусть $a \mathscr{R} e$, где e — идемпотент. Тогда существует такой элемент $u \in S^1$, что $e = au$. Имеем следующую цепочку равенств: $a = ea = e^2a = (au)ea = a(ue)a$. Поскольку $ue \in S$, видим, что элемент a регулярен.

Обратно, если $axa = a$ для некоторого $x \in S$, то ax — идемпотент, лежащий в R_a. $\square$

Очевидно, что (5) $\Rightarrow$ (6), а импликация (6) $\Rightarrow$ (5) следует из теоремы Миллера-Клиффорда. $\square$

$\mathscr{D}$-строение моноида преобразований. Пусть X – множество. Через T_X обозначим моноид всех преобразований множества X. Для $\alpha \in T_X$ через $\operatorname{Im}\alpha$ обозначается *образ* α, т.е. множество

$$\{y \in X \mid (\exists x \in X)\, y = x\alpha\},$$

а через $\operatorname{Ker}\alpha$ обозначается *ядро* α, т.е. разбиение множества X, при котором элементы $x, y \in X$ принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $x\alpha = y\alpha$. Заметим, что мощность множества классов разбиения $\operatorname{Ker}\alpha$ (обозначаемая $|\operatorname{Ker}\alpha|$) равно мощности $|\operatorname{Im}\alpha|$ множества $\operatorname{Im}\alpha$.

Предложение 3. *Для любых $\alpha, \beta \in T_X$ имеем:*

(1) $\alpha \leq_{\mathscr{L}} \beta \Longleftrightarrow \operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$*;*

(2) $\alpha \leq_{\mathscr{R}} \beta \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}\alpha \supseteq \operatorname{Ker}\beta$*;*

(3) $\alpha \leq_{\mathscr{J}} \beta \Longleftrightarrow |\operatorname{Im}\alpha| \leq |\operatorname{Im}\beta|$.

Доказательство. (1) Если $\alpha \leq_{\mathscr{L}} \beta$, то существует такое преобразование $\gamma \in T_X$, что $\alpha = \gamma\beta$. Тогда $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\gamma\beta = (\operatorname{Im}\gamma)\beta \subseteq \operatorname{Im}\beta$.

Обратно, если $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$, то для каждого $x \in X$ существует такой $y \in X$, что $x\alpha = y\beta$. Рассмотрим отображение γ, сопоставляющее каждому x один из таких y. Тогда $\alpha = \gamma\beta$.

(2) Если $\alpha \leq_{\mathscr{R}} \beta$, то существует такое преобразование $\gamma \in T_X$, что $\alpha = \beta\gamma$.

Пусть $(x, y) \in \operatorname{Ker}\beta$, т.е. $x\beta = y\beta$. Тогда $x\alpha = x\beta\gamma = y\beta\gamma = y\alpha$. Это значит, что $(x, y) \in \operatorname{Ker}\alpha$.

Обратно, если $\operatorname{Ker}\alpha \supseteq \operatorname{Ker}\beta$, то соответствие $\gamma = \beta^{-1}\alpha$ является однозначным отображением и потому принадлежит T_X. Ясно, что $\alpha = \beta\gamma$.

(3) Если $\alpha \leq_{\mathscr{J}} \beta$, то существуют такие преобразования $\gamma, \delta \in T_X$, что $\alpha = \gamma\beta\delta$. Отсюда немедленно получаем, что $|\operatorname{Im}\alpha| \leq |\operatorname{Im}\beta|$.

Обратно, рассмотрим отображение $\varepsilon : X \to X$, которое каждому классу $\operatorname{Ker}\alpha$ сопоставляет элемент из $\operatorname{Im}\beta$ так, что разным классам соответствуют разные элементы. Поскольку $|\operatorname{Ker}\alpha| = |\operatorname{Im}\alpha| \leq |\operatorname{Im}\beta|$, то организовать такое отображение возможно.

Так как $\operatorname{Ker}\varepsilon = \operatorname{Ker}\alpha$, по пункту (2) имеем $\varepsilon \mathscr{R} \alpha$. Далее, $\operatorname{Im}\varepsilon \subseteq \operatorname{Im}\beta$, поэтому по пункту (1) имеем $\varepsilon \leq_{\mathscr{L}} \beta$. Отсюда $\alpha \leq_{\mathscr{D}} \beta$ и потому $\alpha \leq_{\mathscr{J}} \beta$. $\square$

Отметим, что из доказательства пункта (3) вытекает, что в моноиде T_X отношения $\mathscr{D}$ и $\mathscr{J}$ совпадают.

Следствие 1. *Для любых $\alpha, \beta \in T_X$ имеем:*

(1) $\alpha \mathscr{L} \beta \Longleftrightarrow \operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta$;

(2) $\alpha \mathscr{R} \beta \Longleftrightarrow \operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Ker}\beta$;

(3) $\alpha \mathscr{J} \beta \Longleftrightarrow \alpha \mathscr{D} \beta \Longleftrightarrow |\operatorname{Im}\alpha| = |\operatorname{Im}\beta|$.

В качестве примера рассмотрим $\mathscr{D}$-строение моноида всех преобразований 3-элементного множества $\{1, 2, 3\}$. Согласно доказанному, у него ровно три $\mathscr{D}$-класса: класс D_3 всех преобразований с 3-элементным образом, класс D_2 всех преобразований с 2-элементным образом и класс D_1 всех преобразований с 1-элементным образом. Ясно, что преобразование 3-элементного множества, образ которого 3-элементен, есть не что иное как перестановка этого множества. Таким образом, класс D_3 состоит из 6 перестановок исходного множества. Класс D_1 состоит из трех константных преобразований. Интереснее всего устроен класс D_2. Его egg-box картинка показана ниже.

	$\{1,2\}$	$\{2,3\}$	$\{1,3\}$
$1 \mid 23$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{smallmatrix}\right)$ *	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{smallmatrix}\right)$ *	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{smallmatrix}\right)$
$2 \mid 13$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{smallmatrix}\right)$ *	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{smallmatrix}\right)$ *
$3 \mid 12$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{smallmatrix}\right)$ *	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{smallmatrix}\right)$ *

Таблица 1: $\mathscr{D}$-класс моноида всех преобразований 3-элементного множества, состоящий из всех преобразований с 2-элементным образом. Над каждым $\mathscr{L}$-классом показано параметризующее его 2-элементное подмножество, а левее каждого $\mathscr{R}$-класса – параметризующее его разбиение. Звездочкой отмечены $\mathscr{H}$-классы, содержащие идемпотент.