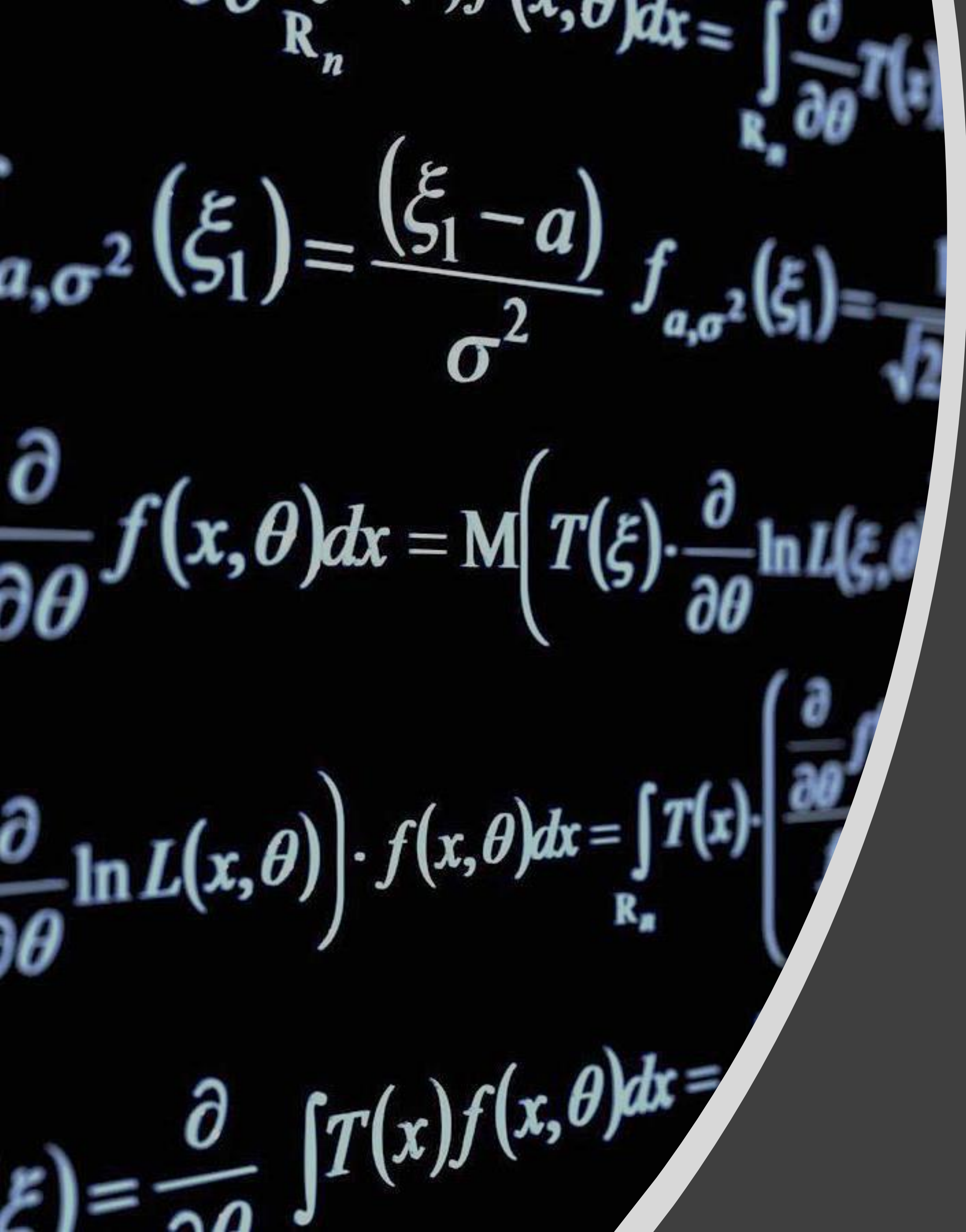


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 2

Математический анализ

Производная функции (свойства)

Арифметические свойства производной функции в точке

Теорема 1. Пусть функции $u(x)$ и $v(x)$ определены в $O(x_0)$ и дифференцируемы в точке $x = x_0$.

(1) Производная константы равна нулю:

$$\boxed{c' = 0}$$

Арифметические свойства производной функции в точке

(2) Произведение константы c и функции u дифференцируема в точке $x = x_0$ и ее производная равна:

$$(cu)'\Big|_{x_0} = cu'(x_0)$$

$$\boxed{(cu)' = cu'}$$

(константу можно вынести за знак производной)

Арифметические свойства производной функции в этой точке

(3) Сумма/разность функций u, v дифференцируема в точке $x = x_0$ и ее производная равна сумме/разности производных в этой точке:

$$(u \pm v)'\Big|_{x_0} = u'(x_0) \pm v'(x_0)$$

$$\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$$

Арифметические свойства производной функции в этой точке

(4) Произведение функций u, v дифференцируемо в точке $x = x_0$ и его производная равна

$$(u \cdot v)'\Big|_{x_0} = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

$$\boxed{(u \cdot v)' = u'v + uv'}$$

Арифметические свойства производной функции в этой точке

(5) Частное функций u, v дифференцируемо в точке $x = x_0$, при условии, что знаменатель $v(x_0) \neq 0$ и его производная равна

$$\left(\frac{u}{v}\right)'\Bigg|_{x_0} = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Арифметические свойства производной функции в точке

<u>Доказательство.</u>

(1) $\Delta c = c - c \Rightarrow c' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta c}{\Delta x} = 0$ ■

(2) $\Delta(cu) = cu(x) - cu(x_0) = c\Delta u(x_0)$

$$(cu)'\Big|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(cu)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c\Delta u(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= c \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} = cu'(x_0)$$ ■

Арифметические свойства производной функции в точке

(3) $\Delta(u+v) = (u+v)(x) - (u+v)(x_0) =$

$= (u(x) + v(x)) - \left(u(x_0) + v(x_0)\right) =$

$= \left(u(x) - u(x_0)\right) - \left(v(x_0) - v(x_0)\right) =$

$= \Delta u(x_0) + \Delta v(x_0)$

Арифметические свойства производной функции в точке

$$(u+v)'\Big|_{x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta(u+v)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x_0) + \Delta v(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} \right) =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} = u'(x_0) + v'(x_0) \blacksquare$$

Арифметические свойства производной функции в точке

(4) $\Delta(uv) = u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0) =$

$= u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0) \pm u(x)v(x_0) =$

$= \big(u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)\big) + \big(u(x)v(x) - u(x)v(x_0)\big) =$

$= \big(u(x) - u(x_0)\big)v(x_0) + u(x)\big(v(x) - v(x_0)\big) =$

$= \Delta u(x)v(x_0) + u(x)\Delta v(x)$

(5) Без доказательства.

Арифметические свойства производной функции в точке

$$(4)\ (u\cdot v)'\Big|_{x_0} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta(uv)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u(x)v(x_0) + u(x)\Delta v(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x}v(x_0) + u(x)\frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x}\right) =$$

Арифметические свойства производной функции в точке

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} v(x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} u(x) \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\left[\lim_{\Delta x \to 0} u(x) = \lim_{\Delta x \to 0} u(x_0 + \Delta x) = u(x_0)\right]$$

$$= u'(x_0) v(x_0) + u(x_0) v'(x_0) \blacksquare$$

Арифметические свойства производной функции в точке

Пример 2. Найти производную функции $f(x) = \frac{x^2+3x-2}{x^3-1}$ в любой точке $x \neq 1$.

Решение.

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+3x-2}{x^3-1}\right)' = \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}\right]$$

$$= \frac{(x^2+3x-2)'(x^3-1)-(x^2+3x-2)(x^3-1)'}{(x^3-1)^2}$$

Арифметические свойства производной функции в точке

$$[u' = (x^2 + 3x - 2)' = (x^2)' + (3x)' - 2' =$$

$$= 2x + 3x' - 0 = 2x + 3]$$

$$[v' = (x^3 - 1)' = 3x^2]$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x^3 - 1) - (x^2 + 3x - 2) \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

Арифметические свойства производной функции в точке

Пример 3. Найти производную функции $f(x) = \operatorname{tg} x$ в любой точке $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{N}$.

Решение.

$$f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \left[\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}\right]$$

$$= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \,(\cos x)'}{(\cos x)^2} =$$

Арифметические свойства производной функции в точке

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Таким образом, $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

Производная сложной функции в точке

Теорема 4 (производная сложной функции)

1) Пусть функция $y = f(u)$ определена в $O(u_0)$ и дифференцируема в точке $u = u_0$.

2) И пусть $u = u(x)$ определена в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке $x = x_0$.

3) Причем $u_0 = u(x_0)$ и $u(O(x_0)) \subseteq O(u_0)$

Производная сложной функции в точке

Тогда сложная функция $y = f\big(u(x)\big)$ определена в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке $x = x_0$, и ее производная в этой точке равна

$$y'(x_0) = \Big(f\big(u(x)\big)\Big)'\Big|_{x=x_0} = f'\big(u(x_0)\big) \cdot u'(x_0)$$

$$\boxed{y' = f'(u)\, u'}$$

$$\left(\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}\right)$$

Производная сложной функции в точке

Доказательство.

$$y'(x_0) = \Big(f\big(u(x)\big)\Big)'\Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$$

$$[\Delta y(x_0) = y(x) - y(x_0) =$$

$$= f\big(u(x)\big) - f\big(u(x_0)\big) = f(u) - f(u_0) = \Delta f(u_0)]$$

Производная сложной функции в точке

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$[\Delta u = u(x) - u(x_0),$

$u = u(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0 \Rightarrow$

$u = u(x)$ непрерывна в точке $x = x_0 \Rightarrow$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0]$

Производная сложной функции в точке

Доказательство.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'\big(u(x_0)\big) \cdot u'(x_0) \blacksquare$$

Производная обратной функции в точке

Теорема 5 (производная обратной функции)

1) Пусть функция $y = y(x)$ определена и обратима в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке $x = x_0$.

2) И пусть $y_0' = y'(x_0) \neq 0$.

Тогда обратная функция $x = x(y), y \in O(y_0)$, где $y_0 = y(x_0)$, дифференцируема в точке $y = y_0$ и ее производная в этой точке равна

Производная обратной функции в точке

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$$

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}} \qquad \left(\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\right)$$

Производная обратной функции в точке

Доказательство.

$$x'(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$[y = y(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0 \Rightarrow$
$y = y(x)$ непрерывна в этой точке,

по теореме об обратной функции

функция $x = x(y)$ непрерывна в точке
$y = y_0 \Rightarrow \lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0]$

Производная обратной функции в точке

Доказательство.

$$x'(y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x_0)} \ \blacksquare$$

Производная обратной функции в точке

<u>Пример 3</u>. Найти производную функции $f(x) = \ln x$.

<u>Решение</u>.

$$y(x) = e^x \Rightarrow x = x(y) = \ln y$$

$$\Rightarrow (\ln y)' = x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

Производная обратной функции в точке

<u>Пример 4</u>. Найти $f'(x)$ для $f(x) = \arcsin x$

<u>Решение</u>. $y(x) = \sin x \Rightarrow x = x(y) = \arcsin y$

$$\Rightarrow (\arcsin y)' = x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{(\sin x)'}$$

$$= \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \quad \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Производная обратной функции в точке

Пример 5. Доказать, что $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$ (упр.)

Пример 6. Доказать, что $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (упр.)

Пример 7. Доказать, что $(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$ (упр.)

Пример 8. Доказать, что $(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ (упр.)

Дифференцируемость функции на интервале

Опр. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой на интервале (a, b), если

она определена на (a, b) и дифференцируема для любой точки $x_0 \in (a, b)$.

Замечание. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b), то в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ этого интервала существует касательная к графику функции.

Дифференцируемость функции на интервале

Пример 9. Функция $y = x^2$ дифференцируемой на интервале $(-\infty, +\infty)$.

Пример 10. Функция $y = \sqrt{x}$ дифференцируемой на интервале $(0, +\infty)$.

Пример 11. Функция $y = \operatorname{tg} x$ дифференцируема на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Правила дифференцирования

Теорема 6. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ определены и дифференцируемы на интервале (a, b). Тогда их сумма/разность, произведение, частное при условии, что знаменатель не равен нулю, дифференцируемы на этом промежутке.

И при этом справедливы формулы

Правила дифференцирования

1) $\boxed{c' = 0}$

2) $\boxed{(cu)' = cu'}$

3) $\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$

4) $\boxed{(u \cdot v)' = u'v + uv'}$

5) $$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

Дифференцирование сложной функции на интервале

Теорема 7 (производная сложной функции на интевале)

1) Пусть функция $y = f(u)$ определена и дифференцируема на (c, d).

2) Пусть функция $u = u(x)$ определена и дифференцируема на (a, b).

3) Причем $u(a, b) = (c, d)$.

Производная сложной функции в точке

Тогда сложная функция $y = f\big(u(x)\big)$ определена и дифференцируема на (a, b), и

$$\boxed{y' = f'(u)\, u'}$$

Производная обратной функции в точке

<u>Теорема 8 (производная обратной функции)</u>

Пусть функция $y = y(x)$ определена и обратима и дифференцируема на (a, b).

Тогда обратная функция $x = x(y)$ определена и дифференцируема на (c, d), где $y((a, b)) = (c, d)$, и

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}}$$

Таблица производных

$$1)\ (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$2)\ (e^x)' = e^x$$

$$3)\ (a^x)' = a^x \ln a\,,\ a > 0,\ a \neq 1$$

$$4)\ (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$5)\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$6)\ (\sin x)' = \cos x$$

$$7)\ (\cos x)' = -\sin x$$

$$8)\ (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$9)\ (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Таблица производных

$$10)(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11)(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12)(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$13)(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Таблица производных для сложной функции

$$1)(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$$

$$2)(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$3)(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$4)(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$5)(\log_a u)' = \frac{1}{u\ln a} \cdot u'$$

$$6)(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$7)(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

Таблица производных для сложной функции

$$8)(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$9)(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$10)(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$11)(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$12)(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$13)(\operatorname{arctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Таблица производных для сложной функции

<u>Примеры.</u>

1) $y = (3x - 17)^{10}$

$y = u^{10}, u = 3x - 17$

$y' = 10u \cdot u' = 10 \cdot (3x - 17)^9 \cdot (3x - 17)' =$

$= 10 \cdot (3x - 17)^9 \cdot 3 = 30 \cdot (3x - 17)^9$

Таблица производных для сложной функции

$$2)\ y = \operatorname{arctg}(7x+1)$$

$$y = \operatorname{arctg} u,\ u = 7x+1$$

$$y' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u' = \frac{1}{1+(7x+1)^2}\cdot(7x+1)' =$$

$$= \frac{1}{1+(7x+1)^2}\cdot 7 = \frac{7}{1+(7x+1)^2}$$

Таблица производных для сложной функции

Примеры.

1) $y=(3x-17)^{10}$

$$y=u^{10}, u=3x-17$$

$$y'=10\cdot u^{10}\cdot u' =10\cdot(3x-17)^{9}\cdot(3x-17)'=$$

$$=10\cdot(3x-17)^{9}\cdot 3= 30\cdot(3x-17)^{9}$$

Таблица производных для сложной функции

$$2)\ y = \operatorname{arctg}(7x+1)$$

$$y = \operatorname{arctg} u,\ u = 7x+1$$

$$y' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u' = \frac{1}{1+(7x+1)^2}\cdot(7x+1)' =$$

$$= \frac{1}{1+(7x+1)^2}\cdot 7 = \frac{7}{1+(7x+1)^2}$$

Таблица производных для сложной функции

3) $y = \sin^2(3x-1)$

$$y = u^2, u = \sin(3x-1)$$

$$y' = 2u \cdot u' = 2\sin(3x-1) \cdot (\sin(3x-1))' =$$

$$= 2\sin(3x-1) \cdot \cos(3x-1)(3x-1)' =$$

$$= 2\sin(3x-1) \cdot \cos(3x-1) \cdot 3 =$$

$$= 6\sin(3x-1) \cdot \cos(3x-1)$$

Логарифмическое дифференцирование

1) $y = x^{\sin x}$ – степенно-показательная функция

$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$\left(\ln y\right)' = \left(\sin x \cdot \ln x\right)'$$

$$\frac{1}{y} y' = \left(\sin x\right)' \cdot \ln x + \sin x \cdot \left(\ln x\right)'$$

Логарифмическое дифференцирование

$$\frac{1}{y}y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)$$

$$\boxed{y' = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}\right)}$$

Логарифмическое дифференцирование

2) $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

$\Rightarrow \ln y = \ln \sqrt[3]{x(x-1)^2}$

(При этом считаем, что $y > 0$)

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{x(x-1)^2}$$

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{x} + \ln \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

Логарифмическое дифференцирование

$$\ln y = \frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln(x-1)$$

$$\left(\ln y\right)' = \left(\frac{1}{3}\ln x + \frac{2}{3}\ln(x-1)\right)'$$

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{x-1}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}\left(\overset{x-1}{\frac{1}{x}} + \overset{x}{\frac{2}{x-1}}\right)$$

Логарифмическое дифференцирование

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{3}\frac{(x-1)+2x}{x(x-1)}$$

$$y'=y\frac{3x-1}{3x(x-1)}$$

$$y'=\sqrt[3]{x(x-1)^2}\,\frac{3x-1}{3x(x-1)}$$

$$\boxed{y'=\frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2}\,\sqrt[3]{x-1}}}$$

Дифференциал функции

Пусть функция $y = y(x)$ определена в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке $x = x_0$. Тогда

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad \alpha(\Delta x) - \text{б.м.ф. при } \Delta x \to 0$$

$$\Rightarrow \Delta y = \underbrace{y'(x_0)\Delta x}_{dy} + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad \boxed{\Delta y \approx dy}$$

Дифференциал функции

<u>Опр.</u> Дифференциалом функции $y = y(x)$ в точке $x = x_0$ называется произведение $dy = y'(x_0)\Delta x$

$$dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

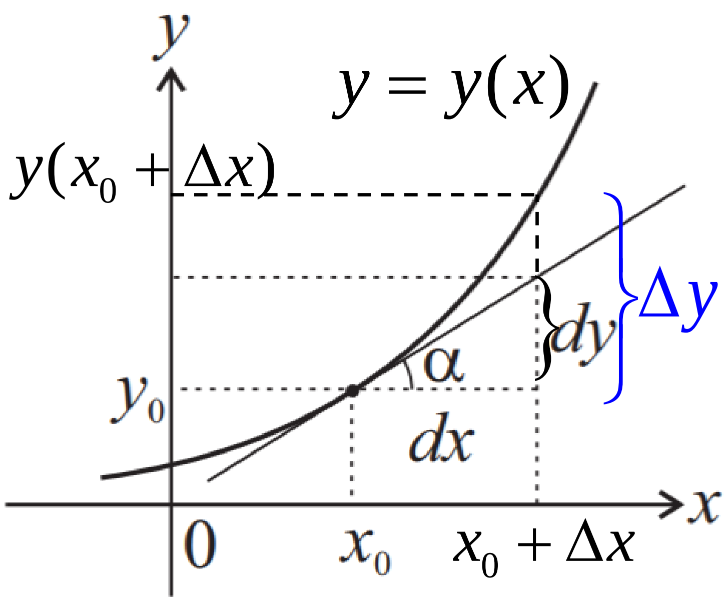
$$\boxed{dy = y'(x_0)dx}$$

Дифференциал функции $y = y(x)$ равен произведению производной на дифференциал независимой переменной.

$$\boxed{dy = y'dx}$$

Геометрический смысл дифференциала

<u>Утверждение.</u> Дифференциал функции в точке равен приращению касательной в этой точке.



$$dy = y'(x_0)\Delta x = \operatorname{tg}\alpha\Delta x$$

$$\boxed{\Delta y \approx dy}$$

Дифференциал функции. Пример 16

Пример 16. $y = x^2,\ x_0 = 1$

$$\boxed{\Delta y \approx dy}$$

$$dy = y'dx = 2xdx$$

$$dy = 2x_0 dx = 2dx$$

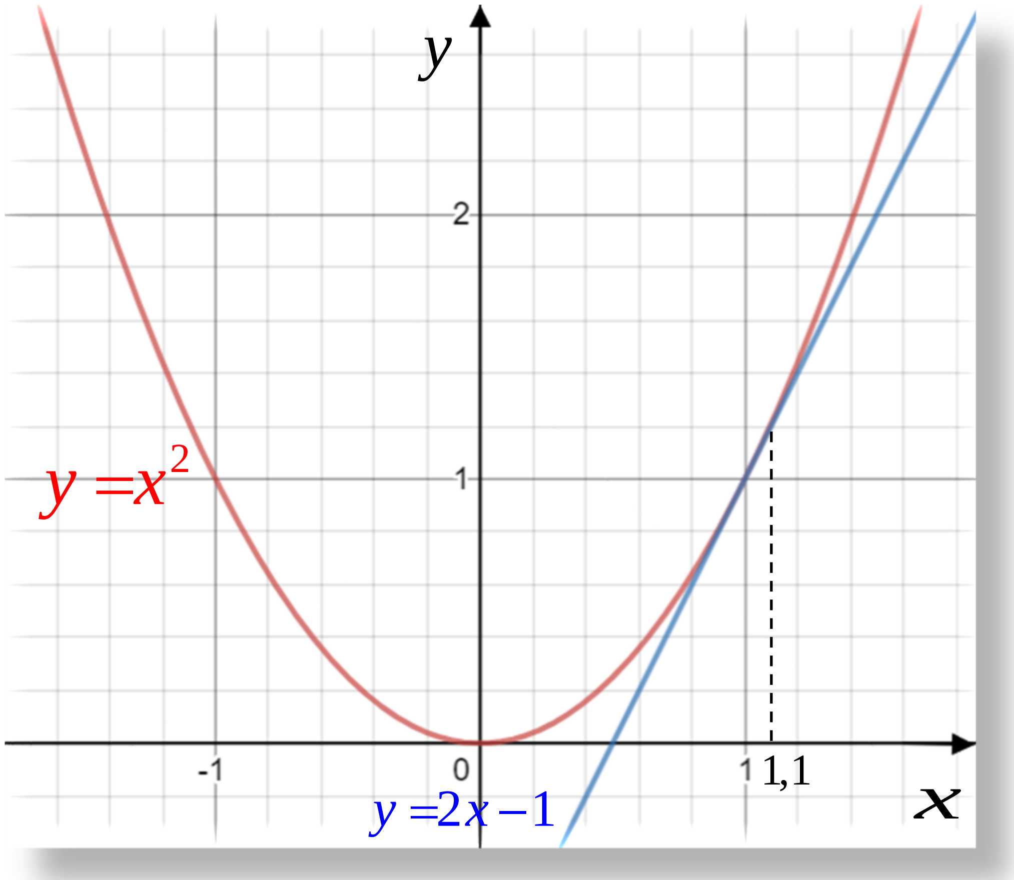
при $\Delta x = 0.1,$

$$dy = 2 \cdot \Delta x = 0.2$$

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) =$$

$$= y(1,1) - y(1) = 1,1^2 - 1^2 = 0,21$$

Геометрический смысл дифференциала



$$\boxed{\Delta y \approx dy}$$