Лекция 4

4.1 Алгоритм вычисления регулярных $\mathscr{D}$-классов в конечных полугруппах преобразований

Предложение 4.1. *Пусть S – подполугруппа в T_X и $\alpha, \beta \in S$. Тогда:*

(1) Если $\alpha \leq_{\mathscr{R}} \beta$, то $\ker\alpha \supseteq \ker\beta$ и если $\alpha \mathscr{R} \beta$, то $\ker\alpha = \ker\beta$.

(2) Если $\alpha \leq_{\mathscr{L}} \beta$, то $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$ и если $\alpha \mathscr{L} \beta$, то $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta$.

(3) Если $\alpha \leq_{\mathscr{J}} \beta$, то $|\operatorname{Im}\alpha| \leq |\operatorname{Im}\beta|$ и если $\alpha \mathscr{J} \beta$, то $|\operatorname{Im}\alpha| = |\operatorname{Im}\beta|$.

Это предложение является простым следствием описания отношений Грина в T_X. Отметим, что обратные импликации в общем случае (т. е. для произвольной подполугруппы S) неверны, хотя они верны для T_X.

Пусть Y – подмножество множества X, а π – разбиение X. Говорят, что Y – *трансверсаль* разбиения π, если каждый π-класс содержит ровно один элемент из Y.

Предложение 4.2. *Пусть X – конечное множество и S – подполугруппа в T_X. Элемент $\alpha \in S$ принадлежит некоторой подгруппе в S тогда и только тогда, когда $\operatorname{Im}\alpha$ есть трансверсаль разбиения $\ker\alpha$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\alpha \in S$ лежит в некоторой подгруппе, тогда $\alpha^n = \alpha$ для некоторого n. Поэтому $\alpha|_{\operatorname{Im}\alpha}$ – биекция (перестановка).

Пусть K – произвольный класс разбиения $\ker\alpha$. Если $|K \cap \operatorname{Im}\alpha| \geq 2$, то по крайней мере два элемента из $\operatorname{Im}\alpha$ склеиваются под действием α, что невозможно, поскольку α – биекция. Значит, $|K \cap \operatorname{Im}\alpha| \leq 1$ для любого K. Если предположить, что для некоторого K выполняется $K \cap \operatorname{Im}\alpha = \varnothing$, то

$$|\operatorname{Im}\alpha| = \sum_{K \in \ker\alpha} |K \cap \operatorname{Im}\alpha| < |\ker\alpha|,$$

что также невозможно, поскольку $|\operatorname{Im}\alpha| = |\ker\alpha|$.

Достаточность. Если $\operatorname{Im}\alpha$ – трансверсаль в $\ker\alpha$, то $\alpha|_{\operatorname{Im}\alpha}$ – перестановка, тогда существует n такое, что $\alpha^n = \alpha$. Отсюда следует, в частности, что $\alpha^2 \mathscr{H} \alpha$, а значит, $\mathscr{H}$-класс элемента α является подгруппой, поскольку содержит идемпотент. $\square$

Изложим теперь алгоритм построения регулярных $\mathscr{D}$-классов конечной полугруппы преобразований.

0. Находим групповой элемент $x \in S$.

1. Вычисляем образы $\operatorname{Im} xr$ для всех $r \in S^1$ такие, что $|\operatorname{Im} xr| = |\operatorname{Im} x|$. Для каждого такого образа I сохраним такое r, что $I = \operatorname{Im} xr$.

2. Параллельно вычисляем все такие преобразования xr $(r \in S^1)$, что $\operatorname{Im} xr = \operatorname{Im} x$. *Из этих преобразований состоит $\mathscr{H}$-класс H_x.*

3. Вычисляем все разбиения вида $\ker sx$ $(s \in S^1)$, такие, что $|\ker sx| = |\ker x|$. Для каждого такого разбиения сохраняем значение s, при котором оно получается.

4. Среди образов, построенных на шаге 1, сохраняем только те, которые служат трансверсалями для каких-то из разбиений, построенных на шаге 3, а среди разбиений, построенных на шаге 3, сохраняем только те, для которых хотя бы одно из множеств, построенных на шаге 1, является трансверсалью. Получим набор множеств $I_1(=\operatorname{Im} x), \dots, I_k$ с соответствующими элементами $r_1(=1), \dots r_k \in S^1$ и набор разбиений $\pi_1(=\ker x), \dots, \pi_\ell$ с соответствующими элементами $s_1(=1), \dots s_\ell \in S^1$. *Тогда $\mathscr{D}$-класс элемента x состоит в точности из элементов вида $s_i h r_j$, где h пробегает H_x.*

	$\operatorname{Im} x$	$\dots$	$\operatorname{Im} xr_j$	$\dots$	$\operatorname{Im} xr_k$
$\ker x$	H_x				
$\dots$					
$\ker s_i x$			H_{ij}		
$\dots$					
$\ker s_\ell x$					

Для обоснования алгоритма нужна следующая лемма. В ее формулировке участвуют отношения Грина $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$ в полугруппе T и ее подполугруппе S. Будем с помощью верхних индексов ^{T} или ^{S} указывать, в какой полугруппе рассматривается соответствующее отношение. Аналогичное соглашение используется для классов отношений Грина.

Лемма 4.1 (о четвертом угле)**.** *Пусть S – подполугруппа конечной полугруппы T, $x \in S$, $a, b \in S^1$, $e = e^2 \in T$. Если*

$$e \,\mathscr{R}^T\, bx \,\mathscr{L}^T\, x \,\mathscr{R}^T\, xa \,\mathscr{L}^T\, e,$$

то $e \in S$ и

$$e \,\mathscr{R}^S\, bx \,\mathscr{L}^S\, x \,\mathscr{R}^S\, xa \,\mathscr{L}^S\, e.$$

Доказательство. Пересечение $L^T_{xa} \cap R^T_{bx}$ содержит идемпотент (а именно, e). По теореме Миллера–Клиффорда имеем

$$xabx \in L^T_{bx} \cap R^T_{xa} = H^T_x,$$

следовательно, по лемме Грина $\rho_{abx}|_{H^T_x}$ – биекция, а значит, существует k такое, что ρ^k_{abx} – тождественная перестановка. Отсюда $x(abx)^k = x$, а потому $xa \,\mathscr{R}^S\, x \,\mathscr{L}^S\, bx$. Так как $xabx \in L^S_{bx} \cap R^S_{xa}$, пересечение $L^S_{xa} \cap R^S_{bx}$ содержит идемпотент по теореме Миллера–Клиффорда. Ясно, что $L^S_{xa} \cap R^S_{bx} \subseteq L^T_{xa} \cap R^T_{bx}$, а e – единственный идемпотент в $L^T_{xa} \cap R^T_{bx}$. Итак, $e \in L^S_{xa} \cap R^S_{bx}$. $\square$

Займемся обоснованием алгоритма, т.е. докажем утверждения, сформулированные в его описании (они выделены курсивом).

Пусть h – произвольный элемент из H_x. Рассмотрим элемент hr такой, что $\operatorname{Im} hr \in \{I_1(=\operatorname{Im} x), \dots, I_k\}$. Тогда по построению среди разбиений $\pi_1(=\ker x), \dots, \pi_\ell$ найдется такое разбиение $\pi = \ker sh$, для которого $\operatorname{Im} hr$ является трансверсалью. Рассмотрим преобразование $e \in T_X$, которое переводит каждый класс K разбиения $\pi = \ker sh$ в единственный элемент множества $K \cap \operatorname{Im} hr$. Тогда e – идемпотент в T_X такой, что $\ker e = \ker sh$ и $\operatorname{Im} e = \operatorname{Im} hr$. В силу описания отношений Грина в моноиде T_X имеем $e \mathscr{R}^{T_X} sh \mathscr{L}^{T_X} h$ и $e \mathscr{L}^{T_X} hr \mathscr{R}^{T_X} h$. Тогда по лемме о четвертом угле $e \in S$ и

$$e \mathscr{R}^S sh \mathscr{L}^S h \mathscr{R}^S hr \mathscr{L}^S e. \tag{4.1}$$

Возьмем сначала в качестве h исходный элемент x и пусть $r \in S^1$ таково, что $\operatorname{Im} xr = \operatorname{Im} x$. Тогда в роли s можно взять 1, а идемпотент e – это не то иное как единица подгруппы H_x. Из (4.1) заключаем, что $xr \in H_x$. Так как очевидно, что любой элемент из H_x можно представить в виде xr для некоторого $r \in S^1$ такого, что $\operatorname{Im} xr = \operatorname{Im} x$, мы доказали утверждение, сформулированное на шаге 2 алгоритма: *$\mathscr{H}$-класс H_x состоит из всех таких преобразований xr ($r \in S^1$), что $\operatorname{Im} xr = \operatorname{Im} x$.*

Теперь снова возьмем произвольный элемент $h \in H_x$ и рассмотрим произвольный элемент вида $s_i h r_j$. По построению, существуют такое p, что $\operatorname{Im} hr_j$ является трансверсалью для $\ker s_p h$, и такое q, что $\operatorname{Im} hr_q$ является трансверсалью для $\ker s_i h$. Применяя (4.1) с $r = r_j$ и $s = s_p$ заключаем, что $h \mathscr{R}^S hr_j$, а тот же аргумент, примененный к $r = r_p$ и $s = s_i$, дает $h \mathscr{L}^S s_i h$, откуда $hr_j \mathscr{L}^S s_i h r_j$ (напомним, что отношение $\mathscr{L}$ стабильно справа). Итак, $h \mathscr{R}^S hr_j \mathscr{L}^S s_i h r_j$, т.е. $s_i h r_j$ принадлежит $\mathscr{D}$-классу элемента x. Обратно, очевидно, что любой элемент из этого $\mathscr{D}$-класса можно представить в виде $s_i h r_j$ для подходящего $h \in H_x$. Мы доказали утверждение, сформулированное на шаге 4 алгоритма: *$\mathscr{D}$-класс элемента x состоит в точности из элементов вида $s_i h r_j$, где h пробегает H_x.*

	$\operatorname{Im} x$	$\dots$	$\operatorname{Im} xr_j$	$\dots$	$\operatorname{Im} xr_q$
$\ker x$	h		hr_j		
$\dots$					
$\ker s_i x$	$s_i h$		$s_i h r_j$		$*$
$\dots$					
$\ker s_p x$			$*$		