Лекция 3

3.1 Отношения Грина и идемпотенты

Элемент e называется *идемпотентом*, если $e^2 = e$. Понятно, что, например, единица любого моноида (в частности, группы) является идемпотентом. В группе других идемпотентов, кроме единицы, быть не может, но бывают и полугруппы, целиком состоящие из идемпотентов.

Лемма 3.1. *В конечной полугруппе для любого элемента найдется степень, которая является идемпотентом.*

Доказательство. Пусть S – конечная полугруппа и $a \in S$. Рассмотрим последовательность $a, a^2, a^3, \dots$. Поскольку полугруппа S конечна, в этой последовательности после максимум $|S|$ шагов встретится элемент, равный одному из предшествующих. Другими словами, найдутся такие натуральные n и k, что $a^n = a^{n+k}$. Тогда ясно, что для любого $m \geq n$ и любого натурального ℓ выполняются и равенства $a^m = a^{m+k} = a^{m+2k} = \cdots = a^{m+\ell k}$. В частности, взяв в качестве m число nk, а в качестве ℓ число n, получим $a^{nk} = a^{nk+nk} = a^{2nk} = (a^{nk})^2$. Следовательно, a^{nk} – идемпотент. $\square$

Полугруппы, в которых выполняется заключение леммы 3.1, называются *периодическими*. Отметим одно важное свойство периодических полугрупп:

Предложение 3.1. *В периодической полугруппе* $\mathscr{D} = \mathscr{J}$.

Доказательство. Включение $\mathscr{D} \subseteq \mathscr{J}$ выполняется в любой полугруппе в силу того, что $\mathscr{D}$ – наименьшее отношение эквивалентности, содержащее отношения $\mathscr{R}$ и $\mathscr{L}$.

Пусть $a \mathrel{\mathscr{J}} b$. Найдутся такие $u, v, x, y \in S^1$, что $uav = b$ и $xby = a$. Подставляя выражение для b из первого равенства во второе равенство, получим $xuavy = a$. Подставляя это равенство само в себя, получим, что для любого k выполняется равенство $(xu)^k a (vy)^k = a$. Возьмем такое k, что оба элемента $e := (xu)^k$ и $f := (vy)^k$ будут идемпотентами. (Понятно, что такое k найдется: если, скажем, $(xu)^\ell$ и $(vy)^n$ – идемпотенты, то в качестве k можно взять ℓn.) Итак, $eaf = a$. Умножая это равенство на e справа, получаем $eaf = ea$, откуда $ea = a$. Аналогично, умножая равенство $eaf = a$ на f слева, получаем $af = a$.

Покажем, что $ua \mathscr{L} a$. Ясно, что $ua \in S^1a$. Обратно, $a = ea = (xu)^k a = (xu)^{k-1}x \cdot ua \in S^1 ua$. Аналогично, равенство $af = a$ влечет $a \mathscr{R} av$. Отсюда $ua \mathscr{R} uav = b$, так как отношение $\mathscr{R}$ стабильно слева. Видим, что $a \mathscr{L} ua \mathscr{R} b$, т.е. $a \mathscr{L}\mathscr{R} b$. Мы показали, что $a \mathscr{D} b$. □

Мы видим, что $\mathscr{D} = \mathscr{J}$ в весьма широких классах полугрупп: в периодических полугруппах, в коммутативных полугруппах, в группах, в моноиде всех преобразований произвольного множества (см. следствие 2.1). Может возникнуть подозрение, что $\mathscr{D} = \mathscr{J}$ всегда. Это не так, хотя указать конкретный пример полугруппы, в которой $\mathscr{D} \neq \mathscr{J}$, не так легко. Приведем один такой пример, в котором различие между $\mathscr{D}$ и $\mathscr{J}$ максимально возможное.

Упражнение 3.1. *Проверьте, что в подполугруппе полугруппы всех действительных 2×2-матриц, состоящей из всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix}$, где числа a и b положительны, отношение $\mathscr{D}$ совпадает с отношением равенства, а отношение $\mathscr{J}$ – с универсальным отношением.*

Предложение 3.2 (Теорема Миллера–Клиффорда)**.** *Пусть $a, b \in S$, тогда $ab \in R_a \cap L_b$ тогда и только тогда, когда пересечение $R_b \cap L_a$ содержит идемпотент.*

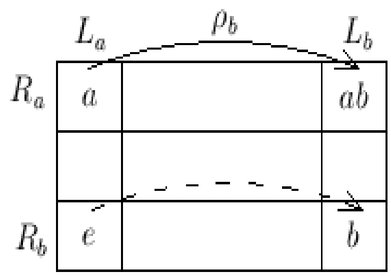

Рис. 3.1: Иллюстрация к теореме Миллера–Клиффорда

Доказательство. $\Rightarrow$ Если $ab \in R_a \cap L_b$, то по лемме Грина $\rho_b|_{L_a}$ – биекция L_a на L_b. Пусть $e \in R_b \cap L_a$ – такой элемент, что $e\rho_b = eb = b$. Тогда $e\mathscr{R}b$, в частности, $e = bu$ для некоторого $u \in S^1$. Имеем $e^2 = e(bu) = (eb)u = bu = e$, т.е. e – идемпотент.
$\Leftarrow$ Пусть e – идемпотент из $R_b \cap L_a$. Из $e\mathscr{R}b$ следует, что $eb = b$, а из $e\mathscr{L}a$ следует, что $ae = a$. Умножив соотношение $e\mathscr{R}b$ слева на a, получим $a = ae\mathscr{R}ab$. Аналогично, умножив соотношение $e\mathscr{L}a$ справа на b, получим $b = eb\mathscr{R}ab$. Следовательно $ab \in R_a \cap L_b$. □

Следствие 3.1. *Пусть H – $\mathscr{H}$-класс, тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) H содержит идемпотент;

(2) существуют $a, b \in H$, такие, что $ab \in H$;

(3) H – группа.

Доказательство. Импликации (1) $\Rightarrow$ (2) и (3) $\Rightarrow$ (1) очевидны.
(2) $\Rightarrow$ (3) Имеем $H = R_a \cap L_b = R_b \cap L_a$. По теореме Миллера–Клиффорда в H найдется идемпотент e. Применяя ту же теорему в обратную сторону, заключаем, что для любых $g, h \in H$ произведение gh принадлежит H, т.е. H – полугруппа. Для любого $h \in H$ отображение $\rho_h|_H$ – биекция H на H. Отсюда, в частности, следует, что $ge = g$ для любого $g \in H$. В силу симметричных рассуждений $eg = g$ для любого $g \in H$, т. е. e – единица в H. Наконец, из того, что $\rho_h|_H$ – биекция H на H, следует, что для любого $h \in H$ существует элемент h', такой, что $h'h = e$. Следовательно H – группа. □

Заметим, что если H – группа, то H – максимальная подгруппа. Действительно, если G – какая-то подгруппа полугруппы S, то любые два элемента $g, h \in G$ делят друг друга и справа, и слева: $g = h \cdot h^{-1}g$, $h = g \cdot g^{-1}h$ и аналогично слева. Поэтому G содержится в некотором $\mathscr{H}$-классе H. Поскольку H содержит идемпотент (а именно, единицу подгруппы G), по только что доказанному следствию H есть подгруппа. Итак, каждая подгруппа полугруппы содержится ровно в одной максимальной подгруппе, а именно, в $\mathscr{H}$-классе единицы этой подгруппы.

Предложение 3.3. *Любые две максимальные подгруппы внутри одного $\mathscr{D}$-класса изоморфны.*

Доказательство. Пусть H_1 и H_2 – две такие подгруппы. По следствию из теоремы Миллера–Клиффорда существуют идемпотенты e и f такие, что $H_1 = H_e$ и $H_2 = H_f$. Поскольку все происходит внутри одного $\mathscr{D}$-класса, имеем $e \mathscr{D} f$. Таким образом, $e \mathscr{R} a \mathscr{L} f$ для некоторого $a \in S$. Из того, что $a \mathscr{L} f$, получаем, что существует элемент $a' \in S^1$, для которого $f = a'a$.

На H_e рассмотрим отображение, определенное правилом $x \mapsto a'xa$. Из леммы Грина и утверждения, двойственного к ней, следует, что это отображение есть биекция H_e на H_f. Осталось проверить, что это отображение является гомоморфизмом.

Заметим, что $aa'a = af = a$. Отсюда $(aa')(aa') = (aa'a)a' = aa'$, т. е. aa' — идемпотент из R_a.

Для произвольных $x, y \in H_e$, поскольку $(aa')y = y$, получаем

$$(a'xa)(a'ya) = a'x(aa'y)a = a'xya,$$

что и показывает, что отображение $x \mapsto a'xa$ есть гомоморфизм. □

Элемент $a \in S$ называется *регулярным*, если существует такой $x \in S$, что $axa = a$. Класс отношения Грина называется *регулярным*, если все его элементы регулярны.

Предложение 3.4. *Пусть D – некоторый $\mathscr{D}$-класс. Следующие условия эквивалентны:*

(1) D – регулярный $\mathscr{D}$-класс;

(2) в D есть регулярный элемент;

(3) каждый $\mathscr{R}$-класс внутри D содержит идемпотент;

(4) каждый $\mathscr{L}$-класс внутри D содержит идемпотент;

(5) в D есть идемпотент;

(6) существуют такие $x, y \in D$, что $xy \in D$.

Доказательство. Эквивалентность условий (1)–(5) вытекает из следующей леммы и двойственного ей утверждения:

Лемма 3.2. *$\mathscr{R}$-класс регулярен тогда и только тогда, когда он содержит идемпотент.*

Доказательство. Пусть $a \mathscr{R} e$, где e — идемпотент. Тогда существует такой элемент $u \in S^1$, что $e = au$. Имеем следующую цепочку равенств: $a = ea = e^2a = (au)ea = a(ue)a$. Поскольку $ue \in S$, видим, что элемент a регулярен.

Обратно, если $axa = a$ для некоторого $x \in S$, то ax — идемпотент, лежащий в R_a. □

Очевидно, что (5) $\Rightarrow$ (6), а импликация (6) $\Rightarrow$ (5) следует из теоремы Миллера–Клиффорда. □

Литература

[1] Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. М.: Мир., 1965.

[2] Е. Вигнер. Непостижимая эффективность математики в естественных науках. Успехи физических наук. 1968. Т.94, №3. С.535–546.

[3] Э. Хилле. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд. иностранной литературы, 1951.

[4] J. M. Howie. Semigroups, past, present and future. In: Wanida Hemakul (ed.), "Proceedings of the International Conference on Algebra and its Applications", Chulalongkorn Univ., Bangkok, Thailand, 2002, P.6–20.