Лекция 2

2.1 Отношения Грина в моноиде преобразований

Пусть X – множество. Его *преобразование* – это произвольное отображение множества X в себя. Через T_X обозначим множество всех преобразований множества X.

Преобразования множества X можно перемножать: произведение $\alpha\beta$ преобразований $\alpha \in T_X$ и $\beta \in T_X$ – это результат их последовательного выполнения. Таким образом, $x(\alpha\beta) := (x\alpha)\beta$ для любого $x \in X$. (Заметим, что мы пишем преобразования **справа** от аргумента.)

Если α и β мыслить как бинарные отношения, т.е. отождествить α с отношением $\{(x, y) \in X \times X \mid x\alpha = y\}$ и аналогично β с отношением $\{(x, y) \in X \times X \mid x\beta = y\}$, то несложно проверить, что произведение α и β как преобразований совпадает с их произведением как отношений.

Легко видеть, что умножение преобразований ассоциативно, поэтому множество T_X является полугруппой. Тождественное преобразование, которое переводит каждый элемент множества X в самого себя, служит единицей этой полугруппы. Итак, T_X – моноид. Мы будем называть его *моноидом всех преобразований множества* X; в литературе для этого объекта встречается термин *симметрический моноид на* X.

Для $\alpha \in T_X$ через $\operatorname{Im}\alpha$ обозначается *образ* α, т. е. множество

$$\{y \in X \mid \exists x \in X \colon y = x\alpha\},$$

а через $\ker\alpha$ обозначается *ядро* α, т. е. разбиение множества X, при котором элементы $x, y \in X$ принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда $x\alpha = y\alpha$. Заметим, что мощность множества классов разбиения $\ker\alpha$ (обозначаемая $|\ker\alpha|$) равна мощности $|\operatorname{Im}\alpha|$ множества $\operatorname{Im}\alpha$.

Отношения Грина в моноиде всех преобразований множества легко описать в терминах ядер и образов.

Предложение 2.1. *Для любых* $\alpha, \beta \in T_X$ *имеем:*

1. $\alpha \leq_{\mathscr{L}} \beta \iff \operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$;

2. $\alpha \leq_{\mathscr{R}} \beta \iff \ker\alpha \supseteq \ker\beta$;

3. $\alpha \leq_{\mathscr{J}} \beta \iff |\operatorname{Im}\alpha| \leq |\operatorname{Im}\beta|$.

Доказательство. (1) Если $\alpha \leq_{\mathscr{L}} \beta$, то существует такое преобразование $\gamma \in T_X$, что $\alpha = \gamma\beta$. Тогда $\operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\gamma\beta = (\operatorname{Im}\gamma)\beta \subseteq \operatorname{Im}\beta$.

Обратно, если $\operatorname{Im}\alpha \subseteq \operatorname{Im}\beta$, то для каждого $x \in X$ существует такой $y \in X$, что $x\alpha = y\beta$. Рассмотрим отображение γ, сопоставляющее каждому x один из таких y. Тогда $\alpha = \gamma\beta$.

(2) Если $\alpha \leq_{\mathscr{R}} \beta$, то существует такое преобразование $\gamma \in T_X$, что $\alpha = \beta\gamma$. Пусть $(x, y) \in \ker\beta$, т.е. $x\beta = y\beta$. Тогда $x\alpha = x\beta\gamma = y\beta\gamma = y\alpha$. Это значит, что $(x, y) \in \ker\alpha$.

Обратно, пусть $\ker\alpha \supseteq \ker\beta$. Рассмотрим отношение

$$\beta^{-1} := \{(x, y) \in X \times X \mid x = y\beta\}.$$

Перемножив (по правилу умножения бинарных отношений) β^{-1} и α, получим отношение $\gamma = \beta^{-1}\alpha$. Ясно, что $\alpha = \beta\gamma$. Осталось проверить, что γ на самом деле является отображением и потому принадлежит T_X. Действительно, допустим, что $(x, y_1), (x, y_2) \in \gamma$ для каких-то $x, y_1, y_2 \in X$. Тогда существуют такие элементы $z_1, z_2 \in X$, что $(x, z_1), (x, z_2) \in \beta^{-1}$ и $(z_1, y_1), (z_2, y_2) \in \alpha$, т.е. $z_1\alpha = y_1$ и $z_2\alpha = y_2$. По определению β^{-1} имеем $z_1\beta = x = z_2\beta$, откуда $(z_1, z_2) \in \ker\beta$. В силу включения $\ker\alpha \supseteq \ker\beta$ имеем $(z_1, z_2) \in \ker\alpha$, откуда $z_1\alpha = z_2\alpha$, т.е. $y_1 = y_2$.

(3) Если $\alpha \leq_{\mathscr{J}} \beta$, то существуют такие преобразования $\gamma, \delta \in T_X$, что $\alpha = \gamma\beta\delta$. Отсюда немедленно получаем, что

$$\begin{aligned}
|\operatorname{Im}\alpha| &= |\operatorname{Im}\gamma\beta\delta| \\
&= |(\operatorname{Im}\gamma)\beta\delta| \\
&\leq |\operatorname{Im}\beta\delta| && \text{так как } (\operatorname{Im}\gamma)\beta\delta \subseteq \operatorname{Im}\beta\delta \\
&= |(\operatorname{Im}\beta)\delta| \\
&\leq |\operatorname{Im}\beta|.
\end{aligned}$$

Обратно, рассмотрим отображение $\varepsilon\colon X \to X$, которое каждому классу $\ker\alpha$ сопоставляет какой-то элемент из $\operatorname{Im}\beta$ так, что разным классам соответствуют разные элементы. Поскольку $|\ker\alpha| = |\operatorname{Im}\alpha| \leq |\operatorname{Im}\beta|$, организовать такое отображение возможно. Так как $\ker\varepsilon = \ker\alpha$, по пункту (2) имеем $\alpha \leq_{\mathscr{R}} \varepsilon$. Далее, $\operatorname{Im}\varepsilon \subseteq \operatorname{Im}\beta$, поэтому по пункту (1) имеем $\varepsilon \leq_{\mathscr{L}} \beta$. Отсюда $\alpha \leq_{\mathscr{J}} \varepsilon \leq_{\mathscr{J}} \beta$ и потому $\alpha \leq_{\mathscr{J}} \beta$. □

Следствие 2.1. *Для любых $\alpha, \beta \in T_X$ имеем:*

1. $\alpha \mathrel{\mathscr{L}} \beta \iff \operatorname{Im}\alpha = \operatorname{Im}\beta$*;*
2. $\alpha \mathrel{\mathscr{R}} \beta \iff \ker\alpha = \ker\beta$*;*
3. $\alpha \mathrel{\mathscr{J}} \beta \iff \alpha \mathrel{\mathscr{D}} \beta \iff |\operatorname{Im}\alpha| = |\operatorname{Im}\beta|$.

Доказательство. Пункты (1) и (2) сразу же следуют из соответствующих пунктов предложения 2.1. Из пункта (3) предложения 2.1 следует, что если $\alpha \mathrel{\mathscr{J}} \beta$, то $|\operatorname{Im}\alpha| = |\operatorname{Im}\beta|$. Обратно, если $|\operatorname{Im}\alpha| = |\operatorname{Im}\beta|$, то используя прием из доказательства упомянутого пункта, организуем такое отображение $\varepsilon\colon X \to X$, что $\ker\varepsilon = \ker\alpha$ и $\operatorname{Im}\varepsilon \subseteq \operatorname{Im}\beta$. Тогда по уже доказанному $\alpha \mathrel{\mathscr{R}} \varepsilon$ и $\varepsilon \mathrel{\mathscr{L}} \beta$, откуда $\alpha \mathrel{\mathscr{D}} \beta$ по определению отношения $\mathscr{D}$. Импликация $\alpha \mathrel{\mathscr{D}} \beta \Rightarrow \alpha \mathrel{\mathscr{J}} \beta$ верна в любой полугруппе. □

2.2 Лемма Грина

Пусть S – полугруппа и $a \in S$. Договоримся обозначать

$\mathscr{R}$-класс, содержащий a, через R_a;
$\mathscr{L}$-класс, содержащий a, через L_a;
$\mathscr{H}$-класс, содержащий a, через H_a;
$\mathscr{D}$-класс, содержащий a, через D_a.

Заметим, что $H_a = L_a \cap R_a$ для любого a.

Лемма 2.1. *Пусть L – $\mathscr{L}$-класс, R – $\mathscr{R}$-класс. Тогда $R \cap L \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда L и R содержатся в одном $\mathscr{D}$-классе.*

Доказательство. Пусть $a \in L \cap R$. Тогда ясно, что $L = L_a$ и $R = R_a$ содержатся в $\mathscr{D}$-классе D_a.

Обратно, пусть L и R содержатся в $\mathscr{D}$-классе D. Возьмем произвольные $x \in L$ и $y \in R$. Тогда $x \mathscr{D} y$, т.е. существует такой элемент a, что $x \mathscr{L} a \mathscr{R} y$. Тогда $a \in L \cap R$, откуда $L \cap R \neq \varnothing$. ☐

Лемма 2.1 подсказывает, что $\mathscr{D}$-классы удобно мыслить себе как прямоугольные таблицы (по традиции именуемые *egg-box картинками*), в которых строки изображают $\mathscr{R}$-классы, столбцы – $\mathscr{L}$-классы, а ячейки – $\mathscr{H}$-классы.

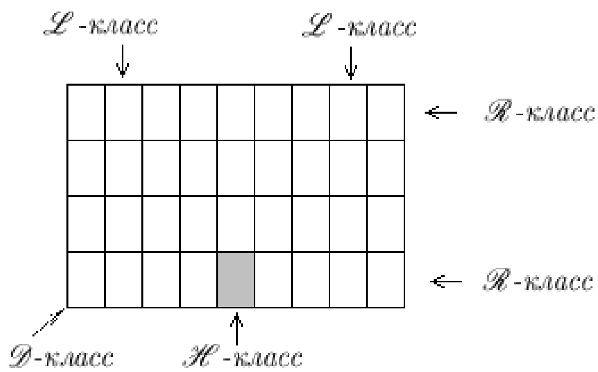

Рис. 2.1: egg-box картинка

Следующий важный результат показывает, что элементы каждого $\mathscr{D}$-класса распределены по ячейкам соответствующей egg-box картинки равномерно.

Теорема 2.1 (Лемма Грина)**.** *Пусть $a \mathscr{R} b$. Зафиксируем $u, v \in S^1$, такие, что $au = b$ и $bv = a$, и рассмотрим отображения $\rho_u\colon S \to S$, задаваемое правилом $x\rho_u := xu$, и $\rho_v\colon S \to S$, задаваемое правилом $x\rho_v := xv$. Тогда ограничение ρ_u на класс L_a – это биекция L_a на L_b, ограничение ρ_v на класс L_b – обратная к ней биекция, и оба ограничения сохраняют $\mathscr{H}$-классы.*

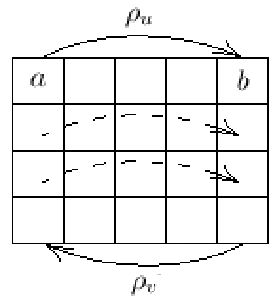

Рис. 2.2: Иллюстрация к лемме Грина

Доказательство. Возьмем произвольный элемент $x \in L_a$. Из $x \mathscr{L} a$ следует, что $xu \mathscr{L} au = b$, поскольку отношение $\mathscr{L}$ стабильно справа. Следовательно, $L_a\rho_u \subseteq L_b$. Далее, существует элемент $t \in S^1$, такой, что $x = ta$. Имеем

$$x\rho_u\rho_v = xuv = tauv = tbv = ta = x,$$

т. е. ограничение ρ_v на класс L_b – обратное отображение к ограничению ρ_u на класс L_a.

Получается, что ограничение ρ_v на класс L_b отображает L_b на L_a, следовательно, ограничения ρ_u и ρ_v на соответственно L_a на L_b – взаимно обратные биекции. Поскольку $xuv = x$, имеем $x\mathscr{R}xu$, и если $x \mathscr{H} y$, то $xu \mathscr{H} yu$. Обратно, если $xu \mathscr{H} yu$, то $x \mathscr{H} y$ $\square$

В качестве примера рассмотрим $\mathscr{D}$-строение моноида T_3 всех преобразований 3-элементного множества $\{1, 2, 3\}$. Согласно доказанному в §2.1, у него ровно три $\mathscr{D}$-класса: класс D_3 всех преобразований с 3-элементным образом, класс D_2 всех преобразований с 2-элементным образом и класс D_1 всех преобразований с 1-элементным образом. Ясно, что преобразование 3-элементного множества, образ которого 3-элементен, есть не что иное как перестановка этого множества. Таким образом, класс D_3 состоит из 6 перестановок исходного множества. Класс D_1 состоит из трех константных преобразований. Интереснее всего устроен класс D_2. Его egg-box картинка показана ниже.

	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$
$1 \mid 23$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&2\end{smallmatrix}\right)$
$2 \mid 13$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&2&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&1&2\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&3&1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&1&3\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&3&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&2&3\end{smallmatrix}\right)$
$3 \mid 12$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&1&2\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&2&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\1&1&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&3&1\end{smallmatrix}\right)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\2&2&3\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1&2&3\\3&3&2\end{smallmatrix}\right)$

Таблица 2.1: $\mathscr{D}$-класс моноида T_3, состоящий из всех преобразований с 2-элементным образом. Над каждым $\mathscr{L}$-классом показано параметризующее его 2-элементное подмножество, а левее каждого $\mathscr{R}$-класса – параметризующее его разбиение.

Литература

[1] Н. Бурбаки. Очерки по истории математики. М.: Мир., 1965.

[2] Е. Вигнер. Непостижимая эффективность математики в естественных науках. Успехи физических наук. 1968. Т.94, №3. С.535–546.

[3] Э. Хилле. Функциональный анализ и полугруппы. М.: Изд. иностранной литературы, 1951.

[4] J. M. Howie. Semigroups, past, present and future. In: Wanida Hemakul (ed.), “Proceedings of the International Conference on Algebra and its Applications”, Chulalongkorn Univ., Bangkok, Thailand, 2002, P.6–20.