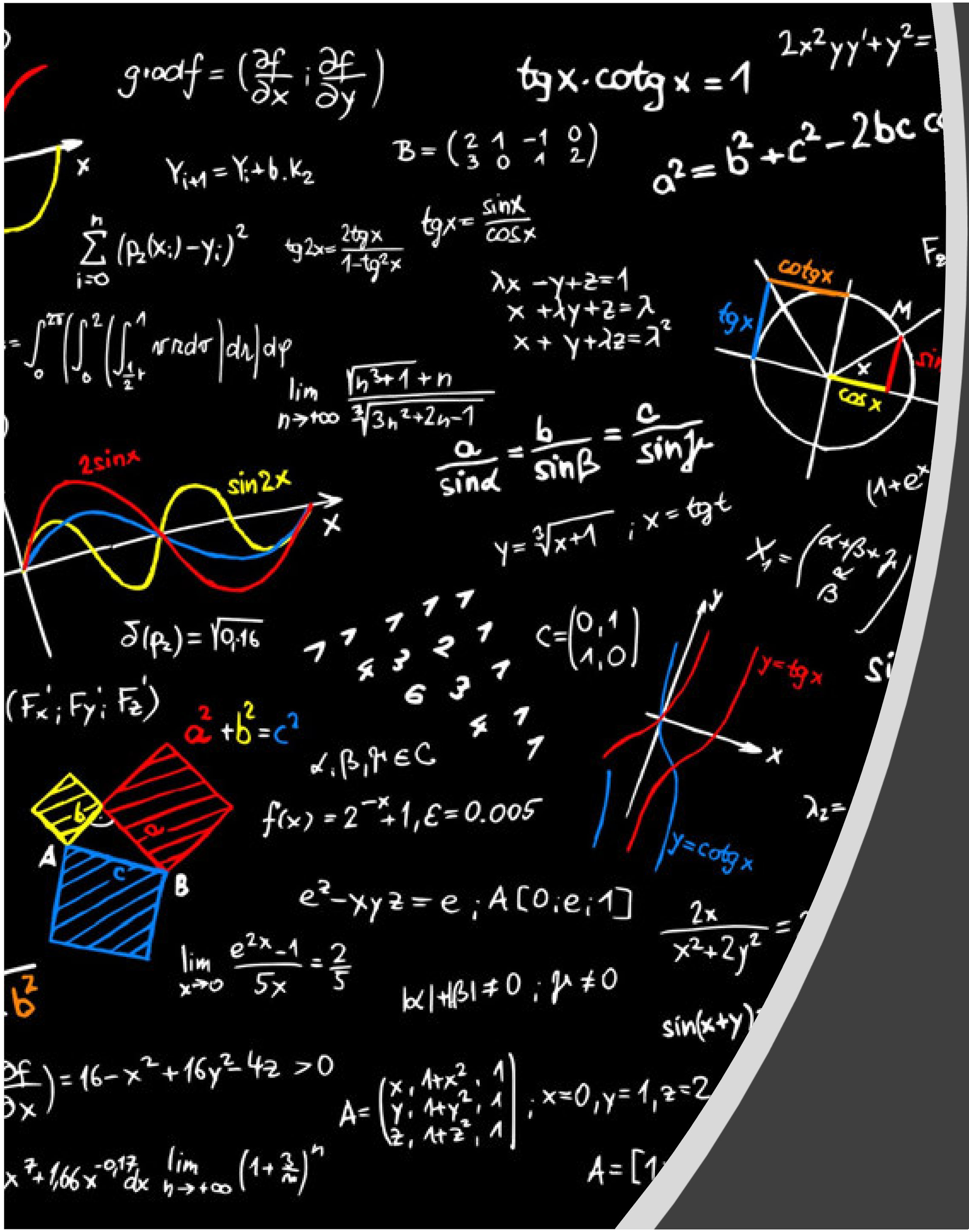


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III семестр (II курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 1

Экстремумы функций нескольких переменных

Лекция 1

Экстремумы ФНП

1. Дифференциал второго порядка ФНП.
2. Определение локального экстремума ФНП (locextr).
3. Необходимое условие locextr ФНП
4. Достаточное условие locextr ФНП через вторые дифференциалы
5. Достаточное условие locextr ФНП через вторые производные

Дифференциал второго порядка функции двух переменных

Опр. Дифференциалом второго порядка функции $z = f(x, y)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка

$$d^2 z = d(dz)$$

при условии, что $dx = const, dy = const$.

Дифференциал второго порядка функции двух переменных

$$d^2z = d\left(dz\right) = d\underbrace{\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy\right)}_{A} =$$

$$= dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy$$

Дифференциал второго порядка функции двух переменных

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\begin{bmatrix} dx=const \\ dy=const \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}dy;$$

Дифференциал второго порядка функции двух переменных

$$\frac{\partial A}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}dx\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}dy\right)=\begin{bmatrix} dx=const \\ dy=const \end{bmatrix}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)dx+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)dy=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}dx+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy$$

Дифференциал второго порядка функции двух переменных

$$d^2z = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy =$$

$$= \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2$$

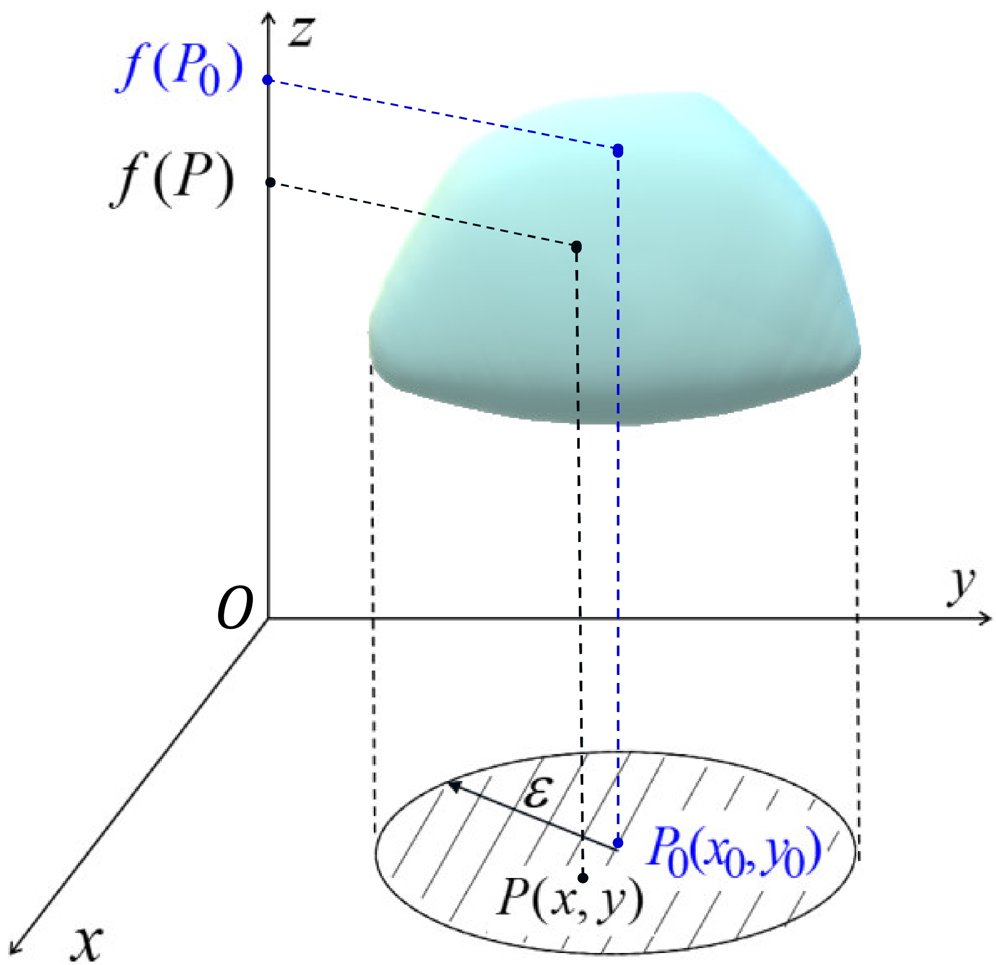
Дифференциал второго порядка функции двух переменных

$$\boxed{d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2}$$

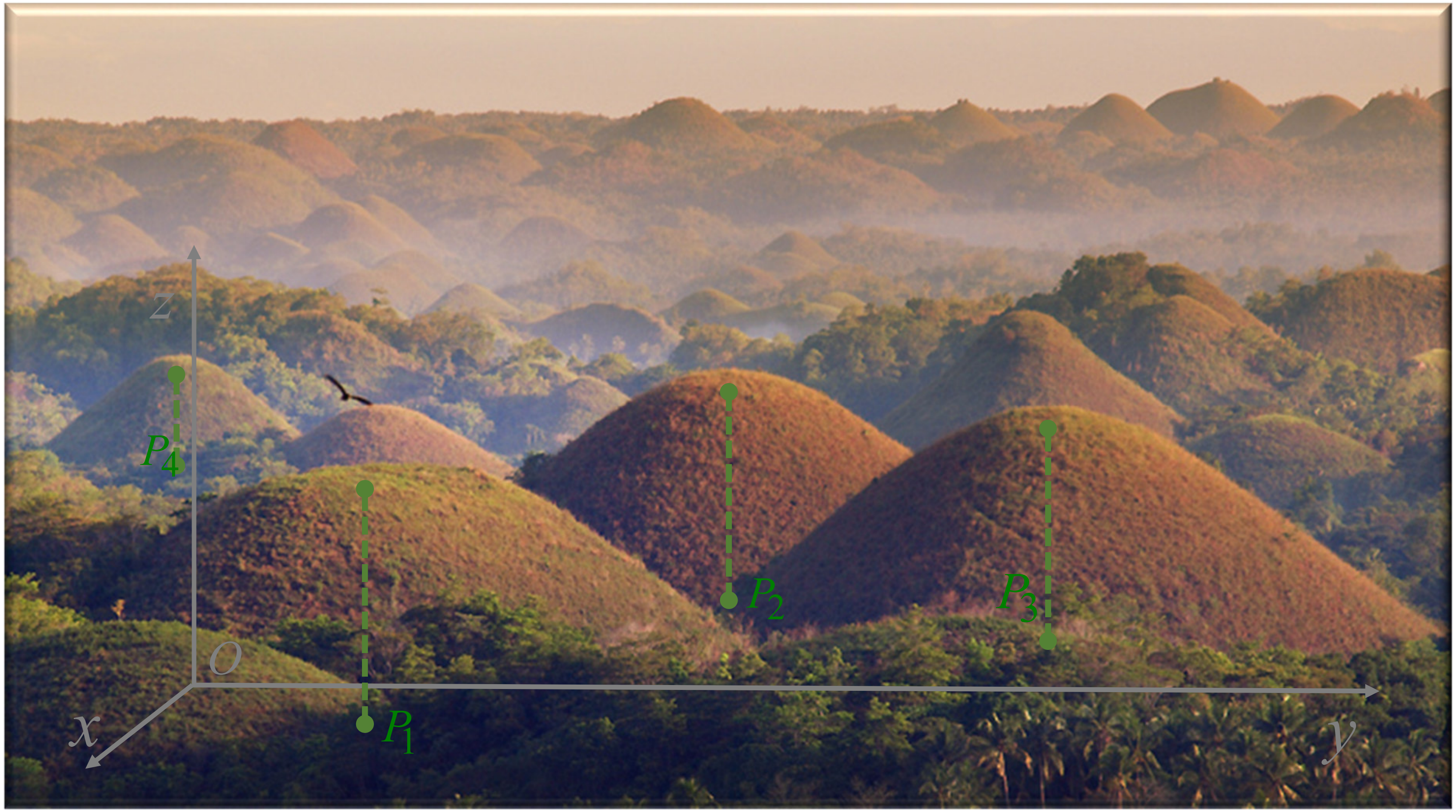
Экстремум функции двух переменных (определение)

<u>Опр</u>. Пусть функция определена в $O(P_0)$. Точка $P_0(x_0, y_0)$ называется точкой локального максимума (локального минимумума) функции $z = f(x, y)$, если в некоторой окрестности функция $z = f(x, y)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение в этой точке.

Локальный максимум Ф2П (иллюстрация)



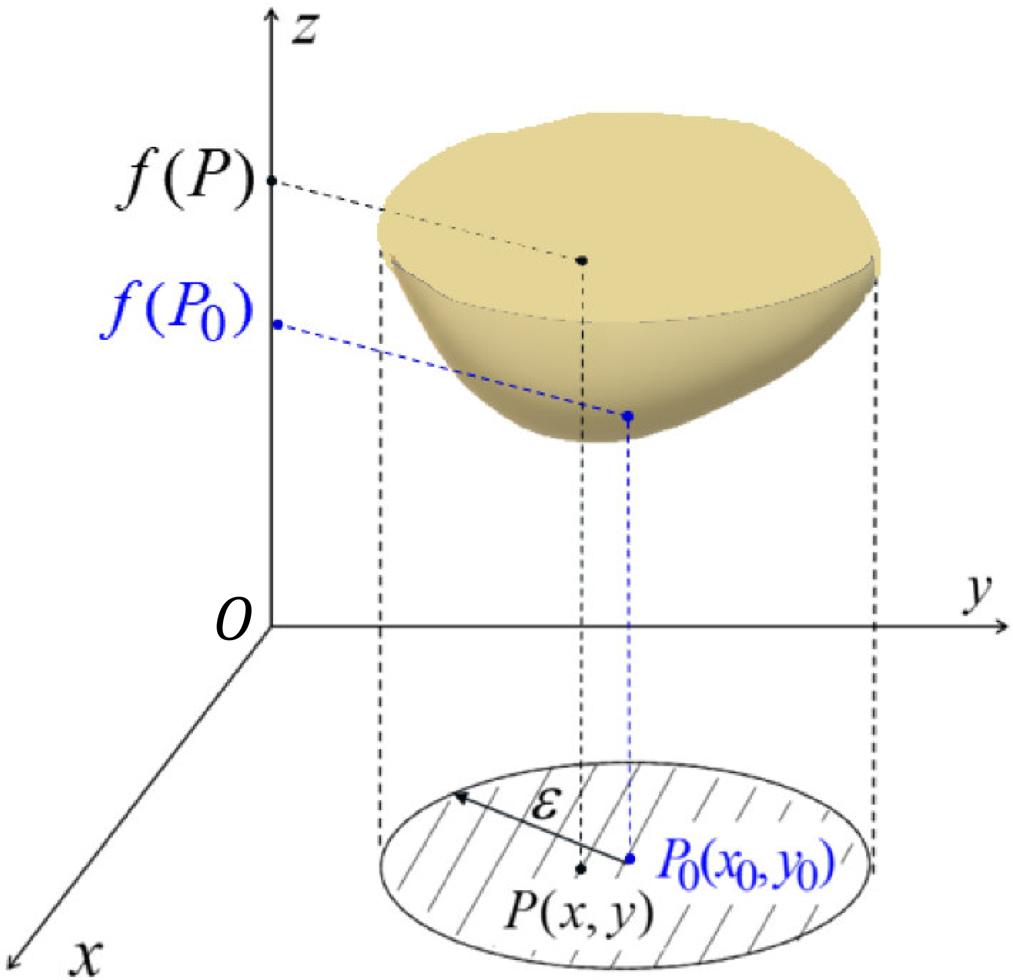
Локальный максимум Ф1П (иллюстрация)



Филлипины. «Шоколадные холмы»

Этот слайд можно не конспектировать

Локальный минимум Ф2П (иллюстрация)



Необходимое условие экстремума Ф1П (повторение)

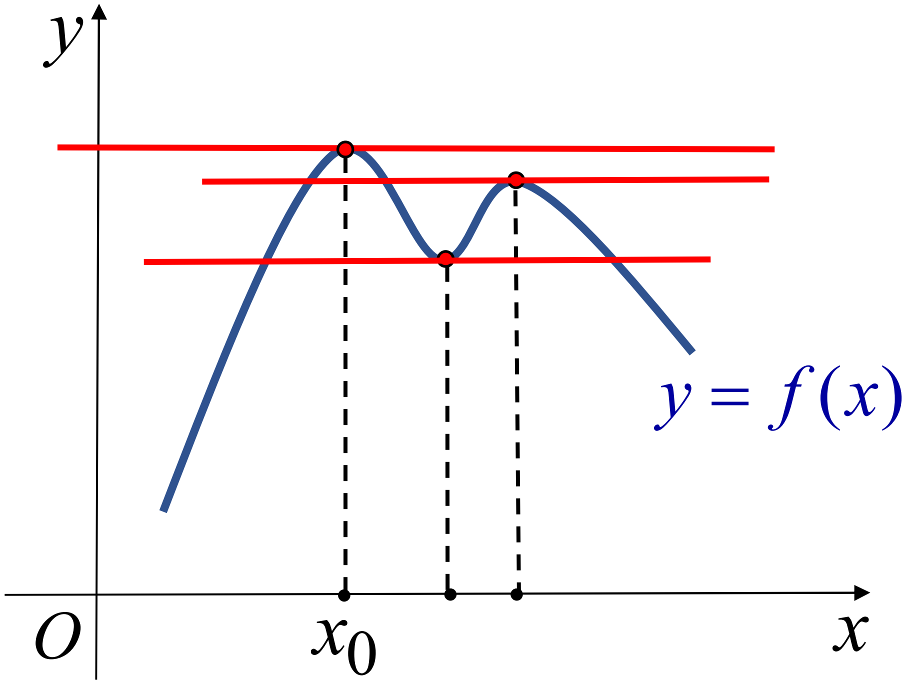
Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$, дифференцируема в точке $x = x_0$ и $\boldsymbol{x = x_0}$ **− точка локального экстремума**.

Тогда $\boxed{\boldsymbol{f'(x_0) = 0}}$

Необходимое условие экстремума для Ф1П не является достаточным!

Этот слайд можно не конспектировать

Необходимое условие экстремума Ф1П. Геометрическая интерпретация



Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ параллельна оси Ox.

Этот слайд можно не конспектировать

Достаточное условие экстремум Ф1П (повторение)

Теорема 2. Пусть функция $f(x)$ определена и дифференцируема в $O(x_0)$, $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$ и при **переходе через точку $\boldsymbol{x = x_0}$ производная $\boldsymbol{f'(x)}$ меняет знак.**

Тогда $\boldsymbol{x = x_0}$ **– точка локального экстремума**.

Этот слайд можно не конспектировать

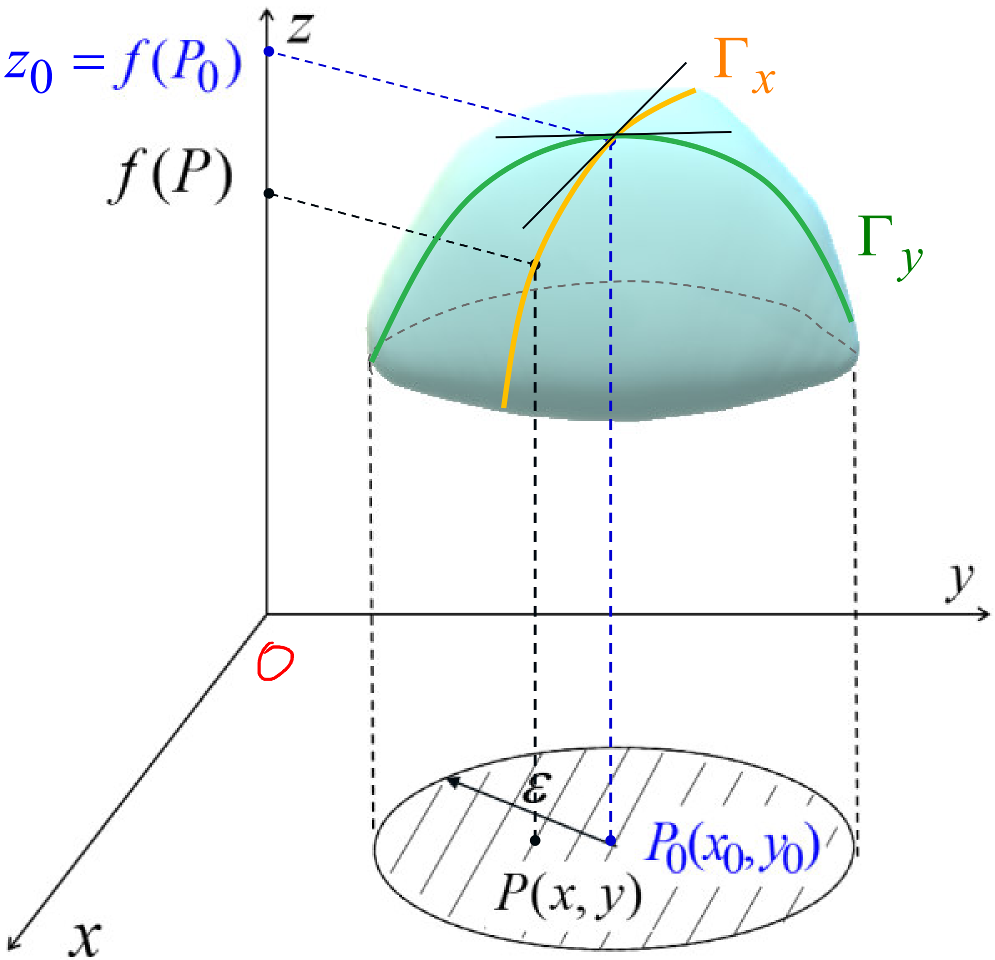
Необходимое условие экстремума Ф2П

Теорема 3. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P_0)$, дифференцируема в точке $P_0(x_0, y_0)$ и точка $P_0(x_0, y_0)$ − **точка локального экстремума**.

Тогда частные производные функции $z = f(x, y)$ в точке P_0 равны нулю:

$$\frac{\partial f\left(P_0\right)}{\partial x} = 0, \frac{\partial f\left(P_0\right)}{\partial y} = 0 \;\left(\text{т.е. } dz(P_0) = 0\right)$$

Геометрическое доказательство теоремы 3



Γ_x – *график кривой*

$z = f(x, y_0)$

Γ_y – *график кривой*

$z = f(x_0, y)$

$x = x_0$ – точка *locextr* для функции $z = f(x, y_0) \Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} = 0$$

$y = y_0$ – точка *locextr* для функции $z = f(x_0, y) \Rightarrow$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} = 0$$

Геометрический смысл необходимого условия экстремума Ф2П

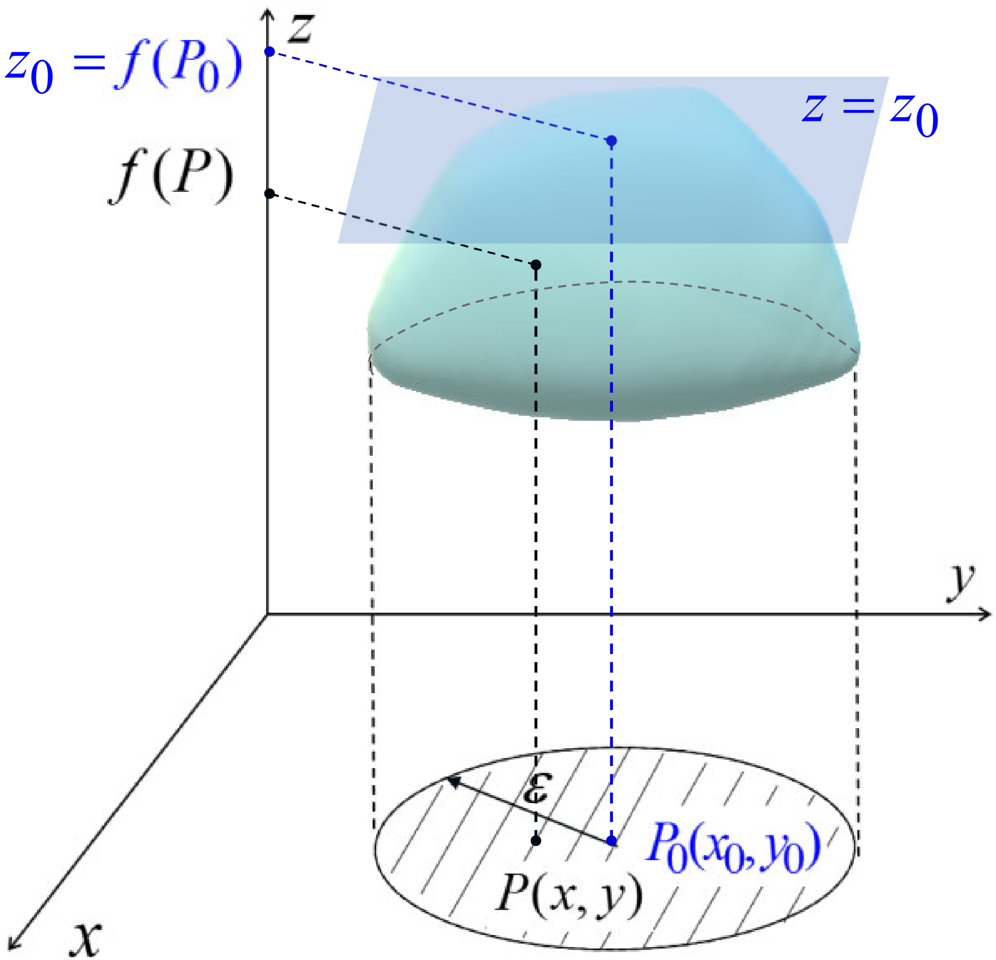
<u>Утверждение.</u> Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P_0)$, дифференцируема в точке $P_0(x_0, y_0)$ и точка $P_0(x_0, y_0)$ − **точка локального экстремума**.

Тогда уравнение касательной к поверхности $z = f(x, y)$ в точке P_0 задается уравнением $z = z_0$:

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{P_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{P_0} (y - y_0)$$

$$z - z_0 = 0 \cdot (x - x_0) + 0 \cdot (y - y_0)$$

Геометрическая интерпретация теоремы 3 (иллюстрация)



В точках локального экстремума дифференцируемой Ф2П касательная плоскость параллельна плоскости Oxy

Необходимое условие экстремума Ф2П

Точки возможного экстремума Ф2П:

- точки, в которых $dz = 0$ (**стационарные**)
- точки, в которых функция $z = f(x, y)$ не дифференцируема.

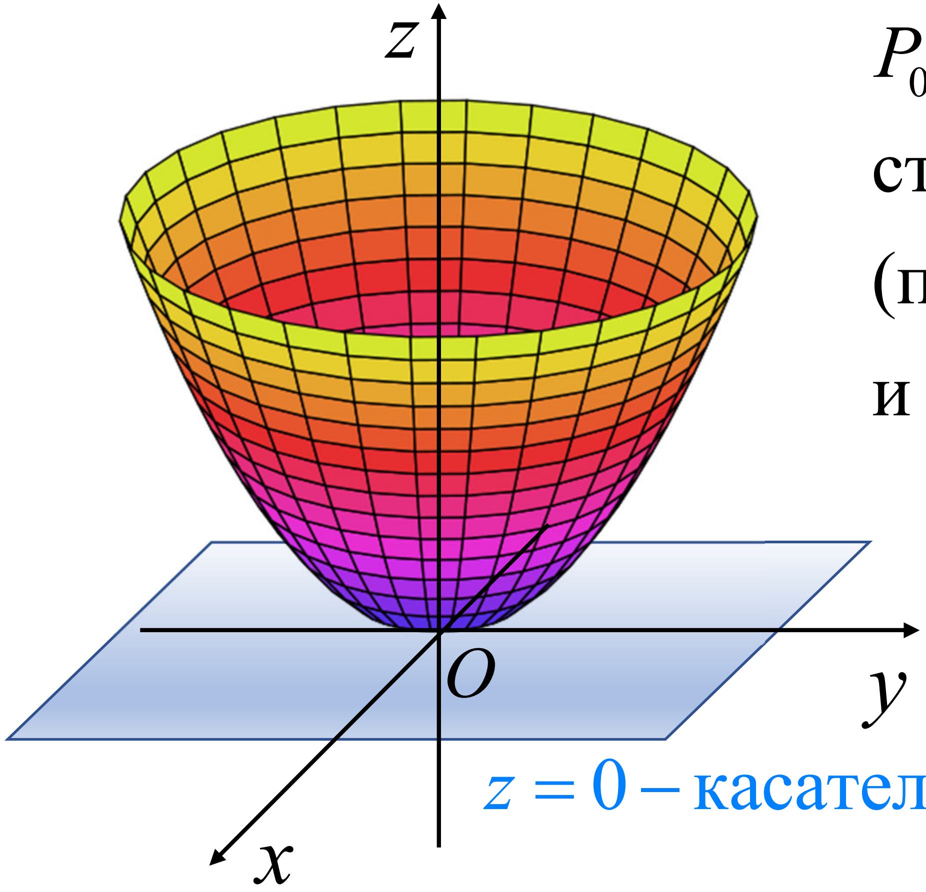
Необходимое условие экстремума Ф2П
Пример 3

Пример 3. Найти стационарные точки функции $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right| \Rightarrow P_0(0,0) - \textit{стационарная}\ \text{точка}$$

Необходимое условие экстремума Ф2П
Пример 3



$P_0(0,0) = O -$ стационарная точка (по определению) и точка $loc\min$

$z = 0 -$ касательная плоскость

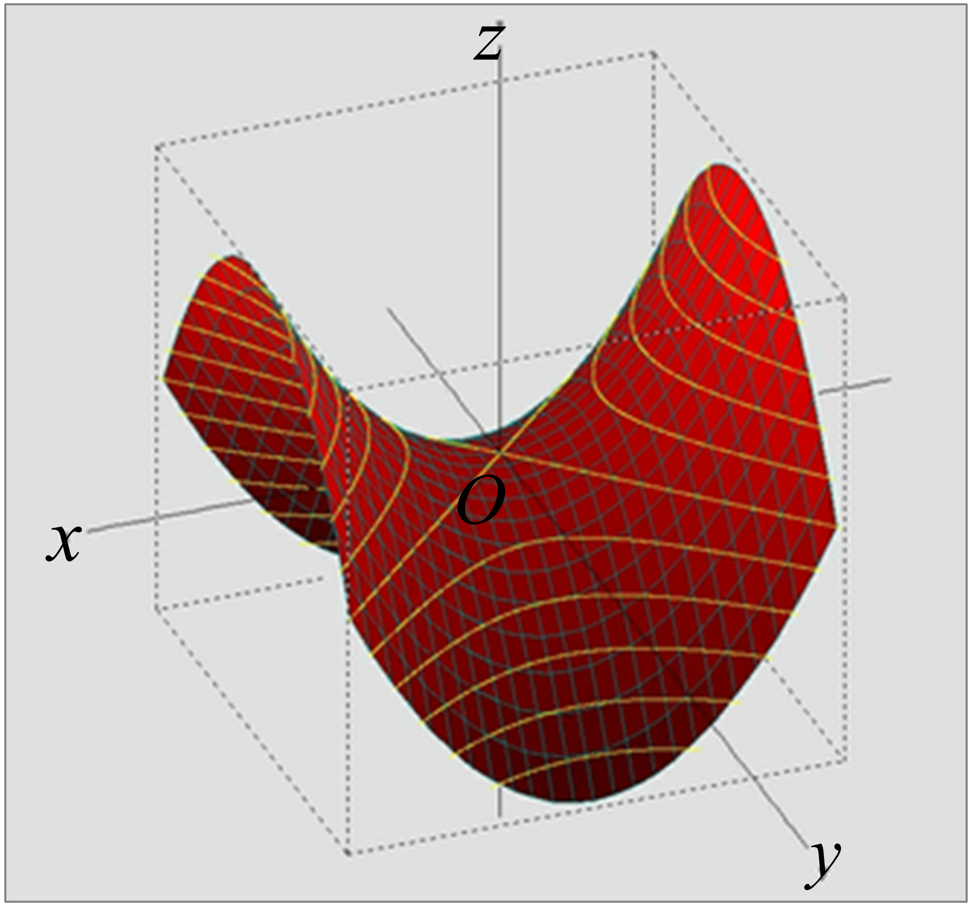
Необходимое условие экстремума Ф2П
Пример 4

Пример 3. Найти стационарные точки функции $z = f(x, y) = x^2 - y^2$.

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \; \frac{\partial f}{\partial y} = -2y$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \end{array}\right| \Rightarrow P_0(0, 0) - \textit{стационарная}\text{ точка}$$

Необходимое условие экстремума Ф2П
Пример 4



$P_0(0,0)=O$ – стационарная точка, которая не является точкой *locextr*

Необходимое условие экстремума для Ф2П не является достаточным!

Достаточное условие экстремума Ф2П через второй дифференциал

Теорема 4. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P_0)$ и ее вторые производные непрерывны в $O(P_0)$.

Тогда для любых dx, dy одновременно не равных нулю (т.е. таких, что $dx^2 + dy^2 \neq 0$) выполняется

Достаточное условие экстремума Ф2П через второй дифференциал

1). $d^2z(P_0) < 0$ (сохраняет знак «-»),

то P_0 - точка максимума,

2). $d^2z(P_0) > 0$ (сохраняет знак «+»),

то P_0 - точка минимума,

3). $d^2z(P_0)$ не сохраняет знака при изменении dx, dy,

то в точке P_0 нет экстремума.

Достаточное условие экстремума Ф2П через второй дифференциал. Док-во

$$\Delta z \approx dz\Big|_{P_0} + \frac{1}{2} d^2 z\Big|_{P_0} \text{ при } dx = \Delta x, dy = \Delta y \text{ (без док-ва)}$$

$$P_0 - \textit{стационарная} \Rightarrow dz\Big|_{P_0} = 0$$

$$\Downarrow$$

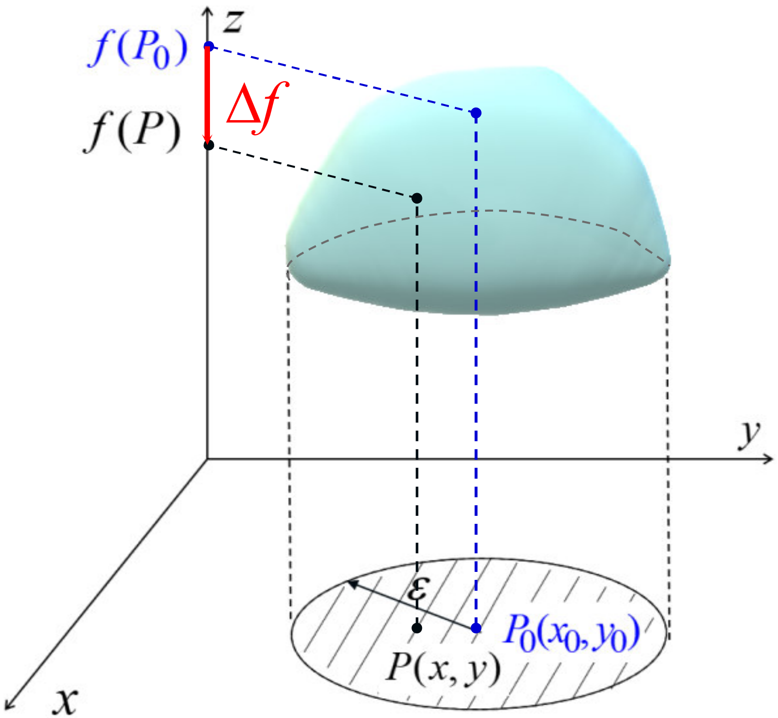
$$\Delta z < 0 \ (\Delta z > 0) \ \textit{для любых} \ \Delta x, \Delta y, \text{ т.ч. } \Delta x^2 + \Delta y^2 \neq 0,$$

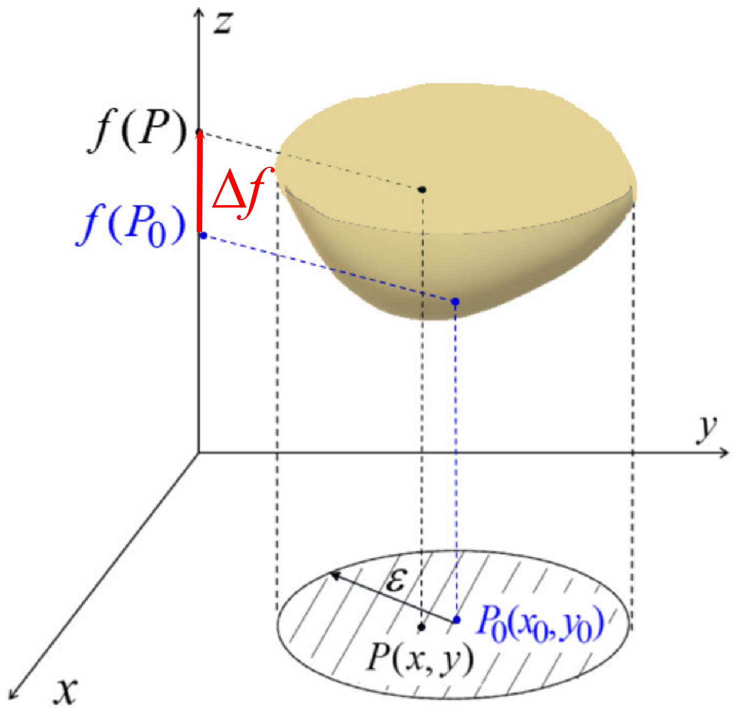
т.е. $P_0 -$ точка $loc \max$ $(loc \min) \Leftrightarrow$

$$d^2 z\Big|_{P_0} < 0 \left(d^2 z\Big|_{P_0} > 0 \right) \textit{для любых} \ dx, dy, \text{т.ч. } dx^2 + dy^2 \neq 0$$

■

Достаточное условие экстремума Ф2П через второй дифференциал





Необходимое условие экстремума Ф2П через второй дифференциал. Пример 5

<u>Пример 5.</u> Исследовать на локальный экстремум функцию $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ при помощи вторых дифференциалов

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_0} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \Rightarrow \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_0} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \Rightarrow$$

Необходимое условие экстремума Ф2П через второй дифференциал. Пример 4

$P_0(0,0) - \textit{стационарная}$ точка

$$d^2z\Big|_{P_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= 2dx^2 + 2dy^2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow d^2z\Big|_{P_0} > 0$ для любых dx, dy, одновременно

не равных нулю $\Rightarrow$ $P_0(0,0) -$ т. locmin

Необходимое условие экстремума Ф2П через второй дифференциал. Пример 6

Пример 6. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ при помощи вторых дифференциалов

$P_0(0,0) - \textit{стационарная}$ точка

$$d^2 z\Big|_{P_0} = 2dx^2 - 2dy^2 \Rightarrow$$

$d^2 z|_{P_0}$ не сохраняет знака при изменении знака dx, $dy \Rightarrow P_0$ не является точкой locextr.

Достаточное условие экстремума Ф2П через вторые производные

Теорема 5. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P_0)$, ее вторые производные непрерывны в $O(P_0)$ и

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},$$

где $A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right|_{P_0} (P_0),\ B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{P_0},\ C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\right|_{P_0}$ и точка $P_0 -$ стационарная точка. Тогда

- P_0 – точка максимума, если $\Delta > 0$, $A < 0$;
- P_0 – точка минимума, если $\Delta > 0$, $A > 0$;
- в точке P_0 экстремума нет, если $\Delta < 0$;
- требуется дополнит. исследование, если $\Delta = 0$.

Достаточное условие экстремума Ф2П через вторые производные

<u>Доказательство.</u> Рассмотрим случай, когда точка P_0 – точка locmax.

Стационарная точка P_0 – точка $loc\max \Leftrightarrow$

$$d^2z\Big|_{P_0} < 0 \;\; \textit{для любых}\; dx, dy, \text{т.ч.}\; dx^2 + dy^2 \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\; d^2z\Big|_{P_0} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\Bigg|_{P_0} dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\Bigg|_{P_0} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\Bigg|_{P_0} dy^2 = \right.$$

Достаточное условие экстремума Ф2П через вторые производные

Доказательство.

$$= Adx^2 + 2Bdxdy + Cdy^2 = dy^2\left(A\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 2B\frac{dx}{dy} + C\right) =$$

$$= dy^2\left(At^2 + 2Bt + C\right), \text{где } t = \frac{dx}{dy}\Bigg]$$

$$\Delta = AC - B^2$$

$$\Leftrightarrow dy^2\left(At^2 + 2Bt + C^2\right) < 0 \text{ для любого } t$$

$$\Leftrightarrow D = 4B^2 - 4AC = -4\cdot\Delta < 0 \text{ и } A < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A < 0 \text{ и } \Delta > 0 \;\blacksquare$$

Необходимое условие экстремума Ф2П через второй дифференциал. Пример 7

Пример 7. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ при помощи вторых производных.

$$z = f(x,y) = x^2 + y^2 \Rightarrow A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_0} = 2,\ C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_0} = 2,$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{P_0} = 0 \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$\Delta > 0\ ,\ A > 0 \Rightarrow P_0(0,0) - \text{ точка locmin}$$

Необходимое условие экстремума Ф2П через второй дифференциал. Пример 8

Пример 8. Исследовать на локальный экстремум функцию $z = f(x, y) = x^2 - y^2$ при помощи вторых производных.

$$z = f(x,y) = x^2 - y^2 \Rightarrow A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{P_0} = 2,\ C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{P_0} = -2,$$

$$B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{P_0} = 0 \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$\Delta < 0 \Rightarrow P_0(0,0) -$ не является точкой locextr