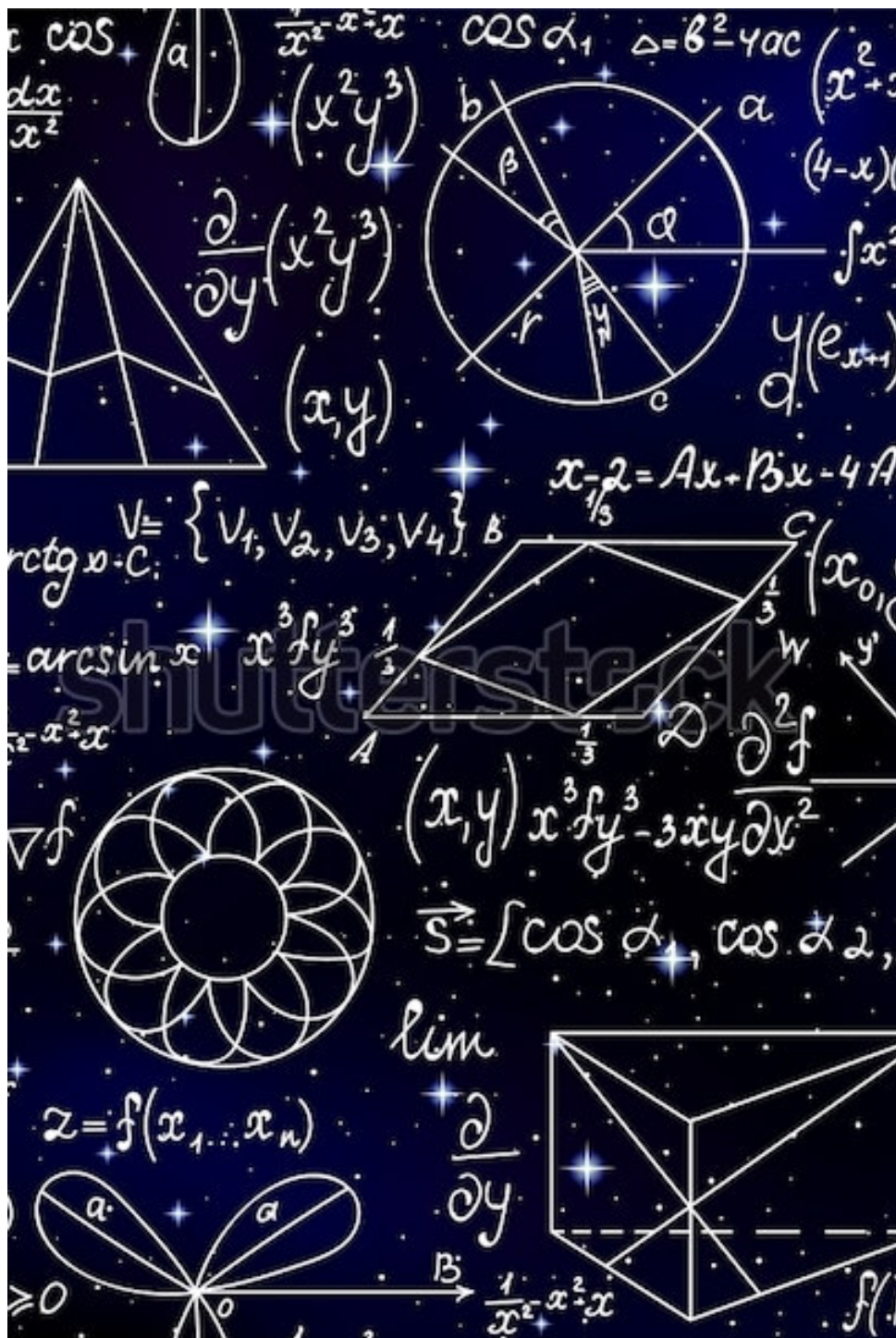




Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и
прикладной химии, III семестр (II курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 17 (часть 1)

Комплексные числа

Лекция 17 (часть 1)

Комплексные числа

1. Определение комплексного числа.
Алгебраическая форма комплексного числа.
2. Многочлены и комплексные числа. Теорема Гаусса.
3. Геометрическая интерпретация комплексных чисел. Комплексно-сопряженные числа.
4. Тригонометрическая и показательная формы комплексного числа.

Определение комплексного числа

Опр. **Комплексным числом** называется выражения вида $z = x + iy$ для действительных чисел x, y , для которых определены операции сложения (I) и умножения (II) (см. слайды). При этом считаем, что

$$i^2 = -1$$

Опр. Число i называется **мнимой единицей**.

Определение комплексного числа

Опр. Действительные числа x, y называются **действительной** и **мнимой** частями комплексного числа $z = x + iy$.

Обозначение: $x = \operatorname{Re} z, y = \operatorname{Im} z$.

Выражение $x + iy$ называется **алгебраической формой** комплексного числа z .

Опр. Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются **равными**, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Сложение и умножение комплексных чисел

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$.

Сложение:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad (\text{I})$$

Умножение:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = \\ &= x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2 y_1y_2 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad (\text{II})$$

Вычитание и деление комплексн. чисел

Вычитание:

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad (\text{III})$$

Деление:

$$\begin{aligned} (\text{IV}) \quad \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \\ &= \frac{x_1x_2 - ix_1y_2 + iy_1x_2 - \cancel{i^2}^{2^{-1}}y_1y_2}{x_2^2 - (iy_2)^2} = \end{aligned}$$

Вычитание и деление комплексн. чисел

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Операции над комплексными числами в алгебраической форме. Задача 1

Задача 1. Пусть $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 1 + 2i$.

Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение.

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 + 2i) = 3 + 5i$$

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (1 + 2i) = 1 + i$$

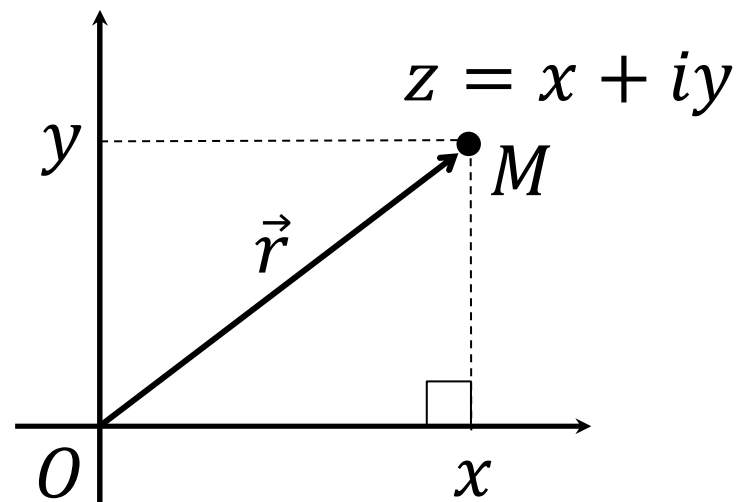
$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (2 + 3i)(1 + 2i) = 2 + 3i + 4i + 6i^2 = \\ &= 2 + 3i + 4i - 6 = -4 + 7i \end{aligned}$$

Операции над комплексными числами в алгебраической форме. Задача 1

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{2 + 3i}{1 + 2i} = \frac{(2 + 3i)(1 - 2i)}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \\&= \frac{2 + 3i - 4i - 6\overset{-1}{i^2}}{1 - 4\overset{-1}{i^2}} = \frac{2 + 3i - 4i + 6}{1 + 4} = \\&= \frac{8 - i}{5} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i\end{aligned}$$

Геометрическая интерпретация комплексного числа

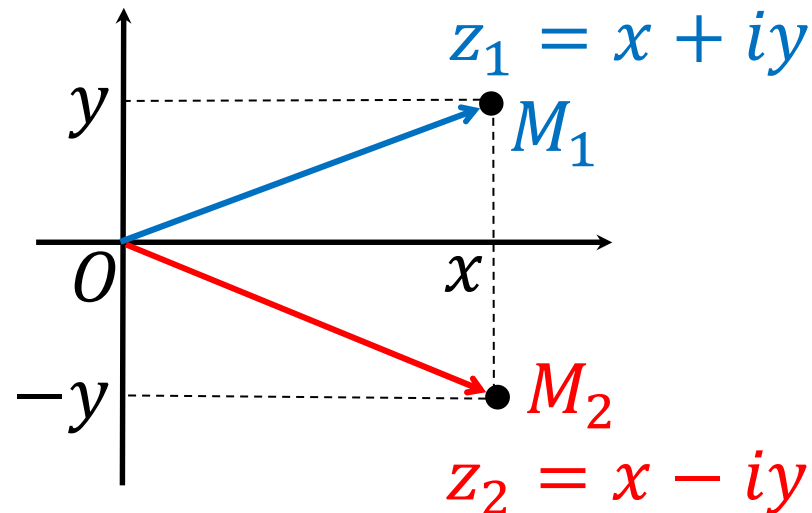
Опр. Геометрическая интерпретация комплексного числа $z = x + iy$ — это точка $M(x, y)$ или радиус-вектор $\vec{r}(x, y)$ в комплексной плоскости Oxy .



Комплексно-сопряженные числа

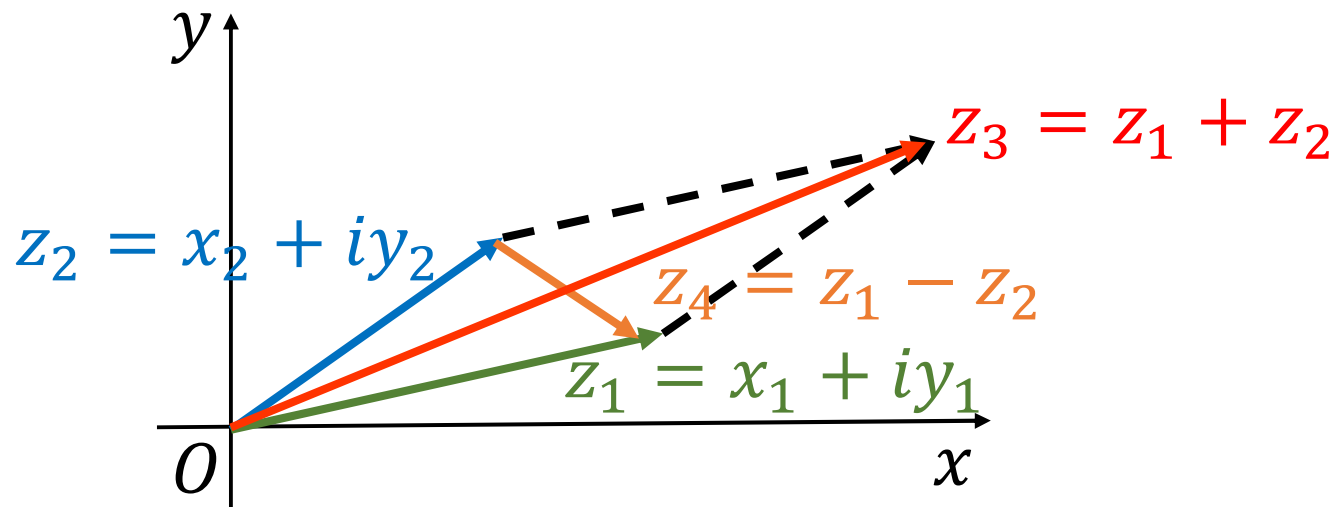
Опр. Число $z = x - iy$ называется **(комплексно) сопряженным** к числу $z = x + iy$.

Обозначение: $\bar{z} = \overline{x + iy}$. Числа $z_{1,2} = x \pm iy$ называются **комплексно-сопряженными**.



Геометрическая интерпретация комплексного числа

Операции сложения и вычитания комплексных чисел согласованы с операциями сложения и вычитания соответствующих векторов (упр).



Основная теорема алгебры

Теорема 1. Многочлен n -ой степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.

Теорема 2. Если коэффициенты многочлена - действительные числа и $z = \alpha + i\beta$ - его корень, то $\bar{z} = \alpha - i\beta$ - также его корень.

Заметим, что $(x - z)(x - \bar{z}) =$
 $= (x - (\alpha + i\beta))(x - (\alpha - i\beta)) = [\text{упр.}] =$
 $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ - квадратный трехчлен с
 $D = -\beta^2 < 0$. Отсюда следует теорема Гаусса.

Теорема Гаусса (повторение)

Теорема. Любой многочлен $Q(x)$ с действительными коэффициентами равен произведению старшего коэффициента a на множители вида: $(x - \beta)$, $(x - \beta)^k$, $(x^2 + px + q)$, $(x^2 + px + q)^m$, где $k > 1$, $m > 1$, k, m – натуральные числа, $D = p^2 - 4q < 0$.

Решение квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом

Задача 2. Найти корни уравнения $z^2 + z + 1 = 0$.

Решение.

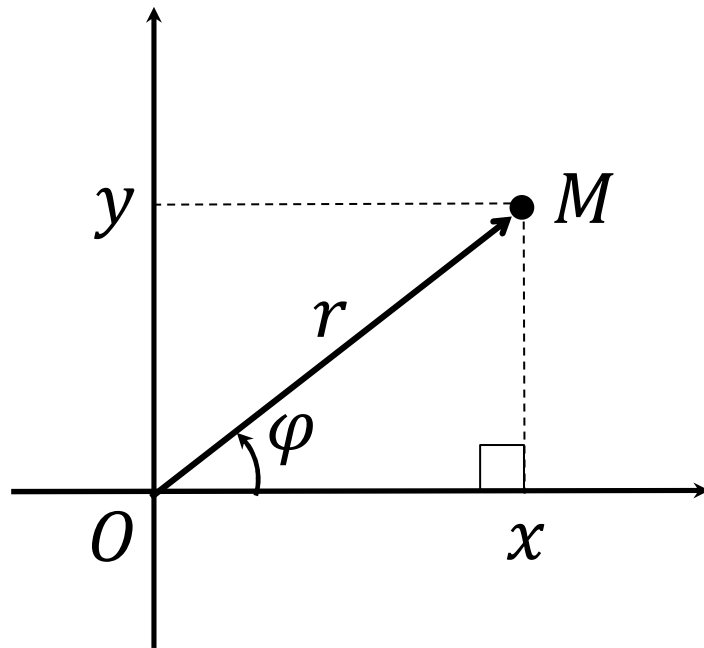
$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Полярные координаты. Повторение

Этот слайд можно не конспектировать



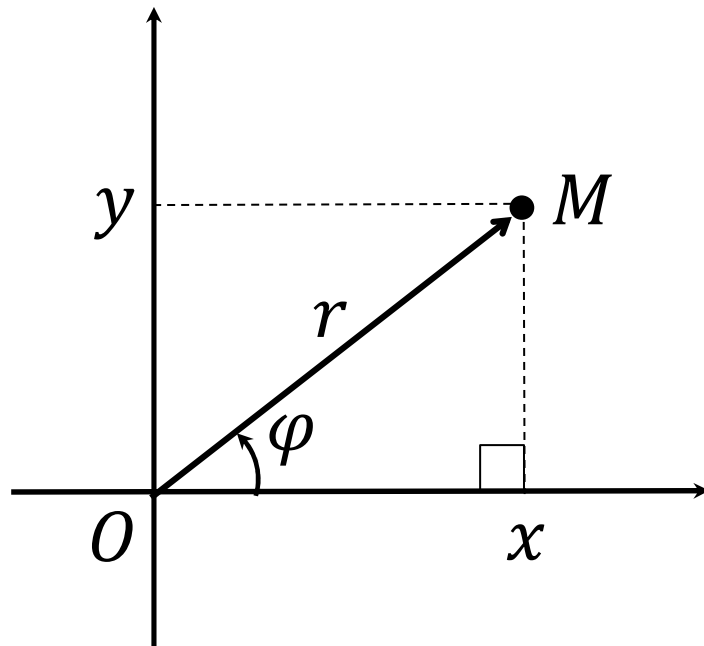
$r = |OM|$ –
полярный радиус

φ – наименьший угол от
оси Ox до вектора $\overrightarrow{OM}$ –
полярный угол

(x, y) – декартовы координаты точки M

(r, φ) – полярные координаты точки M

Тригонометрическая форма комплексного числа



Пусть (r, φ) –
полярные координаты
точки $M(x, y)$.

Опр. **Тригонометрической
формой** комплексного
числа $z = x + iy$
называется выражение

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Связь алгебраической и тригонометрической форм комплексного числа

Опр. Число r называется **модулем** компл. числа z и обозначается через $|z|$, а число φ — **аргументом** и обозначается через $\arg z$.

Если $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, то

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

и

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}, x \neq 0 \end{cases}$$

Связь алгебраической и тригонометрической форм комплексного числа

Точнее,

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & \text{если т. } M(x, y) \text{ в } I \text{ четв.}, \\ \pi - \operatorname{arctg} \left| \frac{y}{x} \right|, & \text{если т. } M \text{ во } II \text{ четв.}, \\ \operatorname{arctg} \left| \frac{y}{x} \right| - \pi, & \text{если т. } M \text{ в } III \text{ четв.}, \\ -\operatorname{arctg} \left| \frac{y}{x} \right|, & \text{если т. } M \text{ в } IV \text{ четв.} \end{cases}$$

Показательная форма комплексного числа

Если использовать формулу Эйлера

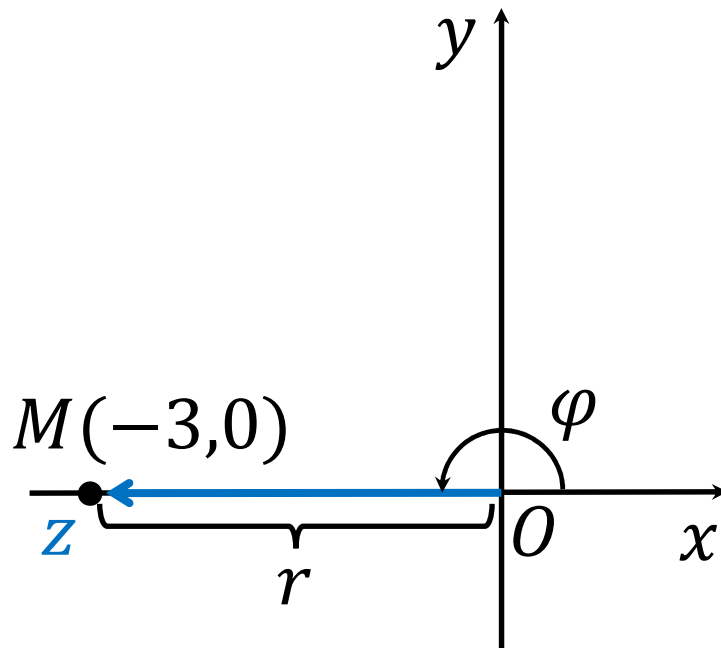
$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

то компл. число $z = x + iy = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$
можно представить в виде **показательной**
формы

$$z = re^{i\varphi}$$

Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Задача 3

Задача 3. Написать тригонометрическую и показательную формы компл. чисел а) $z = -3$, б) $z = -\sqrt{3} - i$.



Решение.

$$\text{а) } x = -1, y = 0$$

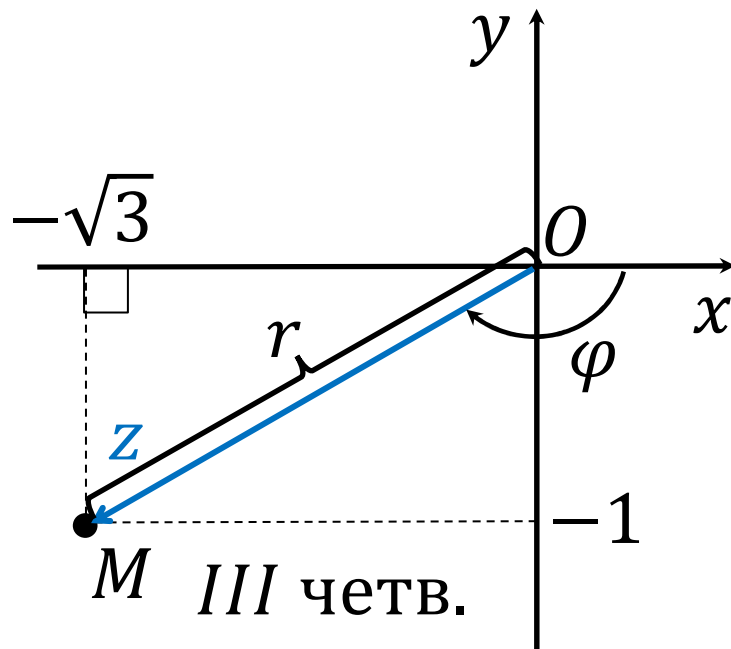
$$\Rightarrow r = 3, \varphi = \pi$$

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) =$$

$$= 3(\cos \pi + i \sin \pi)$$

$$= 3e^{i\pi}$$

Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Задача 3



$$б) x = -\sqrt{3}, y = -1$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} =$$

$$= \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \left| \frac{y}{x} \right| - \pi =$$

$$= \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$$

Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Задача 3

$$\begin{aligned}\varphi &= \operatorname{arctg} \left| \frac{y}{x} \right| - \pi = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \\ &= \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{5\pi}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z &= 2 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} \right) \right) = \\ &= 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}\end{aligned}$$

Операции над комплексными числами в показательной форме

$$\text{Пусть } z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}, \\ z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$$

Тогда

Умножение:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = \\ = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (\text{V})$$

Возведение в степень:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi} \quad (\text{VI})$$

Операции над комплексными числами в показательной форме

Деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = \\ = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (\text{VII})$$

Док-во проверяется простым вычислением.
Примем без док-ва.

Операции над комплексными числами в показательной форме. Задача 4

Задача 4. Найти $(-\sqrt{3} - i)^{100}$.

Решение. Пусть $z = -\sqrt{3} - i$ (см. задачу 2).

Тогда $z = 2e^{-i\frac{5\pi}{6}}$ (см. задачу

$$2). \Rightarrow z^{100} = \left(2e^{-i\frac{5\pi}{6}}\right)^{100} = 2^{100}e^{-i\frac{5\pi}{6} \cdot 100} =$$

$$= 2^{100} \left(\cos\left(-\frac{500\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{500\pi}{6}\right) \right) =$$

Операции над комплексными числами в показательной форме. Задача 3

$$\begin{aligned} &= 2^{100} \left(\cos \frac{250\pi}{3} - i \sin \frac{250\pi}{3} \right) = \\ &= 2^{100} \left(\cos \left(83 \frac{1}{3} \pi \right) - i \sin \left(83 \frac{1}{3} \pi \right) \right) = \\ &= 2^{100} \left(\cos \frac{4}{3} \pi - i \sin \frac{4}{3} \pi \right) = \\ &= 2^{100} \left(-\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2^{100} \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$