

Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и
прикладной химии, III семестр (II курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Наigreбецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 16

Дифференци- альные уравнения II-го порядка

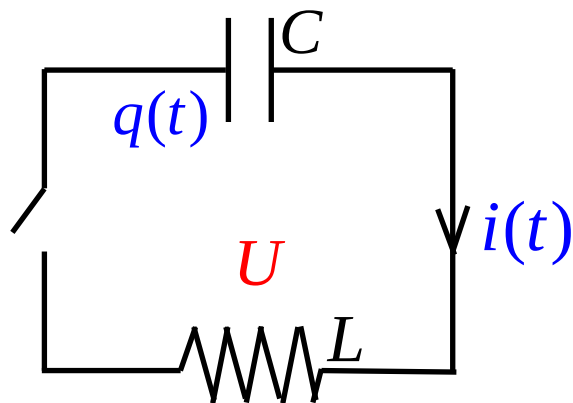
Лекция 16

Дифференциальные уравнения II-го порядка

1. Задачи из физики,
приводящие к ДУ II-го порядка.
2. Основные понятия для ДУ II-го порядка.
3. ДУ II-го порядка, допускающие понижение
порядка.
4. Примеры.

Задача из физики, приводящие к ДУ II порядка.

Пример 1. Рассмотрим колебательный контур.



$$U = \frac{q(t)}{C} = -Li'(t)$$

$$\begin{aligned} i(t) &= q'(t) \\ i'(t) &= q''(t) \end{aligned} \Rightarrow \frac{q}{C} = -Lq''$$

$$q'' + \frac{1}{LC}q = 0 \Rightarrow q'' + \omega^2 q = 0, \quad \omega^2 = \frac{1}{LC}$$

Задача из физики, приводящие к ДУ II порядка.

Задача Коши:

$$\left\{ \begin{array}{l} q'' + \omega^2 q = 0 - \text{ДУ II порядка} \\ q(0) = q_0 \\ q'(0) = i(0) = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{- НУ} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{гармонические} \\ \text{колебания!} \end{array}$$

Зависимость количество заряда от времени:

$$q = q_0 \cos \omega t \quad \begin{array}{l} \text{- частное решение,} \\ \text{удовлетворяющее данным НУ} \end{array}$$

Задача из физики, приводящие к ДУ II порядка.

Проверим это:

$$q' = (q_0 \cos \omega t)' = -q_0 \omega \sin \omega t$$

$$q'' = (-\omega \sin \omega t)' = -\omega^2 q_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow q'' + \omega^2 q = -\omega^2 q_0 \cos \omega t + \omega^2 q_0 \cos \omega t = 0$$

$$q(0) = q_0, \quad q'(0) = 0$$

Определение ДУ II-го порядка

Опр. Функциональное уравнение вида

$$(1) y'' = f(x, y, y') \text{ или } (2) F(x, y, y', y'') = 0,$$

которое связывает между собой **независимую переменную x , искомую функцию y и ее первую и вторую производные y', y''** называется **дифференциальным уравнением второго порядка (ДУ II порядка)**.

Определение ДУ II-го порядка. Примеры

Пример 2. $y'' + \omega^2 y = 0$ – ДУ II порядка.

гармонические колебания

Пример 3. $y'' + \omega^2 \sin y = 0$ – ДУ II порядка.

колебания математического
маятника

Замечание. При небольших отклонениях y
 $\sin y \approx y$, и математический маятник
совершает гармонические колебания.

Определение частного решения ДУ II-го порядка

Опр. **Решением (частным)** уравнения (1) или (2) называется любая функция $y = y(x)$,
 $x \in (a, b)$, которая обращает уравнение в тождество (верное равенство для всех $x \in (a, b)$), т.е.

1) $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ или

2) $F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$.

Определение частного решения ДУ II-го порядка. Примеры

Пример 4. Функция $y = q_0 \cos \omega x$,
 $x \in (-\infty; +\infty)$, является решением
уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$.

Пример 5. Функция $y = 0$,
 $x \in (-\infty; +\infty)$, является решением
уравнения $y'' + \omega^2 \sin y = 0$.

Определение общего решения ДУ II-го порядка

Опр. **Общим решением** ДУ (1) $y'' = f(x, y, y')$ или (2) $F(x, y, y', y'') = 0$ называется множество всех частных решений, записанных в виде функции $y = y(x, C_1, C_2)$, в частности,

для любых допустимых C_1, C_2 функция $y = y(x, C_1, C_2)$ является решением ДУ.

Определение общего решения ДУ I-го порядка. Пример 6

Пример 6. Функция $y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$, $x \in (-\infty; +\infty)$, является общим решением уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$ для любых C_1, C_2 :

$$\begin{aligned} y' &= (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x)' = \\ &= -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x \end{aligned}$$

Определение общего решения ДУ I-го порядка. Пример 6

$$y'' = (-\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x)' =$$

$$y'' = -\omega^2 C_1 \cos \omega x - \omega^2 C_2 \sin \omega x$$

$$y'' + \omega^2 y = (-\omega^2 C_1 \cos \omega x - \omega^2 C_2 \sin \omega x) + \\ + \omega^2 (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x) = 0$$

$$y'' + \omega^2 y = 0 \text{ - верное тождество}$$

Задача Коши для ДУ II-го порядка

Пусть

1) $y'' = f(x, y, y')$ – ДУ II-го порядка

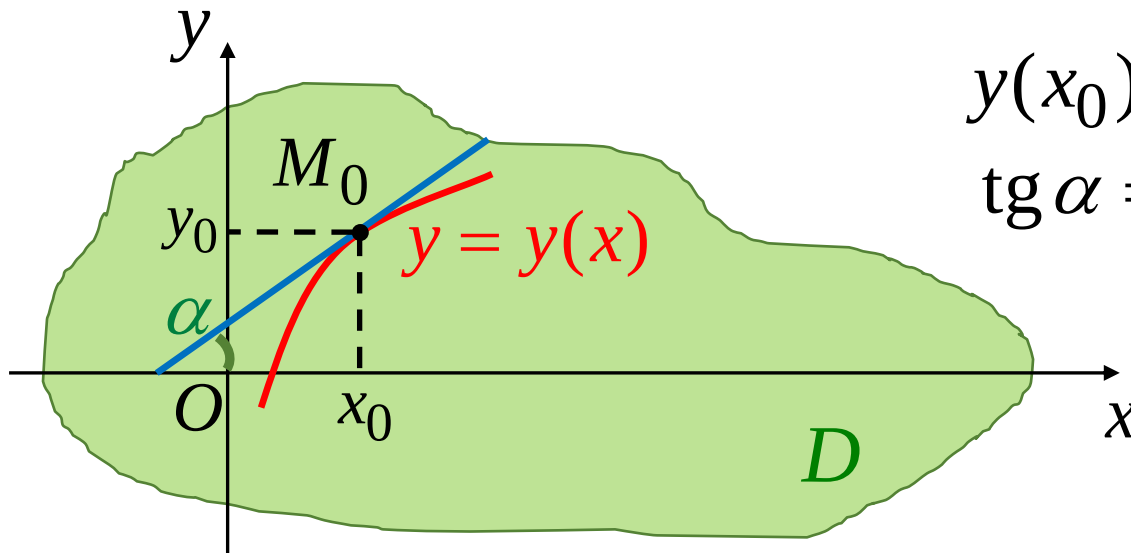
2) $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ – НУ

Найти

решение ДУ, удовлетворяющее НУ.

Геометрический смысл задачи Коши

Геометрический смысл: найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$, тангенс угла наклона касательной к которой к оси Ox в точке $M_0(x_0, y_0)$ равен y'_0 .



$$y(x_0) = y_0,$$
$$\operatorname{tg} \alpha = y'_0$$

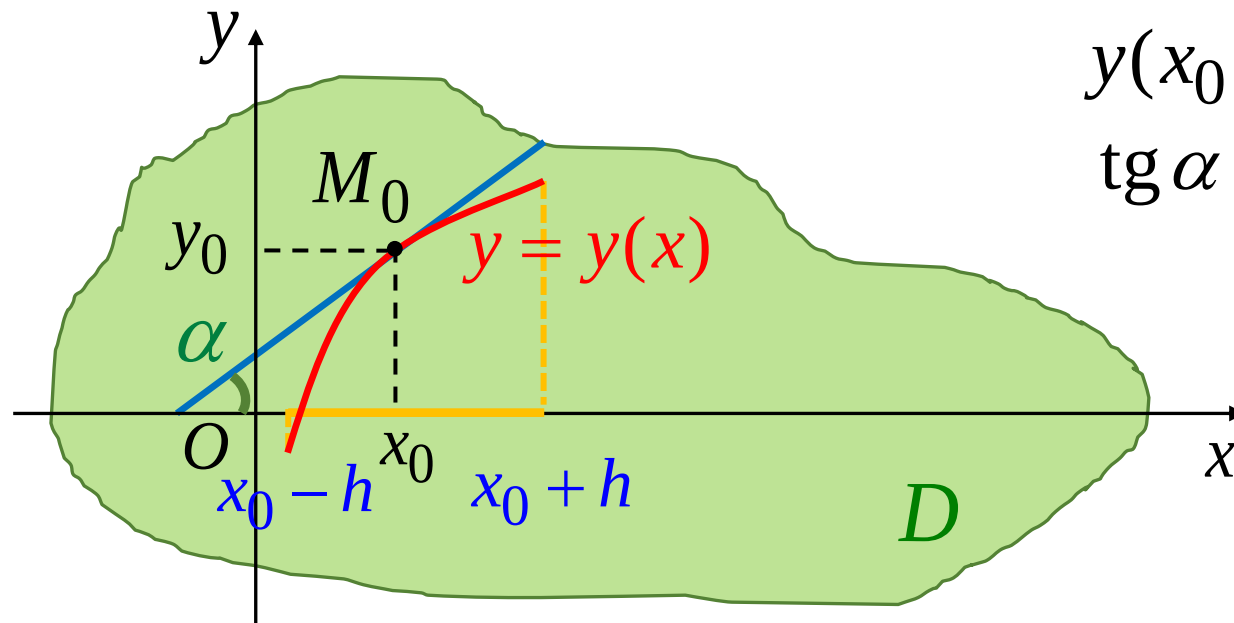
Теорема Коши ДУ II-го порядка

Теорема 1 (теорема Коши существования и единственности).

Если для ДУ $y'' = f(x, y, y')$ функция $f(x, y, y')$ непрерывна вместе со своими частными производными $f'_y(x, y, y')$, $f'_{y'}(x, y, y')$ в области D ,
то для любой точки $N_0(x_0, y_0, y'_0) \in D$ на некотором интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ *существует единственное решение* $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее НУ $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

Геометрический смысл теоремы Коши

Через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ такую, что $N_0(x_0, y_0, y'_0) \in D$, под данным наклоном y'_0 проходит единственная интегральная кривая данного ДУ.



I. ДУ II порядка, не содержащие y

Рассмотрим ДУ II порядка, не содержащие y ,
т.е. ДУ вида

$$y'' = f_1(x, y')$$

В этом ДУ можно понизить порядок при
помощи замены

$$z(x) = y'(x) \Rightarrow y'' = z' \Rightarrow z' = f_1(x, z)$$

ДУ I порядка
относительно $z(x)$

I. ДУ II порядка, не содержащие y

Задача 1

Задача 1. Найти частное решение ДУ (решить задачу Коши) $y'' = 1, y(0) = 0, y'(0) = 0$.

Решение. Это ДУ II порядка, допускающее понижение порядка, **не содержащее y** .

Сделаем замену

$$\boxed{z = y'} \Rightarrow \boxed{y'' = z'} \Rightarrow \boxed{z' = 1}$$

ДУ I порядка
относительно $z(x)$

I. ДУ II порядка, не содержащие y

Задача 1

$$\frac{dz}{dx} = 1 (\cdot dx)$$

$$dz = dx$$

$$\int dz = \int dx$$

$$z = x + C_1$$

$$y' = x + C_1$$

I интеграл

$$\frac{dy}{dx} = x + C_1 (\cdot dx)$$

$$dy = (x + C_1) dx$$

$$\int dy = \int (x + C_1) dx$$

$$y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2$$

общее решение

I. ДУ II порядка, не содерж. у. Задача 1

$$y(0) = 0$$

Подставим в общее решение:

$$0 = \frac{0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_1 x$$

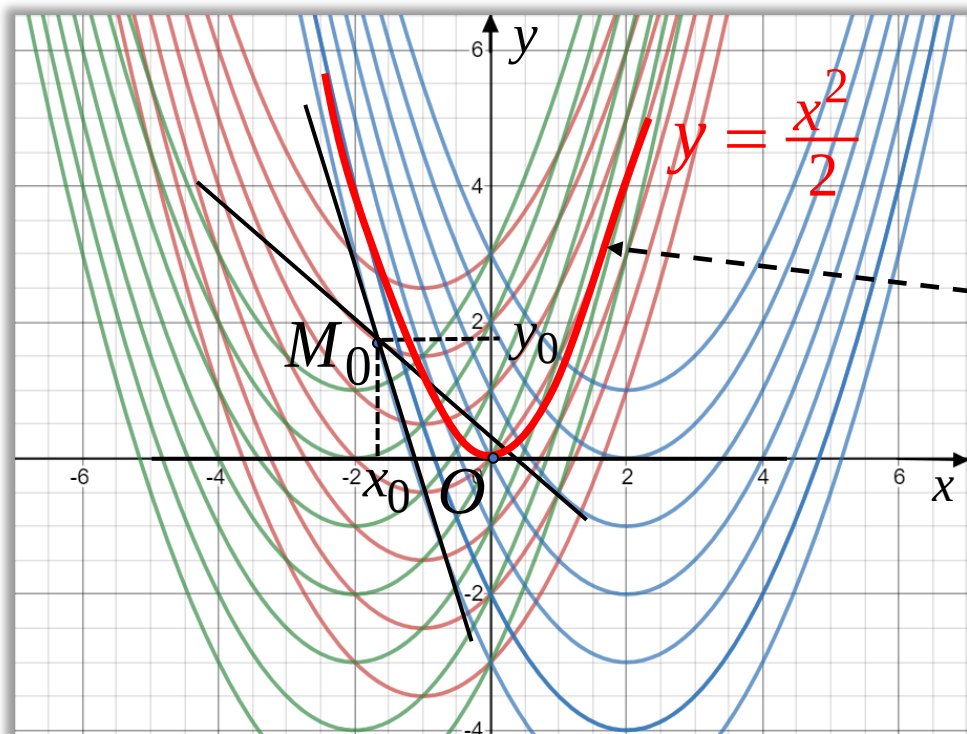
$$y'(0) = 0$$

Подставим в первый интеграл:

$$0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow$$

$$y = \frac{x^2}{2} \text{ - частное решение}$$

I. ДУ II порядка, не содержащее y



интегральная
кривая —
график
частного
решения

семейство интегральных кривых

II. ДУ II порядка, не содержащие x

Теперь рассмотрим ДУ II порядка, не содержащие x , т.е. ДУ вида

$$y'' = f_2(y, y')$$

Считаем, что найдется такая функция $p(y)$, что $y' = p(y)$.

Действительно, $y = y(x) \Leftrightarrow x = x(y)$

Тогда $y'(x) = p(y(x)) \Leftrightarrow y'(x(y)) = p(y)$

II. ДУ II порядка, не содержащие x

Сделаем замену $y' = p(y)$

$$\Rightarrow y'' = p'(y)y' \Rightarrow y'' = p'(y)p(y) \Rightarrow$$

$$y'' = p'p$$

Подставляя y, y' в исходное ДУ, получаем

$$p'p = f_2(y, p) \quad \text{ДУ I-го порядка} \\ \text{относительно } p(y)$$

I. ДУ II порядка, не содержащие x

Задача 2

Задача 2. Решить задачу Коши

$$y'' = y, y(0) = 1, y'(0) = 1.$$

Решение. Это ДУ II порядка, допускающее понижение порядка, **не содержащее x .**

Сделаем замену

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'p$$

Подставляем y, y' в исходное ДУ:

I. ДУ II порядка, не содержащие x

Задача 2

$$\boxed{p'p = y} \quad \text{ДУ I порядка относительно } p(y)$$

На время забываем, что x — независимая переменная.

И независимой делаем переменную y .

$$p' = \frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dp}{dy} p = y \quad (\cdot dy)$$

$$pdp = ydy$$

$$\int pdp = \int ydy$$

I. ДУ II порядка, не содержащие x

Задача 2

$$\frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_1$$

$$\boxed{\frac{y'^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_1} \quad \text{I интеграл}$$

Подставляем НУ:

$$\begin{aligned} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{aligned} \Rightarrow \frac{1^2}{2} = \frac{1^2}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

I. ДУ II порядка, не содержащие x

Задача 2

$$\frac{y'^2}{2} = \frac{y^2}{2} \quad (\cdot 2)$$

$$y'^2 = y^2$$

$$y' = \pm y$$

Учитывая НУ ($y(0) > 0, y'(0) > 0$), имеем:

$$y' = y$$

I. ДУ II порядка, не содержащие x

Задача 2

Вспоминаем, что x — независимая переменная.

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (\cdot dx)$$

$$dy = y dx \quad (: y)$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln|y| = x + \ln C_2$$

I. ДУ II порядка, не содержащие x

Задача 2

$$\ln|y| = \ln e^x + \ln C_2$$

$$\ln|y| = \ln(e^x \cdot C_2)$$

$$|y| = C_2 e^x$$

$$y = \pm C_2 e^x \Rightarrow y = C_2 e^x$$

I. ДУ II порядка, не содержащие x

Задача 2

Учитывая НУ $y(0) = 1$, имеем:

$$1 = C_2 e^0 \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\boxed{y = e^x} \text{ частное решение}$$