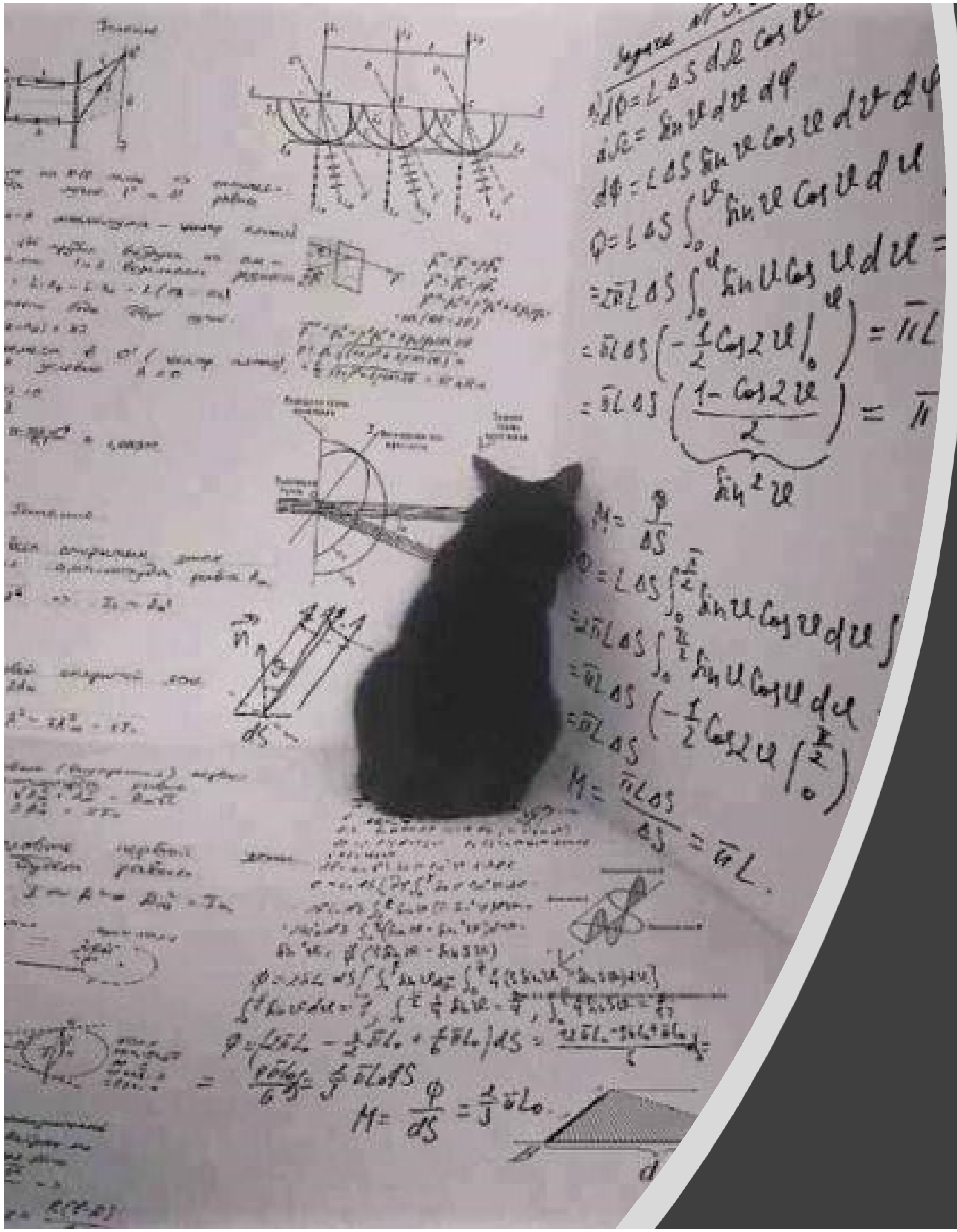


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, II семестр (I курс, II сем.)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова О.Е.

Лекция 16

Функции нескольких переменных (продолжение)

Дифференцирование сложной функции

Рассмотрим функцию $z = f(u, v)$, где $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, т.е. $z -$ сложная функция от независимых переменных x, y.

Тогда частные производные сложной функции $z = f(u, v)$ равны

Дифференцирование сложной функции

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}z'_x &= z'_u\cdot u'_x + z'_v\cdot v'_x,\\ z'_y &= z'_u\cdot u'_y + z'_v\cdot v'_y\end{aligned}}$$

Дифференцирование сложной функции
Пример 1

<u>Пример 1</u>. $z = ve^u$, $u = x^2 + y$ и $v = \ln y$, т.е. $z = z(x, y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

<u>Решение</u> $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(ve^u\right) = ve^u$ $\quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}\left(ve^u\right) = e^u$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y\right) = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y\right) = 1$$

Дифференцирование сложной функции
Пример 1

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln y\right)=0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln y\right)=\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=ve^{u}\cdot 2x+e^{u}\cdot 0=$$

$$=2xve^{u}=2xe^{x^2+y}\ln y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=ve^{u}\cdot 1+e^{u}\cdot\frac{1}{y}=$$

$$=\ln y\cdot e^{x^2+y}+e^{x^2+y}\cdot\frac{1}{y}$$

Повторное дифференцирование

Рассмотрим функцию $z = f(x, y)$, имеющую частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x} = f'_x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = f'_y$ такие, что них можно поставить вопрос о последующем дифференцировании.

Следующие производные **называются вторыми частными производными** функции $z = f(x, y)$

Повторное дифференцирование

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x \end{aligned}\right\} \text{смешанные производные}$$

Повторное дифференцирование
Пример 2

Пример 2. $z = x^2y + xy^3$.

Найти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial^2 x}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Решение.

Ранее были найдены первые производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^3 \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3xy^2$$

Повторное дифференцирование. Пример 2

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy + y^3\right) = 2y$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 3xy^2\right) = 6xy$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + y^3\right) = 2x + 3y^2$$

равны

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 3xy^2\right) = 2x + 3y^2$$

Теорема о равенстве смешанных производных

Смешанные производные в примере 2 равны не случайно. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. 1) Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в $O(P_0)$, $(P_0(x_0, y_0))$.

2) Пусть смешанные производные $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ непрерывны в $O(P_0)$.

Тогда $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Дифференцирование неявной функции 2-х переменных

Опр. Пусть уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет неявную функцию $z = z(x, y)$ двух переменных, т.е. $F(x, y, z(x, y)) = 0$.

Предположим, что функция $z = z(x, y)$.

дифференцируема по x, y и $\dfrac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Тогда её частные производные можно найти,

дифференцируя тождество $F(x, y, z) = 0$ по x и y.

Дифференцирование неявной функции 2-х переменных

Продифференцируем по x как сложную функцию

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot 1+\frac{\partial F}{\partial y}\cdot 0+\frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}\qquad \boxed{\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}}$$ (упр.)

Дифференцирование неявной функции одной переменной

Следствие. Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ задает неявную функцию $y = y(x)$.

Тогда
$$\boxed{\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}}}$$

Доказательство - упр.

Дифференцирование неявной функции одной переменной. Пример 3

Пример 3. Найти производную функции, заданную неявно уравнением $x^2 - 4xy + y^2 + 1 = 0$.

Решение. $F(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 1$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 4y \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = -4x + 2y$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{2x - 4y}{-4x + 2y} = \frac{x - 2y}{2x - y}$$

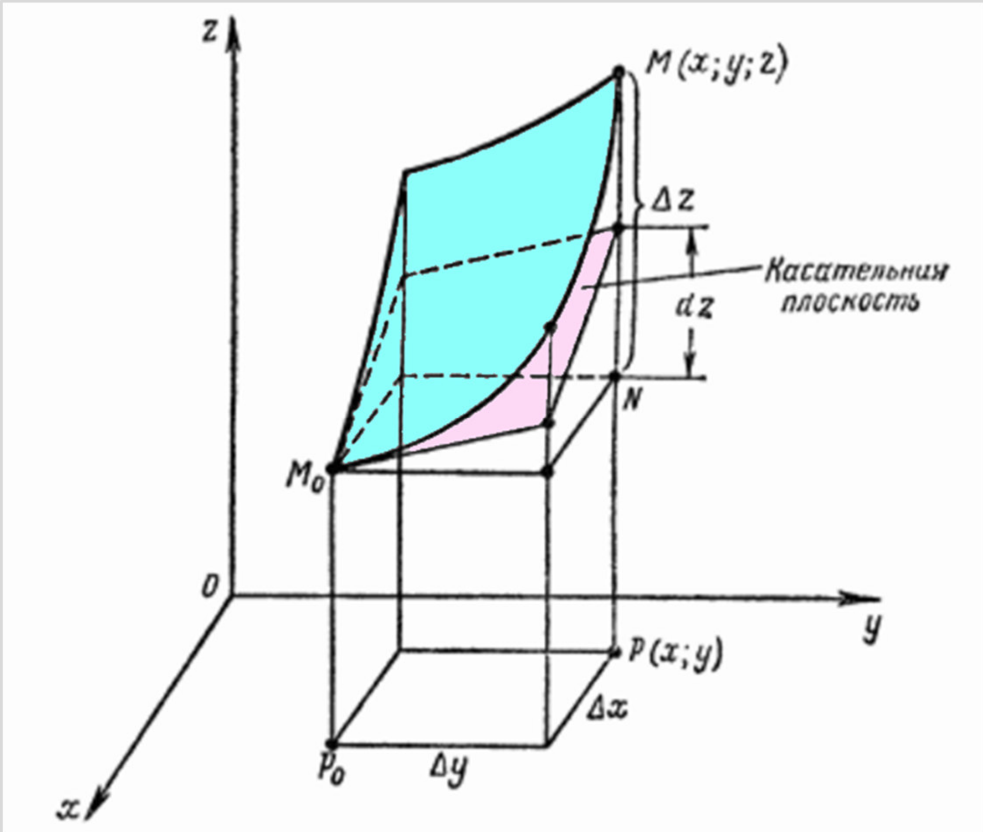
Уравнение касательной плоскости

Теорема 2. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P_0)$, $(P_0(x_0, y_0))$ и дифференцируема в точке P_0.

Тогда **уравнение касательной плоскости к поверхности** $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\big(P_0(x_0, y_0)\big)$:

$$\boxed{z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}(x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}(y - y_0)}$$

Уравнение касательной плоскости Геометрическая иллюстрация



Изображение взято из учебника Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление т.1

$$\Delta z_{касат.} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \Delta x + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \Delta y$$

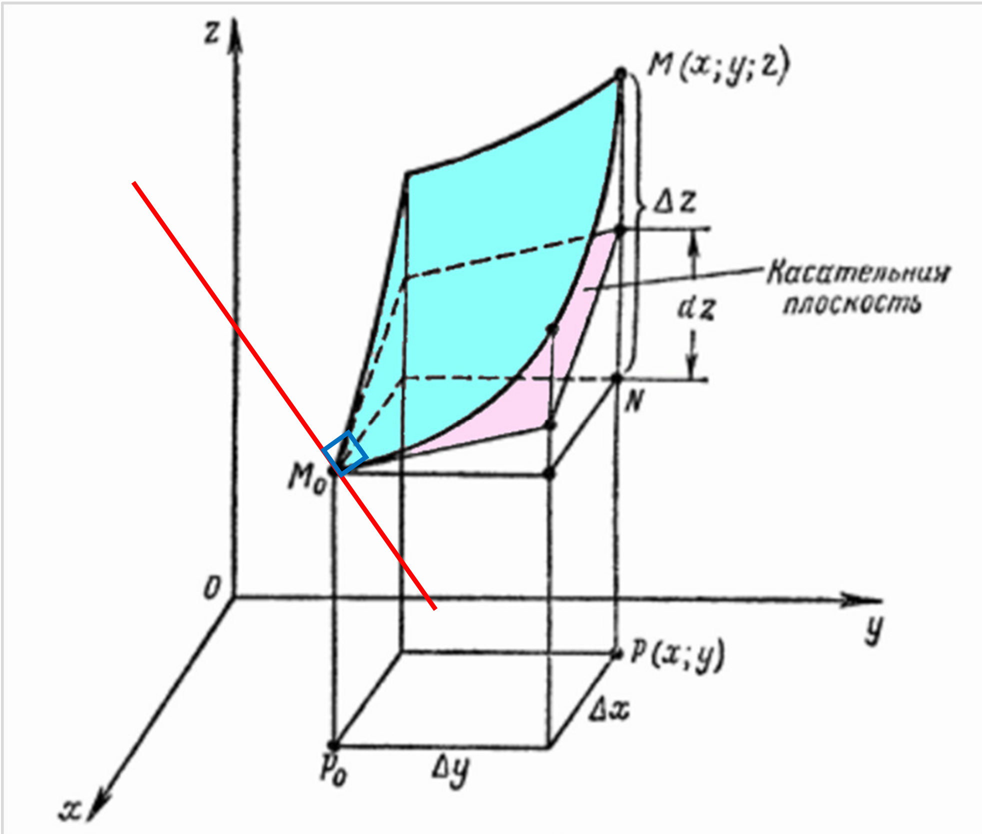
$$\boxed{\Delta z_{касат.} = dz}$$

Уравнение нормали

А **уравнение нормали к поверхности** $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ $\left(P_0(x_0, y_0)\right)$:

$$\boxed{\frac{x - x_0}{\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{-1}}$$

Уравнение касательной плоскости. Геометрическая иллюстрация



Изображение взято из учебника Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление т.1

Уравнение касательной плоскости и нормали. Пример 4

<u>Пример 4</u>. Найти уравнение касательной плоскости и нормали к параболоиду вращения $z = x^2 + y^2$ в точке $P_0(0,0)$.

<u>Решение</u>. $z = f(x, y) = x^2 + y^2 \Rightarrow$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \Rightarrow \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = 0 \Rightarrow$$

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

Уравнение касательной плоскости и нормали. Пример 4

$$z - z_0 = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} (x - x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} (y - y_0) \Leftrightarrow$$

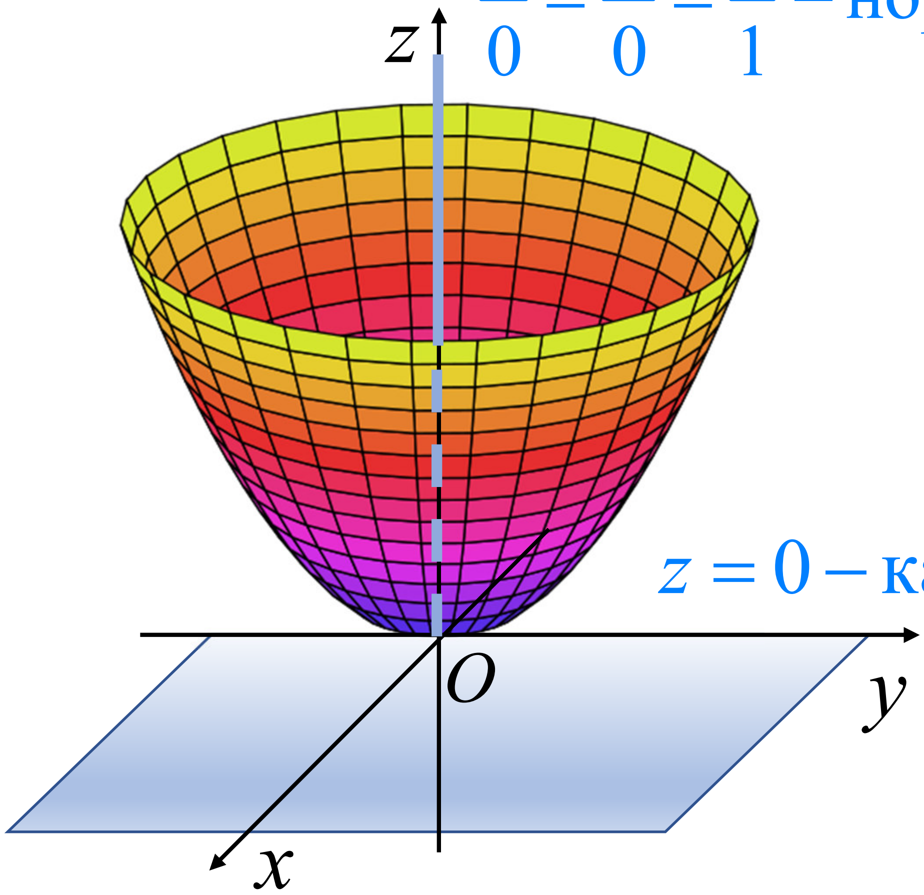
$z = 0$ – уравнение касательн. плоскости.

$$\frac{x - x_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}} = \frac{z - z_0}{-1} \Leftrightarrow \frac{x}{0} = \frac{y}{0} = \frac{z}{-1} \Leftrightarrow$$

$\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{0} = \dfrac{z}{1}$ (ось Oz) – уравнение нормали

Уравнение касательной плоскости и нормали

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1} - \text{нормаль}$$



$$z = 0 - \text{касательная}$$

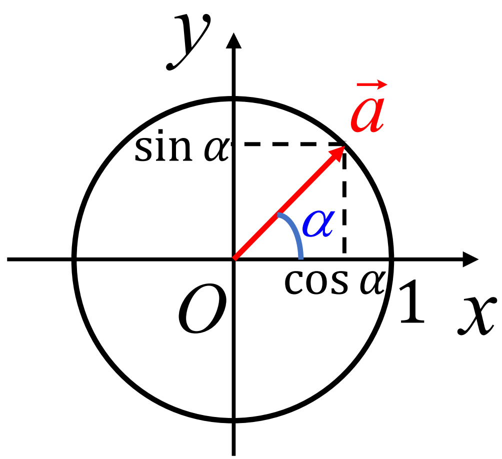
Производная по направлению. Определение

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в области D и $P_0(x_0, y_0) \in D$.

$$l: \begin{cases} x = x_0 + m \cdot t \\ y = y_0 + n \cdot t \end{cases}$$ – прямая в плоскости xOy,

$\vec{a} = (m, n)$ – направляющий вектор прямой l, $|\vec{a}| = 1$,

$\vec{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.



Производная по направлению. Определение

Рассмотрим функцию

$$z = \varphi(t) = f(x_0 + m \cdot t, y_0 + n \cdot t)$$

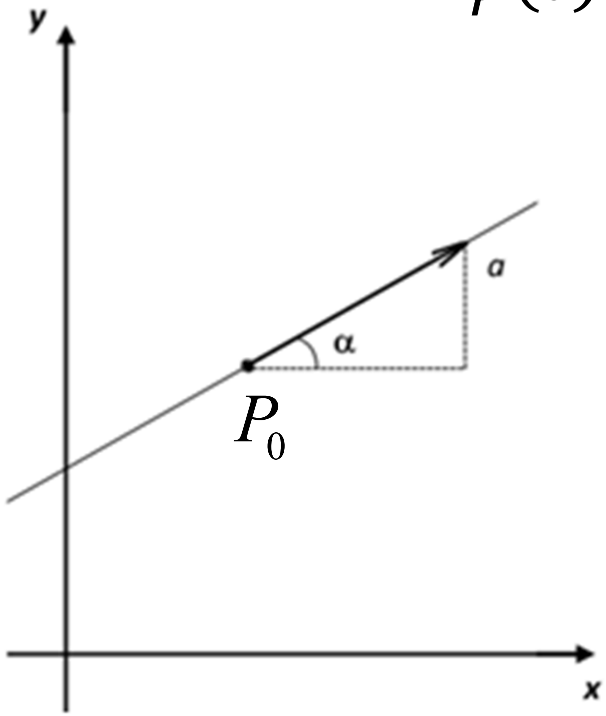
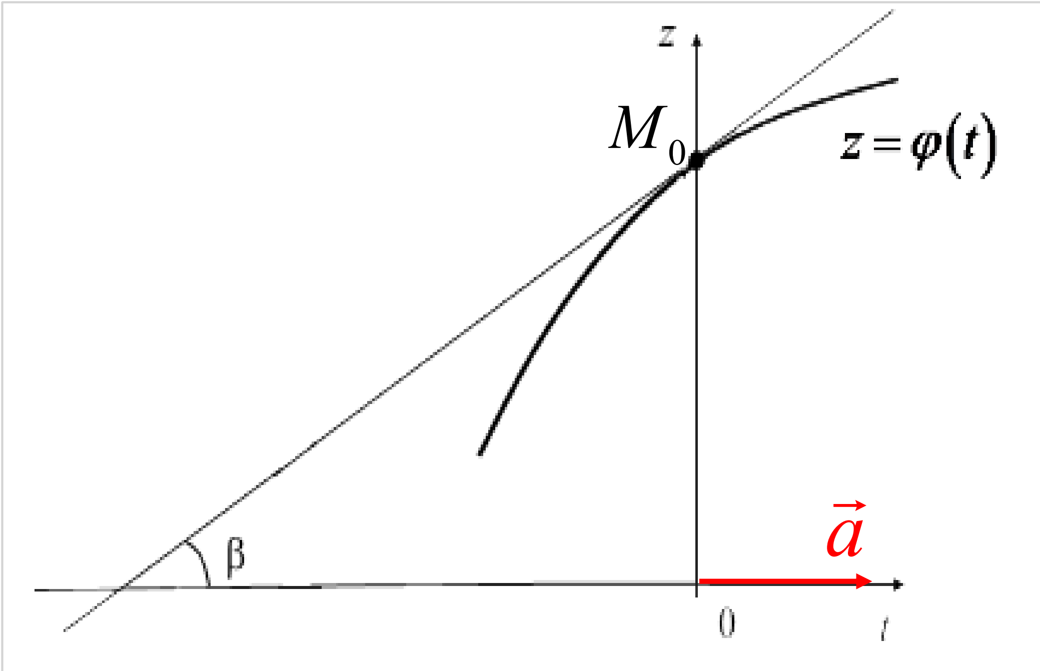


График функции $z = \varphi(t)$ – сечение поверхности $z = f(x, y)$ плоскостью, проходящей через l перпендикулярно плоскости xOy.

Производная по направлению. Геометрическая интерпретация



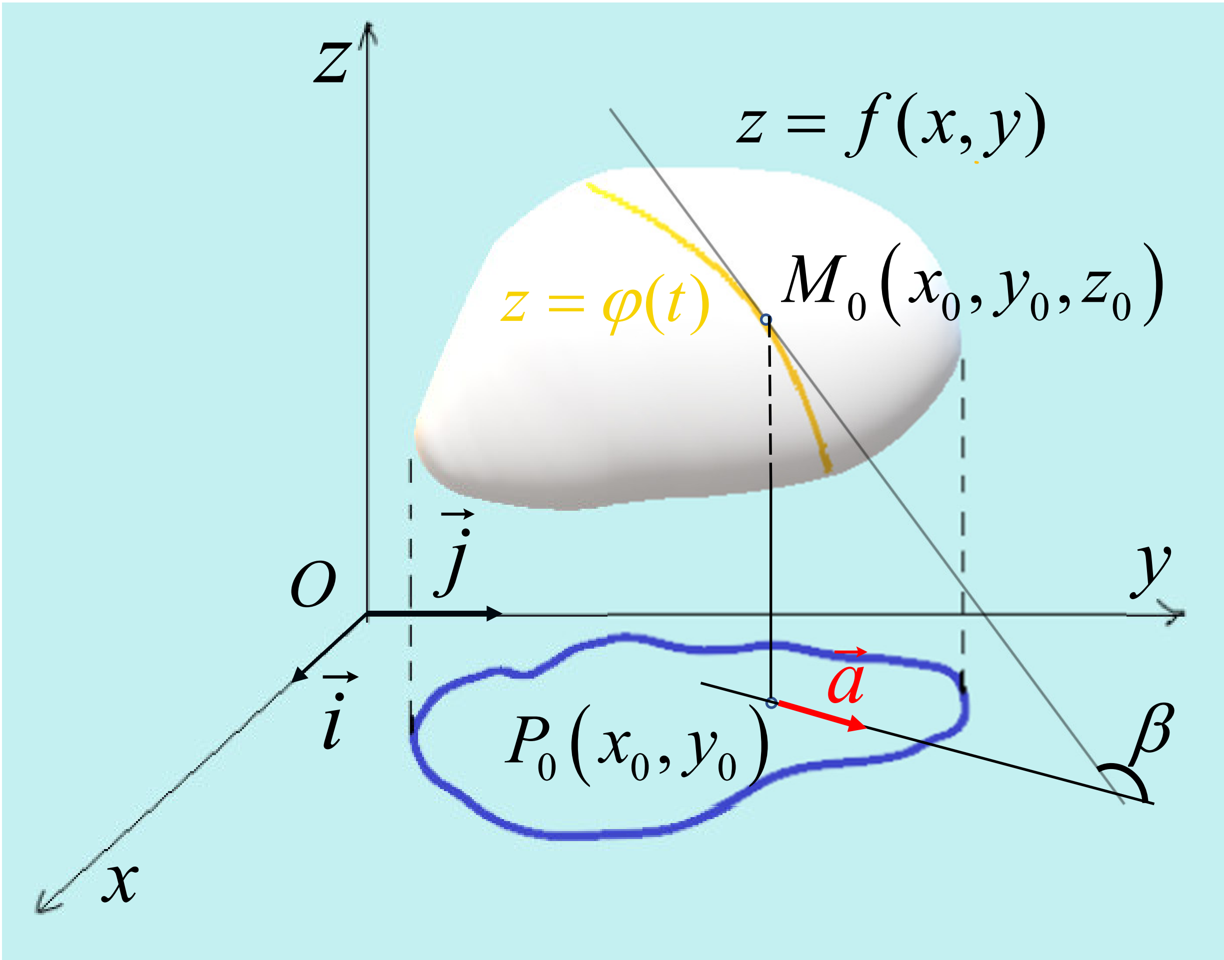
Сечение поверхности плоскостью, проходящей через вектор $\vec{a}$, перпендикулярно Oxy

Производная по направлению. Определение

Опр. Производной функции $z = f(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ называется производная функции
$z = \varphi(t) = f(x_0 + m \cdot t, y_0 + n \cdot t)$ в точке $t = 0$.

Обозначение: $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}$

Производная по направлению. Геометрическая интерпретация



$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \operatorname{tg} \beta}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

Производная по направлению. Вычисление

Теорема 3. Производная функции $z = f(x, y)$ по направлению вектора $\vec{a}$ равна

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha}$$

Док-во. $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \varphi'(t)\,|_{t=0} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0 + mt)'_t + \dfrac{\partial f}{\partial y}(y_0 + nt)'_t =$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}m + \frac{\partial f}{\partial y}n = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha \;\blacksquare$$

Градиент. Определение

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в области D, $P_0(x_0, y_0) \in D$.

<u>Опр</u>. Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ называется вектор

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ f\Big|_{P_0} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{P_0}, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{P_0} \right)}$$

Производная по направлению через градиент

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в области D, $P_0(x_0, y_0) \in D$ и

$\vec{a} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$

Теорема 4.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\alpha = \overrightarrow{\text{grad}}\ f\Big|_{P_0} \cdot \vec{a}$$

Градиент. Свойства

<u>Теорема 5</u>. Градиент направлен в сторону наибольшего возрастания функции, т.е. величина $\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}$ имеет наибольшее значение $\Leftrightarrow \vec{a} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\text{grad } f}$.

Причем величина $\frac{\partial f}{\partial \vec{b}} = \left|\overrightarrow{\text{grad } f}\right|$, где $\vec{b}$ − орт вектора $\overrightarrow{\text{grad } f}$.

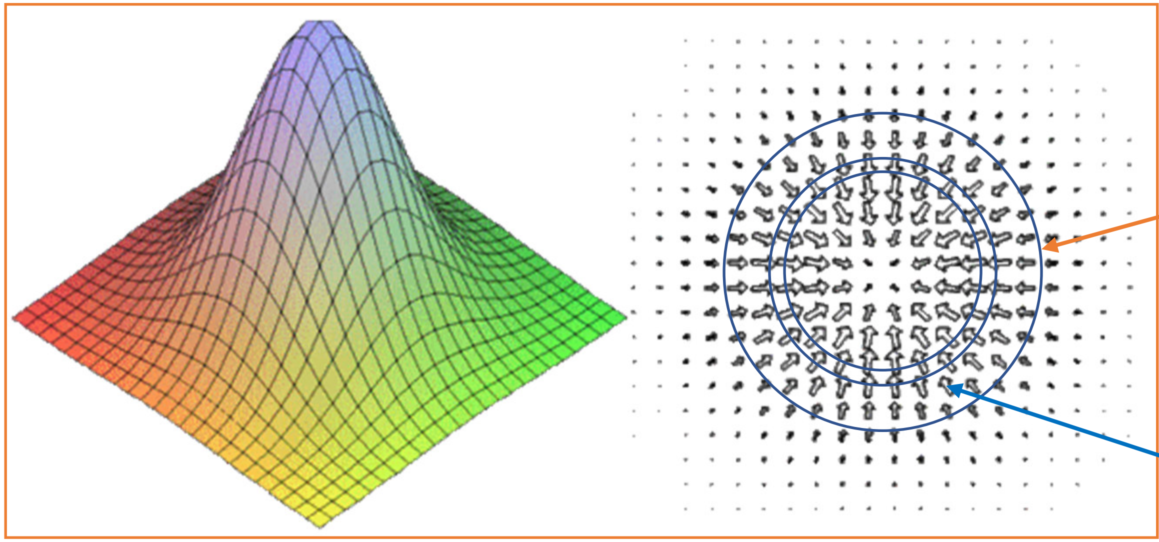
<u>Док-во</u> следует из теоремы 4 (упр).

Градиент. Свойства

Теорема 6. Градиент функции в точке перпендикулярен линии уровня функции, проходящей через эту точку.

Без док-ва.

Градиент. Геометрическая иллюстрация

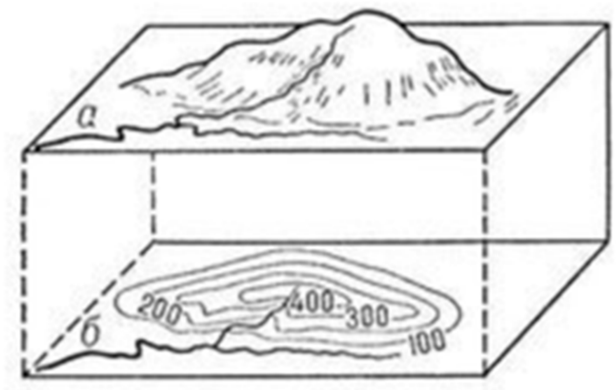


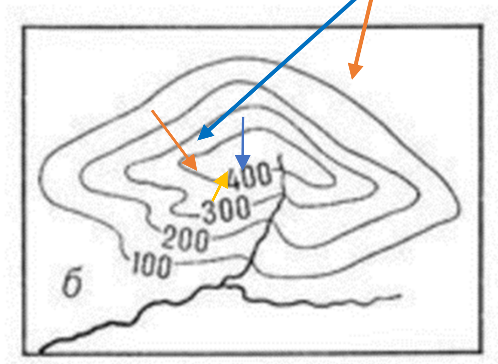
Изображение взято
со [СТРАНИЦЫ]

линии уровня

Градиенты, перпендикулярные линиям уровня

Изображение взято с [САЙТА]

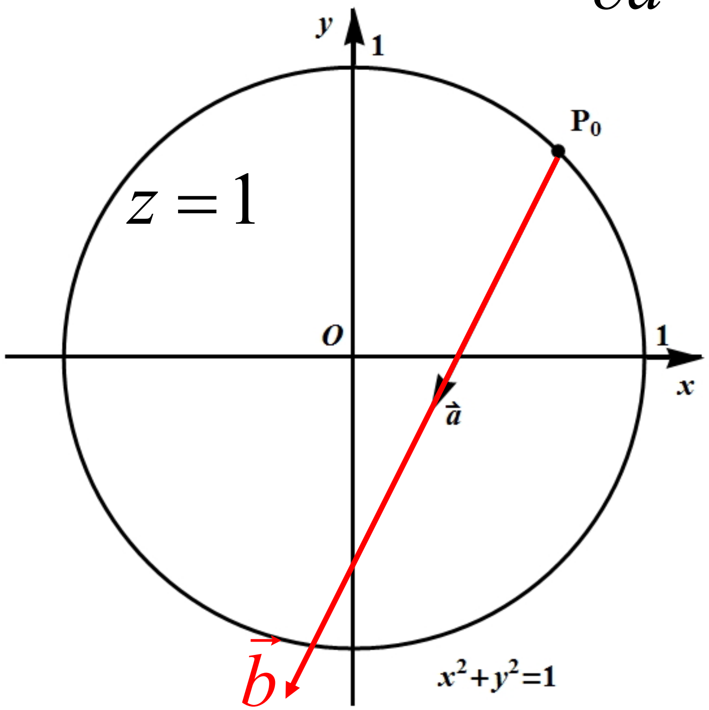




Производная по направлению. Пример 5

Пример 5. Пусть $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2} = f(x, y)$, $P_0\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$\vec{b} = (-1, -2)$. Найти $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{a}}$, где $\vec{a} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$.



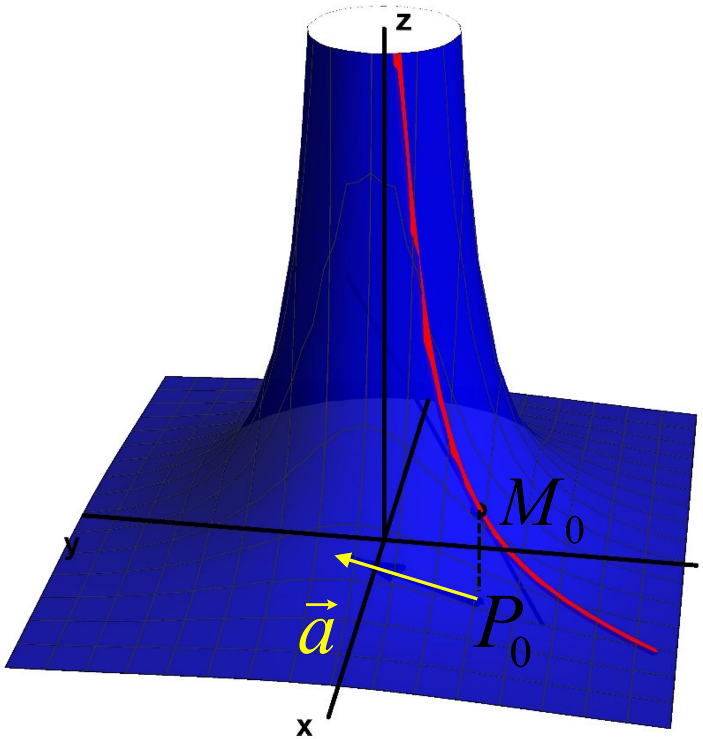
Решение.

$|\vec{b}| = \sqrt{5}$,

$$\vec{a} = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= (m, n) = (\cos\alpha, \sin\alpha)$$

Производная по направлению. Пример 5



$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = -\frac{2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)^2} = -\sqrt{2},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = -\sqrt{2}$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\right|_{P_0} = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cos\alpha + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\sin\alpha = \sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \sqrt{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Градиент. Пример 6

<u>Пример 6.</u> Пусть

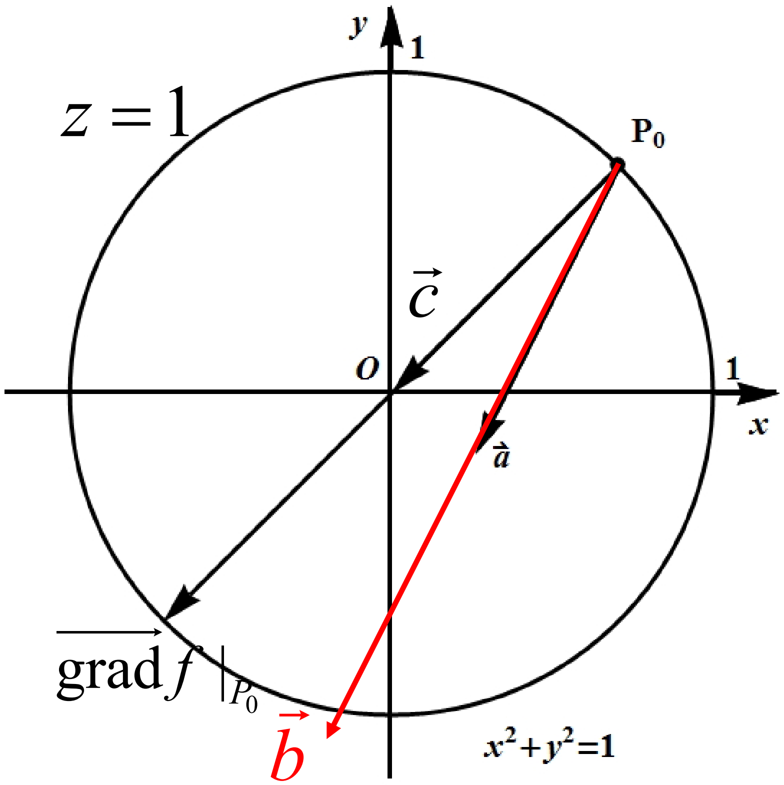
$$z = \frac{1}{x^2 + y^2} = f(x, y), \;\; P_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

Тогда

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(-\frac{2x}{\left(x^2 + y^2\right)^2}, -\frac{2y}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f\Big|_{P_0} = \left(\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}, \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\right) = \left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$$

Градиент. Пример 6



Из примера 5

$$\vec{a} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}} \right),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = 3\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Градиент. Пример 6

По другому можно было вычислить так:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\right|_{P_0} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f\Big|_{P_0} \cdot \vec{a} =$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\right) + \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cdot\left(-\sqrt{2}\right) = 3\sqrt{\frac{2}{5}}$$

Градиент. Пример 6

Поскольку

$$\left|\overrightarrow{\operatorname{grad}} f\Big|_{P_0}\right| = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2} = 2;$$

$$\vec{c} = \frac{\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f\Big|_{P_0}}{\left|\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f\Big|_{P_0}\right|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$\vec{c}$ – орт вектора $\overrightarrow{\operatorname{grad}}\, f\Big|_{P_0}$

Градиент. Пример 6

По теореме 5 имеем

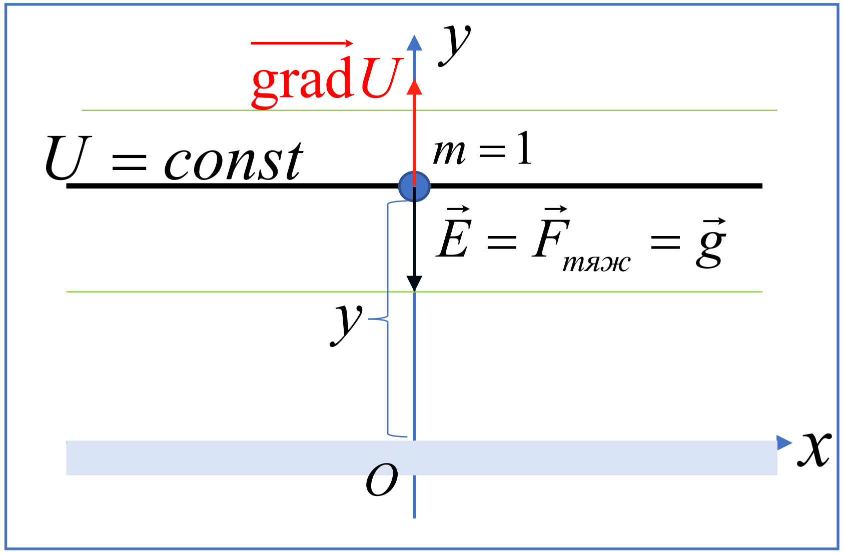
$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{c}}\right|_{P_0} = \left|\overrightarrow{\operatorname{grad}} f\big|_{P_0}\right| = 2 > 3\sqrt{\frac{2}{5}} = \left.\frac{\partial f}{\partial \vec{a}}\right|_{P_0}$$

По-другому, по формуле вычисления производной по направлению получаем тоже самое

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{c}}\right|_{P_0} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\beta = [\vec{c} = (\cos\beta, \sin\beta)]$$

$$= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\sqrt{2}\right) + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\sqrt{2}\right) = 2$$

Градиент. Приложение в механике



$\vec{E}$ – напряженность гравитационного поля у поверхности Земли

U – потенциальная энергия тела единичной массы, поднятого на высоту ***y***

$$U = g \cdot y; \quad U = U(x, y)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}\right) = (0, g)$$

$$\vec{E} = -\vec{g}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,U}$$