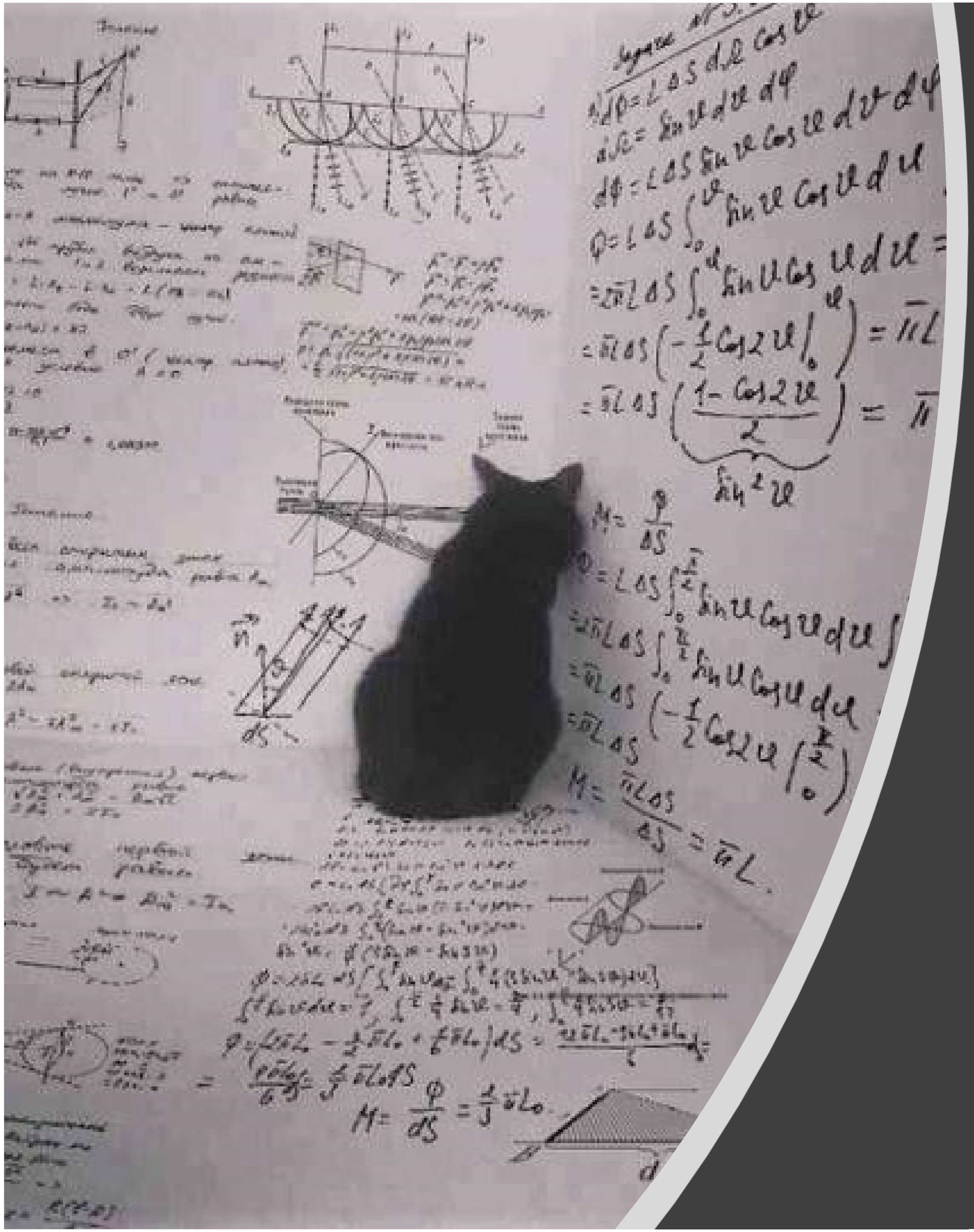


**Курс «Математика»**

**Департамент фундаментальной и прикладной химии, II семестр (I курс, II сем.)**

**Лекторы:**

**к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,**

**к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.**

# Лекция 15

# Функции нескольких переменных

# Функции нескольких переменных

Теория функций нескольких переменных будет изложена для функций двух переменных.

Все определения и утверждения легко распространяются на общий случай.

# Определение функции двух переменных

Обозначим через $\mathbb{R}^2$ множество точек плоскости.

Опр. Функцией двух переменных, определенной на множестве $D \subseteq \mathbb{R}^2$ называется правило, которое каждой паре значений $(x, y) \in D$ единственным образом сопоставляет число $z = f(x, y)$.

Множество $D$ называется *областью определения* функции $z = f(x, y)$.

# Геометрическая интерпретация функции двух переменных

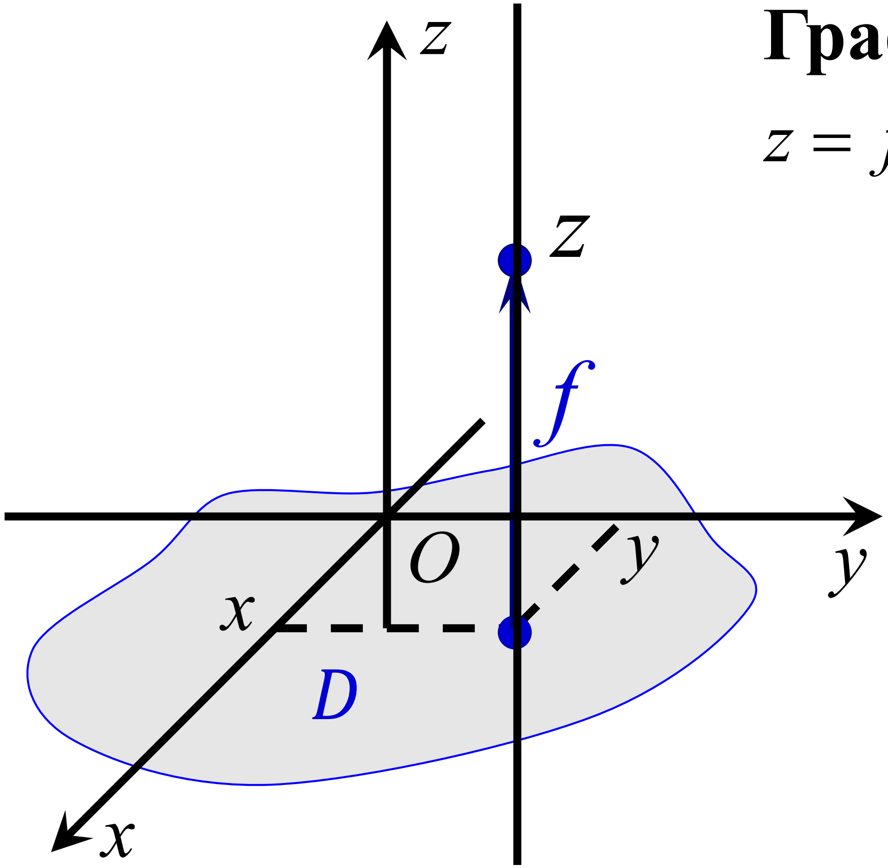


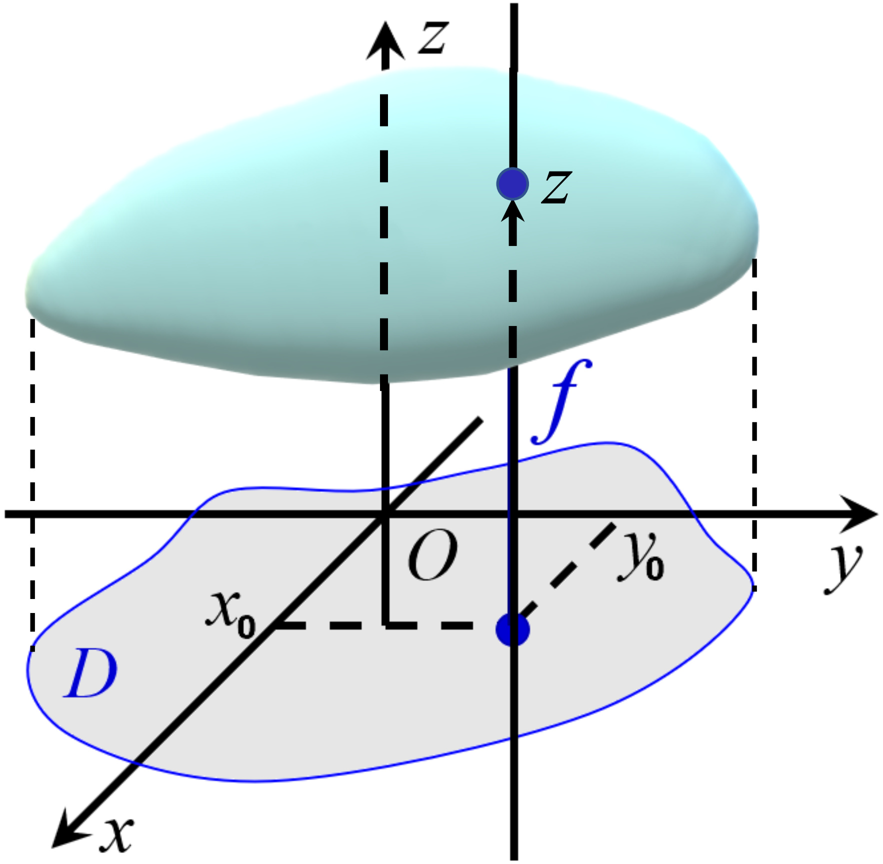

**График** функции

$z = f(x, y)$ – поверхность в пространстве

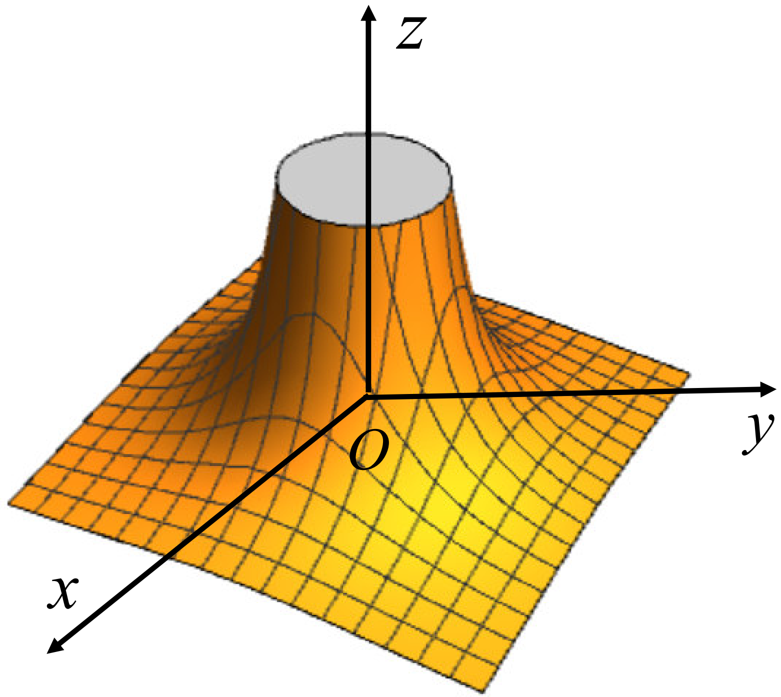
*Область определения*

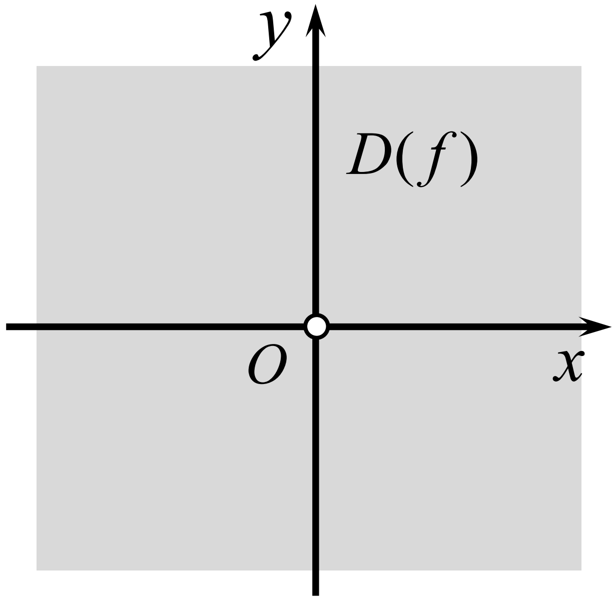
$D(f)=D$ – проекция графика на плоскость $Oxy$

# Геометрическая интерпретация функции двух переменных



# Геометрическая интерпретация. Пример 1



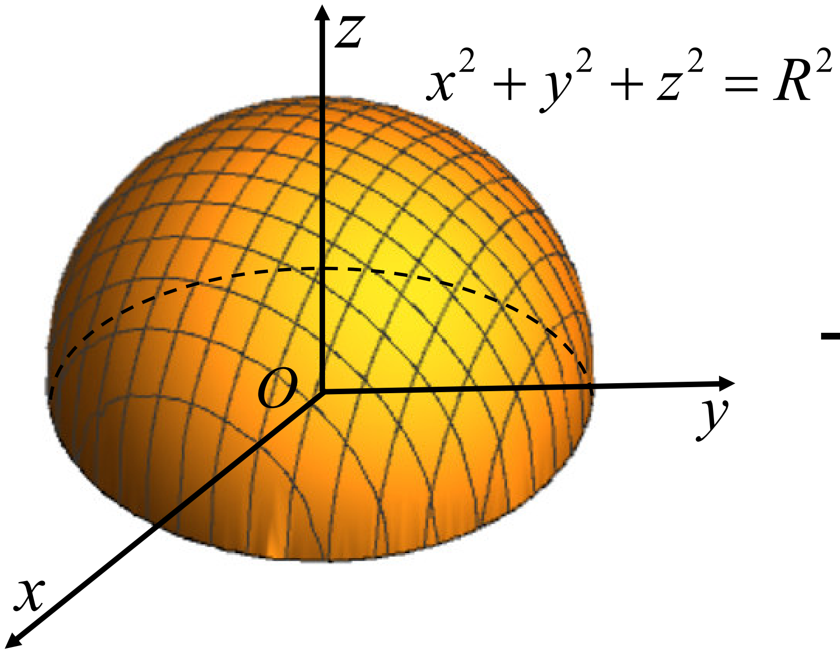



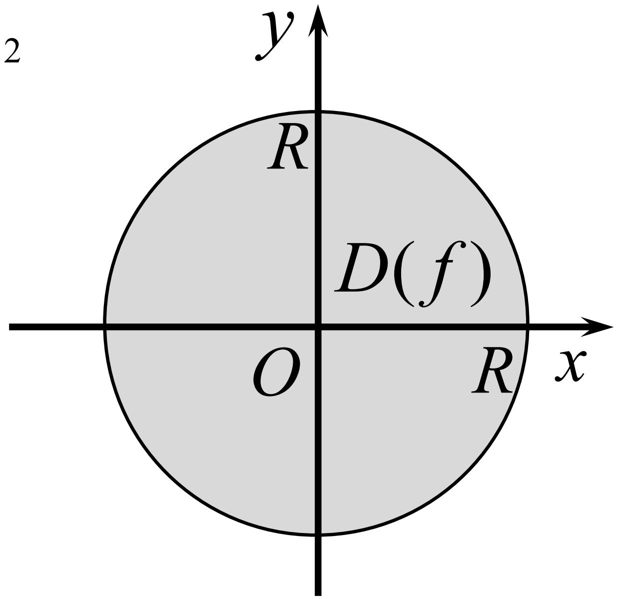

Поверхность - график

функции $z = f_1(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$

Область определения:
$D(f_1)$: $x \neq 0$,
$y \neq 0$ одновременно

# Геометрическая интерпретация. Пример 2




Поверхность - полусфера, график фунции

$$z = f_2(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

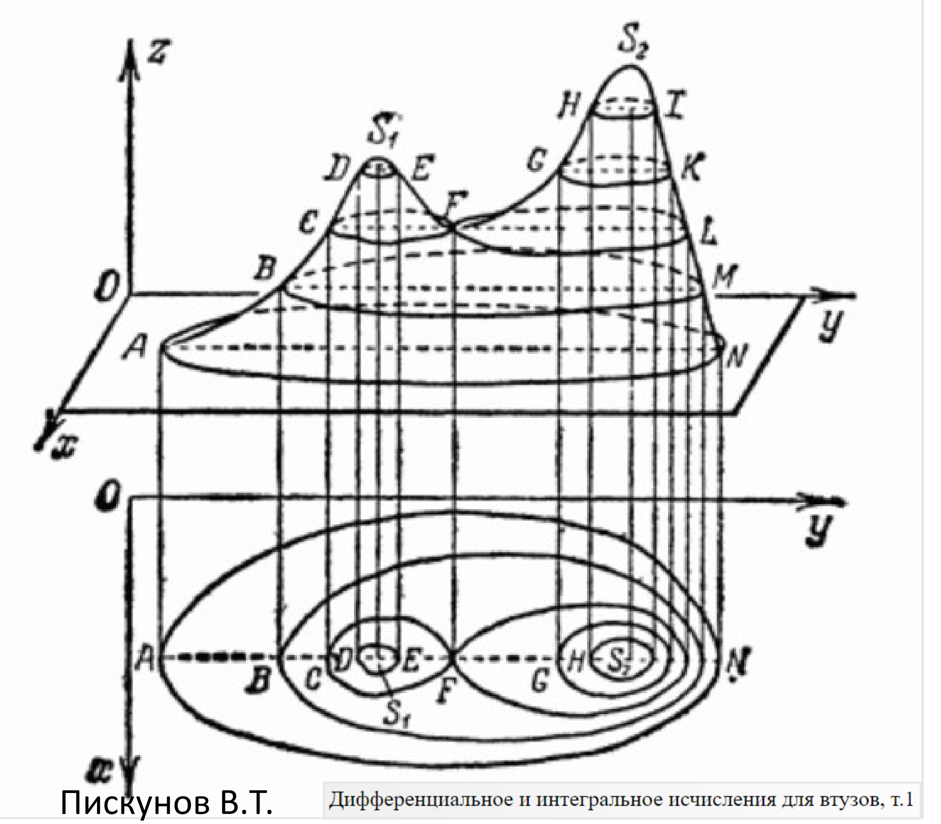
Область определения:

$$D(f_2):\ x^2 + y^2 \leq R^2$$

# Линии уровня функции двух переменных

<u>Опр</u>. Линией уровня функции $z = f(x, y)$ называется кривая, заданная уравнением $f(x, y) = C$ $(z = C)$.

Этот рисунок можно не изображать в конспекте




Пискунов В.Т. Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов, т.1

# Линии уровня. Пример 3

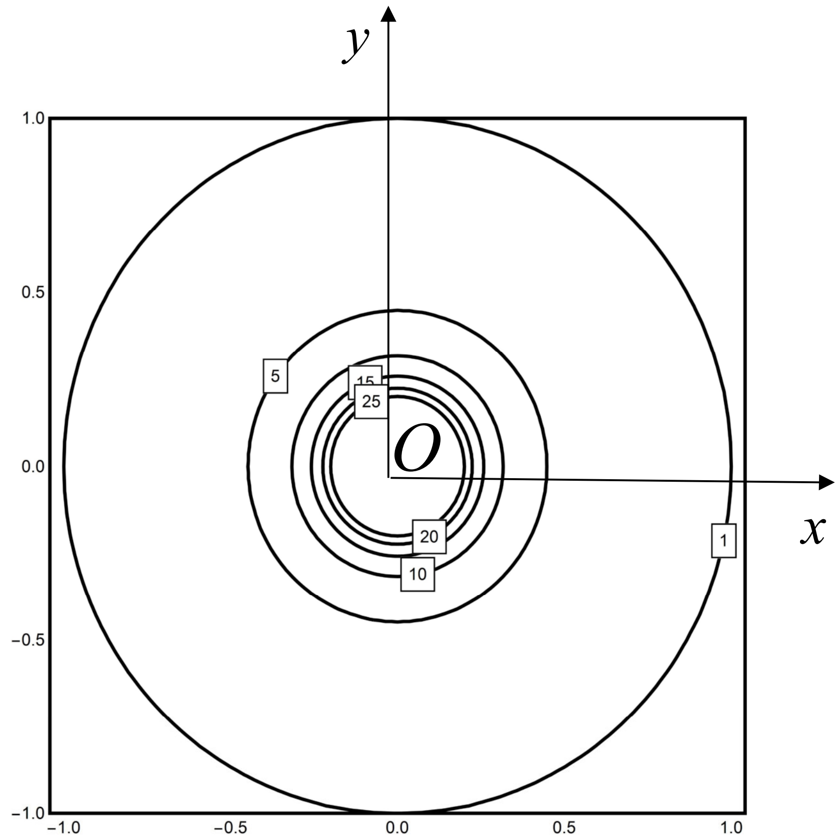
Пример 3. Линии уровня функции $z = \frac{1}{x^2+y^2}$:

$$z = 1 \quad \frac{1}{x^2+y^2} = 1 \Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$z = 5 \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{5}$$

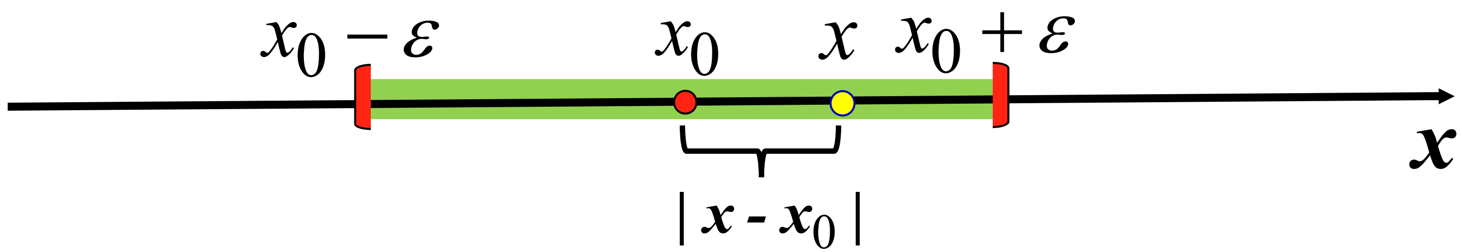
$$z = 10 \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{10}$$



# Определение ε-окрестности на числовой прямой (повторение)

<u>Опр.</u> ε-окрестностью точки $x_0$ называется множество

$$O_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$$



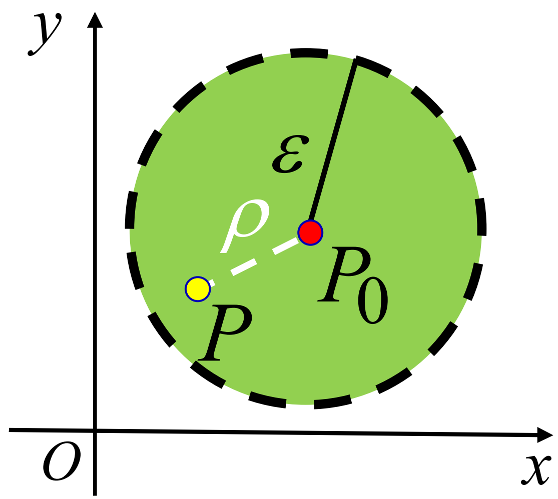
# Определение ε-окрестности на плоскости $\mathbb{R}^2$

<u>Опр.</u> ε-окрестностью точки $P_0(x_0, y_0)$ на плоскости называется множество

$$O_\varepsilon(P_0) = \left\{ P(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \rho(P, P_0) < \varepsilon \right\},$$

где $\rho(P, P_0)$ – расстояние от точки $P$ до точки $P_0$, равное

$$\rho = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$$



# Определение внутренней точки и открытого множества

<u>Опр</u>. Пусть точка $P_0$ принадлежит множеству $D$ точек плоскости.

Если существует $\varepsilon > 0$ т. ч. $O_\varepsilon(P_0) \subseteq D$, то точка $P_0$ называется внутренней точкой множества $D$.

<u>Опр</u>. Если все точки множества $D$ внутренние для этого множества, то оно называется открытым.

# Определение граничной точки, границы множества и замкнутого множества

Опр. Точка $P_0 \in D$ называется граничной точкой множества $D$, если

для любого $\varepsilon > 0$ в окрестности $O_\varepsilon(P_0)$ есть точки, которые принадлежат этому множеству $D$ и точки, которые не принадлежат этому множеству.

# Определение границы множества и замкнутого множества

Опр. Множество всех граничных точек множества $D$ называется **границей** этого множества.

Опр. Множество $D$ называется **замкнутым**, если граница множества $D$ принадлежит этому множеству.

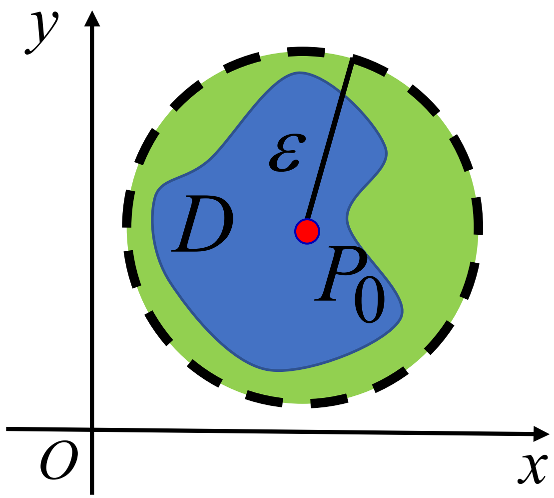
# Определение связного множества и области

Опр. Множество $D$ называется связным (точнее, линейно связным), если любые две точки этого множества можно соединить непрерывной линией, лежащей внутри множества $D$.

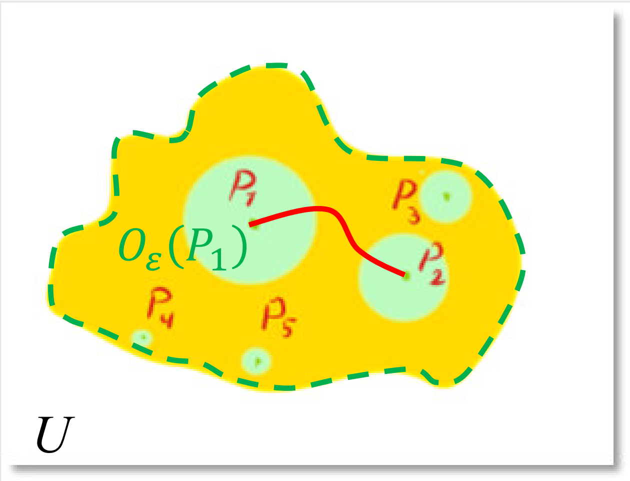
Опр. Множество $D$ называется областью, если оно открыто и связно.

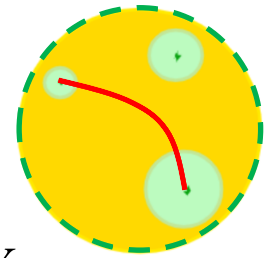
# Определение ограниченного множества

<u>Опр</u>. Множество $D$ называется ограниченным, если это множество можно поместить в некоторую окрестность некоторой точки.



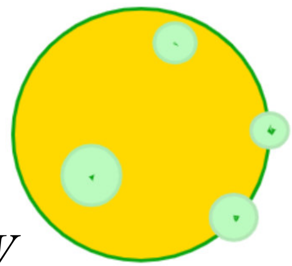
# Открытое, замкнутое, связное множества. Примеры 4,5,6



$V$

$U, V$ – открытые, не замкнутые, огранич, связные множества (области).
Граница множества $U$ – *окружность.*
Она не принадлежит множеству $U$.



$W$

$W$ – не открытое, замкнутое, ограниченное, связное множество
Граница множества $W$ – *окружность.*
Она принадлежит множеству $U$.

# Открытое, замкнутое, связное множества. Примеры 7, 8

Упр. Охарактеризовать области определения: $D(f_1), D(f_2)$ функций

$$z = f_1(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$z = f_2(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

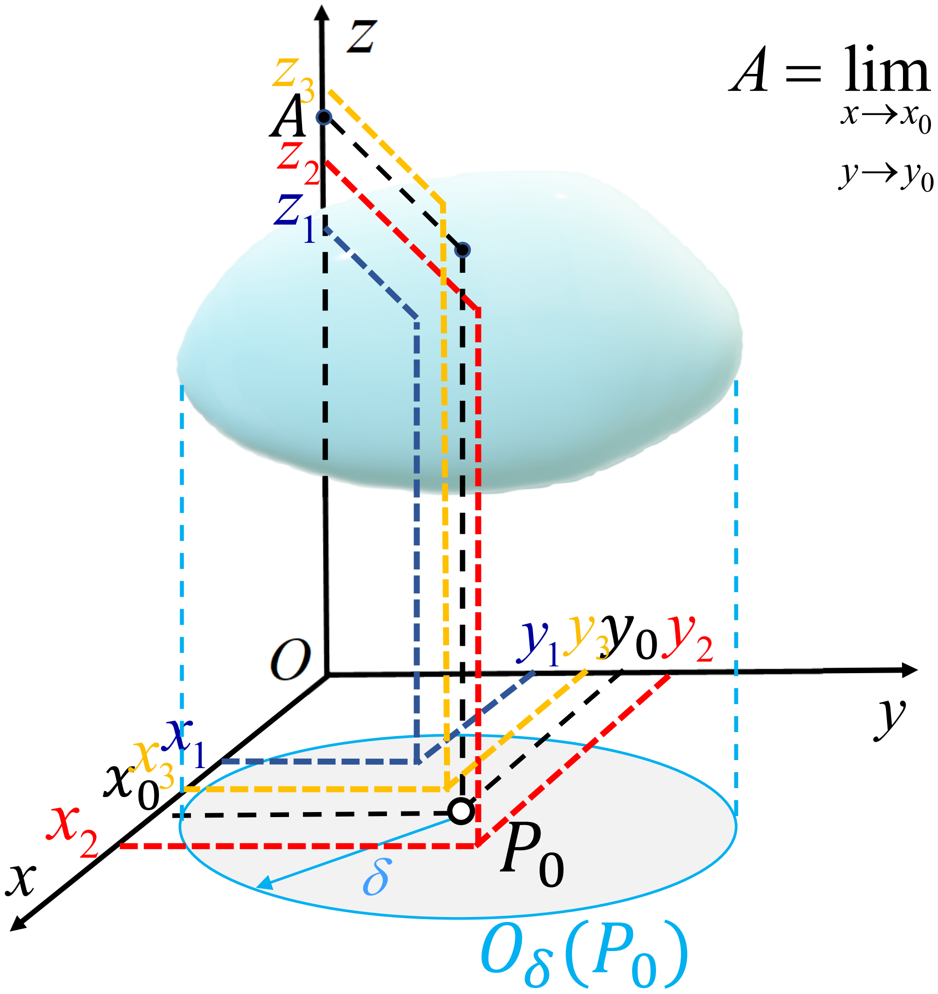
## Определение предела функции двух переменных

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в выколотой $\delta$-окрестности $\breve{O}_\delta(P_0) = O_\delta(P_0) \backslash \{P_0\}$.

Опр. (по Гейне) Пределом функции $z = f(x, y)$ в точке $P_0(x_0, y_0)$ называется число $A$ такое, что для любых последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}$ таких, что $(x_n, y_n) \in \breve{O}_\delta(P_0)$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$, $x_n \neq x_0$ , $y_n \neq y_0$ ,
имеем $\boldsymbol{\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = A.}$

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = A.$

# Геометрическая интерпретация функции двух переменных




$$A = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$$

# Определение предела функции двух переменных. Пример 9

Пример 9. Показать, что для функции $z = f(x, y) = x + y$ имеет место $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x, y) = 0.$

Возьмем $\{x_n\}, \{y_n\}$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0\ x_n \neq x_0\ ,\ y_n \neq y_0$ .

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) =$

$$= \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = 0 + 0 = 0$$

# Свойства предела функции двух переменных

Свойства пределов функции двух переменных аналогичны свойствам предела функции одной переменной

Пример 10.

$$A = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} f(x,y) = \lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \left[\rho = \sqrt{x^2+y^2}\right] = \lim_{\rho\to 0} \frac{\sin\rho}{\rho} = 1$$

## Определение непрерывности функции двух переменных

Опр. Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P_0)$. Говорят, что функции $f(x, y)$ непрерывна в точке $P_0(x_0, y_0)$, если

1) существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y)$ и

2) $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$.

Или равносильно $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f = 0$,

где $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$

# Свойства непрерывности функции двух переменных

Свойства непрерывности функции двух переменных аналогичны свойствам непрерывности функции одной переменной.

А также аналогичны определение элементарной функции и док-во ее непрерывности.

# Свойства непрерывности функции двух переменных. Пример 11

Пример 11 (Закон Менделеева-Клайперона). Функция $p = p(V,T) = k\frac{T}{V}$ − элементарная от переменных $V,T$.

Функция $p = p(V,T)$ является непрерывной в точке $P_0(V_0, T_0)$, $V_0 \neq 0$.

# Свойства непрерывности функции двух переменных

$$\Rightarrow \lim_{\substack{V \to V_0 \\ T \to T_0}} p(V,T) = \lim_{\substack{V \to V_0 \\ T \to T_0}} k\frac{T}{V} = k\frac{T_0}{V_0}$$

$$\Rightarrow \lim_{\substack{\Delta V \to 0 \\ \Delta T \to 0}} \Delta p = 0$$

При небольших изменениях температуры и объема (не очень малого) давление идеального газа на стенки сосуда изменится незначительно.

# Частная производная функции. Определение

Опр. Пусть $z = f(x, y)$ определена в области $D$.

Разность $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ $(y = \text{const})$ называется частным приращением функции $z = f(x, y)$ по переменной $x$.

Предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, если он существует, называется частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной $x$.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $z'_x$.

# Частная производная функции. Определение

Опр. Пусть $z = f(x, y)$ определена в области $D$.

Разность $\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y)$ $(x = \mathrm{const})$ называется частным приращением функции $z = f(x, y)$ по переменной $y$.

Предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$, если он существует, называется частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной $y$.

Обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $z'_y$.

# Частная производная функции. Пример 12

Пример 12. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ для $z = x^2y + xy^3$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y + xy^3\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(xy^3\right) = y\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\right) + y^3\frac{\partial}{\partial x}\left(x\right) =$$

$$[y = \text{const}] = y \cdot 2x + y^3 \cdot 1 = 2xy + y^3$$

# Частная производная функции. Пример 12

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y + xy^3\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 y\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(xy^3\right) = x^2 \frac{\partial}{\partial y}(y) + x\frac{\partial}{\partial y}\left(y^3\right) =$$

$$[x = \text{const}] = x^2 + x \cdot 3y^2 = x^2 + 3xy^2$$

# Частная производная функции. Пример 13

Пример 13. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ для $z = x\sin(2x - y^2)$

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x\sin(2x - y^2)\right) = [y = \mathrm{const}] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(x\right)\sin(2x - y^2) + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(2x - y^2)\right) =$$

$$= \sin(2x - y^2) + x\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(2x - y^2)\right) =$$

# Частная производная функции. Пример 13

$$= \sin(2x - y^2) + x\cos(2x - y^2)\frac{\partial}{\partial x}\left(2x - y^2\right) =$$

$$= \sin(2x - y^2) + x\cos(2x - y^2)\cdot 2 =$$

$$= \sin(2x - y^2) + 2x\cos(2x - y^2)$$

# Частная производная функции. Пример 13

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(x\sin(2x-y^2)\right)=[x=\text{const}]=$$

$$=x\frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(2x-y^2)\right)=$$

$$=x\cos(2x-y^2)\frac{\partial}{\partial y}\left(2x-y^2\right)=x\cos(2x-y^2)\cdot(-2y)=$$

$$=-2xy\cos(2x-y^2)$$

# Дифференциал функции двух переменных

Опр (повторение). Дифференциалом функции $y = f(x)$ называется выражение $y = y'dx = f'(x)dx$.

Опр (повторение). Дифференциалом функции $z = f(x,y)$ называется выражение

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = z'_x dx + z'_y dy}$$

# Дифференциал функции двух переменных. Пример 15

Пример 15. Найти $dz$ для $z = x^y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^y\right) = [y = \text{const}] = yx^{y-1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^y\right) = [x = \text{const}] = x^y \ln x$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x\, dy$$

# Дифференцируемость функции одной переменной (повторение)

Утв. (повторение). Для определенной в $O(x)$ дифференцируемой в точке $x$ функции $y = f(x)$

справедливо $\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x$,

где $\alpha(\Delta x)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$

и $dx = \Delta x$.

$$\boxed{\Delta y \approx dx}$$

# Дифференцируемость функции двух переменных

$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ **– полное приращение функции** $z = f(x,y)$

<u>Опр</u> Функция $z = f(x,y)$, определенная в $O(P)$, называется дифференцируемой в точке $P(x,y)$, если в этой точке существуют $z'_x$, $z'_y$ и

$$\Delta z = dz + \alpha_1(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \alpha_2(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

где $\alpha_1(\Delta x, \Delta y)$, $\alpha_2(\Delta x, \Delta y)$ – б.м.ф. при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ и $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$

$$\boxed{\Delta z \approx dz}$$

# Связь дифференцируемой и непрерывной функции двух переменных

<u>Теорема (о связи непрер-ти и дифференц-ти)</u>.
Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в $O(P)$.
*Если функция дифференцируема в точке $P$, то она непрерывна в этой точке.*

<u>Док-во.</u> $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} (dz + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y) =$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} dz = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left( \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial z}{\partial y} \Delta y \right) = 0 \ \blacksquare$$

# Дифференцируемость функции двух переменных. Пример 16 (Д.з.)

Пример 16. На сколько увеличится давление кислорода массой $m = 1$ кг в баллоне объема $V = 1$ м$^3$ при температуре $T = 27^o$ при увеличении объема на $\Delta V = 1$ л и повышении температуры на $\Delta T = 1^o$?

Решение. $p_0 = p(T_0, V_0) = k\frac{T_0}{V_0} = \frac{m}{M_{O_2}} R \frac{T_0}{V_0} = \frac{1 \cdot 8{,}31 \cdot 300}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 1} \approx 77{,}91 \cdot 10^3$ Па

$p = p(T_0 + \Delta T, V_0 + \Delta V) = \frac{m}{M_{O_2}} R \frac{T_0 + \Delta T}{V_0 + \Delta V_0} = \frac{1 \cdot 8{,}31 \cdot 301}{32 \cdot 10^{-3} \cdot 1{,}001} \approx 78{,}09 \cdot 10^3$ Па

$\Delta p = p - p_0 = 78{,}09 \cdot 10^3 - 77{,}91 \cdot 10^3 \approx$ 180 Па

# Связь дифференцируемой и непрерывной функции двух переменных. Пример 16

<u>Решение.</u> $\frac{\partial p}{\partial T}=\frac{\partial}{\partial T}\left(k\frac{T}{V}\right)=k\frac{1}{V}(T)'_T=k\frac{1}{V}$

$$\frac{\partial p}{\partial V}=\frac{\partial}{\partial V}\left(k\frac{T}{V}\right)=k\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{T}{V}\right)=-kT\frac{1}{V^2}$$

$$dp=\frac{\partial p}{\partial T}\Delta T+\frac{\partial p}{\partial V}\Delta V=k\frac{1}{V}\Delta T-kT\frac{1}{V^2}\Delta V=$$

$$=k\frac{1}{V}\left(\Delta T-\frac{T}{V}\Delta V\right)=\frac{m}{M_{O_2}}R\frac{1}{V}\left(\Delta T-\frac{T}{V}\Delta V\right)=$$

$$=\frac{1\cdot 8{,}31}{1\cdot 32\cdot 10^{-3}}\left(1-\frac{300}{1}0{,}001\right)\approx 182\text{ Па}$$

# Связь дифференцируемой и непрерывной функции двух переменных. Пример 16

<u>Выводы</u>:

1) $\Delta p$ мало, поскольку $\Delta T, \Delta V$ малы, а функция $p(T,V)$ непрерывна;

2) $\Delta p \approx dp$