

Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и  
прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребцкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

# Лекция 2

## Математический анализ

### Производная функции (свойства)

# Арифметические свойства производной функции в точке

Теорема 1. Пусть функции  $u(x)$  и  $v(x)$  определены в  $O(x_0)$  и дифференцируемы в точке  $x = x_0$ .

(1) Производная константы равна нулю:

$$c' = 0$$

# Арифметические свойства производной функции в точке

(2) Произведение константы  $c$  и функции  $u$  дифференцируема в точке  $x = x_0$  и ее производная равна:

$$(cu)' \Big|_{x_0} = cu'(x_0)$$

$$(cu)' = cu'$$

(константу можно вынести за знак производной)

# Арифметические свойства производной функции в этой точке

(3) Сумма/разность функций  $u, v$  дифференцируема в точке  $x = x_0$  и ее производная равна сумме/разности производных в этой точке:

$$(u \pm v)' \Big|_{x_0} = u'(x_0) \pm v'(x_0)$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v'$$

# Арифметические свойства производной функции в этой точке

(4) Произведение функций  $u, v$  дифференцируемо в точке  $x = x_0$  и его производная равна

$$(u \cdot v)' \Big|_{x_0} = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

## Арифметические свойства производной функции в этой точке

(5) Частное функций  $u, v$  дифференцируемо в точке  $x = x_0$ , при условии, что знаменатель  $v(x_0) \neq 0$  и его производная равна

$$\left(\frac{u}{v}\right)' \Big|_{x_0} = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$$

# Арифметические свойства производной функции в точке

Доказательство.

$$(1) \Delta c = c - c \Rightarrow c' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta c}{\Delta x} = 0 \quad \blacksquare$$

$$(2) \Delta(cu) = cu(x) - cu(x_0) = c\Delta u(x_0)$$

$$\begin{aligned} (cu)' \Big|_{x_0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(cu)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{c\Delta u(x_0)}{\Delta x} = \\ &= c \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} = cu'(x_0) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

# Арифметические свойства производной функции в точке

$$\begin{aligned}(3) \quad \Delta(u + v) &= (u + v)(x) - (u + v)(x_0) = \\ &= (u(x) + v(x)) - (u(x_0) + v(x_0)) = \\ &= (u(x) - u(x_0)) - (v(x_0) - v(x_0)) = \\ &= \Delta u(x_0) + \Delta v(x_0)\end{aligned}$$

# Арифметические свойства производной функции в точке

$$(u + v)' \Big|_{x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(u + v)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x_0) + \Delta v(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} \right) =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} = u'(x_0) + v'(x_0) \blacksquare$$

# Арифметические свойства производной функции в точке

$$\begin{aligned}(4) \quad \Delta(uv) &= u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0) = \\ &= u(x)v(x) - u(x_0)v(x_0) \pm u(x)v(x_0) = \\ &= (u(x)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)) + \\ &\quad (u(x)v(x) - u(x)v(x_0)) = \\ &= (u(x) - u(x_0))v(x_0) + u(x)(v(x) - v(x_0)) = \\ &= \Delta u(x)v(x_0) + u(x)\Delta v(x)\end{aligned}$$

(5) Без доказательства.

# Арифметические свойства производной функции в точке

$$(4) (u \cdot v)' \Big|_{x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta(uv)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x)v(x_0) + u(x)\Delta v(x)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} v(x_0) + u(x) \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} \right) =$$

# Арифметические свойства производной функции в точке

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x_0)}{\Delta x} v(x_0) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) \frac{\Delta v(x_0)}{\Delta x} =$$

$$\left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x_0 + \Delta x) = u(x_0) \right]$$

$$= u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0) \blacksquare$$

# Арифметические свойства производной функции в точке

Пример 2. Найти производную функции

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x^3 - 1} \text{ в любой точке } x \neq 1.$$

Решение.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left( \frac{x^2 + 3x - 2}{x^3 - 1} \right)' = \left[ \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \right] \\ &= \frac{(x^2 + 3x - 2)'(x^3 - 1) - (x^2 + 3x - 2)(x^3 - 1)'}{(x^3 - 1)^2} \end{aligned}$$

# Арифметические свойства производной функции в точке

$$\begin{aligned} [u' &= (x^2 + 3x - 2)' = (x^2)' + (3x)' - 2' = \\ &= 2x + 3x' - 0 = 2x + 3] \end{aligned}$$

$$[v' = (x^3 - 1)' = 3x^2]$$

⇓

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x^3 - 1) - (x^2 + 3x - 2) \cdot 3x^2}{(x^3 - 1)^2}$$

# Арифметические свойства производной функции в точке

Пример 3. Найти производную функции  $f(x) = \operatorname{tg} x$  в любой точке  $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{N}$ .

Решение.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{tg} x)' = \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \left[ \left( \frac{u}{v} \right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \right] \\ &= \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \end{aligned}$$

# Арифметические свойства производной функции в точке

$$= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Таким образом,  $f'(x) = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

# Производная сложной функции в точке

## Теорема 4 (производная сложной функции)

- 1) Пусть функция  $y = f(u)$  определена в  $O(u_0)$  и дифференцируема в точке  $u = u_0$ .
- 2) И пусть  $u = u(x)$  определена в  $O(x_0)$  и дифференцируема в точке  $x = x_0$ .
- 3) Причем  $u_0 = u(x_0)$  и  $u(O(x_0)) \subseteq O(u_0)$

# Производная сложной функции в точке

Тогда сложная функция  $y = f(u(x))$  определена в  $O(x_0)$  и дифференцируема в точке  $x = x_0$ , и ее производная в этой точке равна

$$y'(x_0) = \left( f(u(x)) \right)' \Big|_{x=x_0} = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0)$$

$$y' = f'(u) u'$$

$$\left( \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \right)$$

# Производная сложной функции в точке

Доказательство.

$$y'(x_0) = \left( f(u(x)) \right)' \Big|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}$$

$$[\Delta y(x_0) = y(x) - y(x_0) =$$

$$= f(u(x)) - f(u(x_0)) = f(u) - f(u_0) = \Delta f(u_0)]$$

# Производная сложной функции в точке

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$[\Delta u = u(x) - u(x_0),$$

$u = u(x)$  дифференцируема в точке  $x = x_0 \Rightarrow$

$u = u(x)$  непрерывна в точке  $x = x_0 \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0]$$

# Производная сложной функции в точке

Доказательство.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta f(u_0)}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0) \blacksquare$$

# Производная обратной функции в точке

## Теорема 5 (производная обратной функции)

1) Пусть функция  $y = y(x)$  определена и обратима в  $O(x_0)$  и дифференцируема в точке  $x = x_0$ .

2) И пусть  $y'_0 = y'(x_0) \neq 0$ .

Тогда обратная функция  $x = x(y)$ ,  $y \in O(y_0)$ , где  $y_0 = y(x_0)$ , дифференцируема в точке  $y = y_0$  и ее производная в этой точке равна

# Производная обратной функции в точке

$$x'(y_0) = \frac{1}{y'(x_0)}$$

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$$

$$\left( \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \right)$$

# Производная обратной функции в точке

Доказательство.

$$x'(y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

$[y = y(x)$  дифференцируема в точке  $x = x_0 \Rightarrow$   
 $y = y(x)$  непрерывна в этой точке,

по теореме об обратной функции

функция  $x = x(y)$  непрерывна в точке

$$y = y_0 \Rightarrow \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \Delta x = 0]$$

# Производная обратной функции в точке

Доказательство.

$$\begin{aligned}x'(y_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} \\ &= \frac{1}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x_0)} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

# Производная обратной функции в точке

Пример 3. Найти производную функции  $f(x) = \ln x$ .

Решение.

$$y(x) = e^x \Rightarrow x = x(y) = \ln y$$

$$\Rightarrow (\ln y)' = x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

$$(\ln y)' = \frac{1}{y} \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

# Производная обратной функции в точке

Пример 4. Найти  $f'(x)$  для  $f(x) = \arcsin x$

Решение.  $y(x) = \sin x \Rightarrow x = x(y) = \arcsin y$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\arcsin y)' &= x'(y) = \frac{1}{y'(x)} = \frac{1}{(\sin x)'} \\ &= \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \end{aligned}$$

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}} \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

# Производная обратной функции в точке

Пример 5. Доказать, что  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$  (упр.)

Пример 6. Доказать, что  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(упр.)

Пример 7. Доказать, что  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$  (упр.)

Пример 8. Доказать, что  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

(упр.)

# Дифференцируемость функции на интервале

Опр. Функция  $y = f(x)$  называется **дифференцируемой на интервале  $(a, b)$** , если она определена на  $(a, b)$  и дифференцируема для любой точки  $x_0 \in (a, b)$ .

Замечание. Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема на  $(a, b)$ , то в каждой точке  $x_0 \in (a, b)$  этого интервала существует касательная к графику функции.

# Дифференцируемость функции на интервале

Пример 9. Функция  $y = x^2$   
дифференцируемой на интервале  $(-\infty, +\infty)$ .

Пример 10. Функция  $y = \sqrt{x}$   
дифференцируемой на интервале  $(0, +\infty)$ .

Пример 11. Функция  $y = \operatorname{tg} x$   
дифференцируема на интервале  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ .

# Правила дифференцирования

Теорема 6. Пусть функции  $u = u(x)$  и  $v = v(x)$  определены и дифференцируемы на интервале  $(a, b)$ . Тогда их сумма/разность, произведение, частное при условии, что знаменатель не равен нулю, дифференцируемы на этом промежутке.

И при этом справедливы формулы

# Правила дифференцирования

1)  $c' = 0$

2)  $(cu)' = cu'$

3)  $(u \pm v)' = u' \pm v'$

4)  $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

5)  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

# Дифференцирование сложной функции на интервале

## Теорема 7 (производная сложной функции на интервале)

- 1) Пусть функция  $y = f(u)$  определена и дифференцируема на  $(c, d)$ .
- 2) Пусть функция  $u = u(x)$  определена и дифференцируема на  $(a, b)$ .
- 3) Причем  $u(a, b) = (c, d)$ .

# Производная сложной функции в точке

Тогда сложная функция  $y = f(u(x))$  определена и дифференцируема на  $(a, b)$ , и

$$y' = f'(u) u'$$

# Производная обратной функции в точке

## Теорема 8 (производная обратной функции)

Пусть функция  $y = y(x)$  определена и обратима и дифференцируема на  $(a, b)$ .

Тогда обратная функция  $x = x(y)$  определена и дифференцируема на  $(c, d)$ , где  $y((a, b)) = (c, d)$ , и

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$$

# Таблица производных

$$1) (x^n)' = nx^{n-1}$$

$$2) (e^x)' = e^x$$

$$3) (a^x)' = a^x \ln a, a > 0, a \neq 1$$

$$4) (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$5) (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$

$$6) (\sin x)' = \cos x$$

$$7) (\cos x)' = -\sin x$$

$$8) (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$9) (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

# Таблица производных

$$10) (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11) (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12) (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$13) (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

# Таблица производных для сложной функции

$$1) (u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$$

$$2) (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$3) (a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$4) (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$5) (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$$

$$6) (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$7) (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

# Таблица производных для сложной функции

$$8) (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$9) (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$10) (\operatorname{arcsin} u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$11) (\operatorname{arccos} u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$12) (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$13) (\operatorname{arctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

# Таблица производных для сложной функции

## Примеры.

$$1) y = (3x - 17)^{10}$$

$$y = u^{10}, u = 3x - 17$$

$$\begin{aligned} y' &= 10u \cdot u' = 10 \cdot (3x - 17)^9 \cdot (3x - 17)' = \\ &= 10 \cdot (3x - 17)^9 \cdot 3 = 30 \cdot (3x - 17)^9 \end{aligned}$$

# Таблица производных для сложной функции

$$2) y = \operatorname{arctg}(7x + 1)$$

$$y = \operatorname{arctg} u, u = 7x + 1$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{1}{1+(7x+1)^2} \cdot (7x+1)' = \\ &= \frac{1}{1+(7x+1)^2} \cdot 7 = \frac{7}{1+(7x+1)^2} \end{aligned}$$

# Таблица производных для сложной функции

## Примеры.

$$1) y = (3x - 17)^{10}$$

$$y = u^{10}, u = 3x - 17$$

$$\begin{aligned} y' &= 10u \cdot u' = 10 \cdot (3x - 17)^9 \cdot (3x - 17)' = \\ &= 10 \cdot (3x - 17)^9 \cdot 3 = 30 \cdot (3x - 17)^9 \end{aligned}$$

# Таблица производных для сложной функции

$$2) y = \operatorname{arctg}(7x + 1)$$

$$y = \operatorname{arctg} u, u = 7x + 1$$

$$y' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u' = \frac{1}{1+(7x+1)^2} \cdot (7x+1)' =$$

$$= \frac{1}{1+(7x+1)^2} \cdot 7 = \frac{7}{1+(7x+1)^2}$$

# Таблица производных для сложной функции

$$3) y = \sin^2(3x - 1)$$

$$y = u^2, u = 3x - 1$$

$$\begin{aligned} y' &= 2u \cdot u' = 2 \sin(3x - 1) \cdot (\sin(3x - 1))' = \\ &= 2 \sin(3x - 1) \cdot \cos(3x - 1)(3x - 1)' = \\ &= 2 \sin(3x - 1) \cdot \cos(3x - 1) \cdot 3 = \\ &= 6 \sin(3x - 1) \cdot \cos(3x - 1) \end{aligned}$$

# Логарифмическое дифференцирование

1)  $y = x^{\sin x}$  – степенно-показательная функция

$$\ln y = \ln x^{\sin x}$$

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x$$

$$(\ln y)' = (\sin x \cdot \ln x)'$$

$$\frac{1}{y} y' = (\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)'$$

# Логарифмическое дифференцирование

$$\frac{1}{y} y' = \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y \left( \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$y' = x^{\sin x} \left( \cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

# Логарифмическое дифференцирование

$$2) y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$$

$$\Rightarrow \ln y = \ln \sqrt[3]{x(x-1)^2}$$

(При этом считаем, что  $y > 0$ )

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{x(x-1)^2}$$

$$\ln y = \ln \sqrt[3]{x} + \ln \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

# Логарифмическое дифференцирование

$$\ln y = \frac{1}{3} \ln x + \frac{2}{3} \ln(x-1)$$

$$(\ln y)' = \left( \frac{1}{3} \ln x + \frac{2}{3} \ln(x-1) \right)'$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{x-1}$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{x} + \frac{2}{x-1} \right)$$

# Логарифмическое дифференцирование

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3} \frac{(x-1)+2x}{x(x-1)}$$

$$y' = y \frac{3x-1}{3x(x-1)}$$

$$y' = \sqrt[3]{x(x-1)^2} \frac{3x-1}{3x(x-1)}$$

$$y' = \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2} \sqrt[3]{x-1}}$$