

Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и
прикладной химии, III семестр (II курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Наigreбецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 14

Дифференциальные уравнения I-го порядка

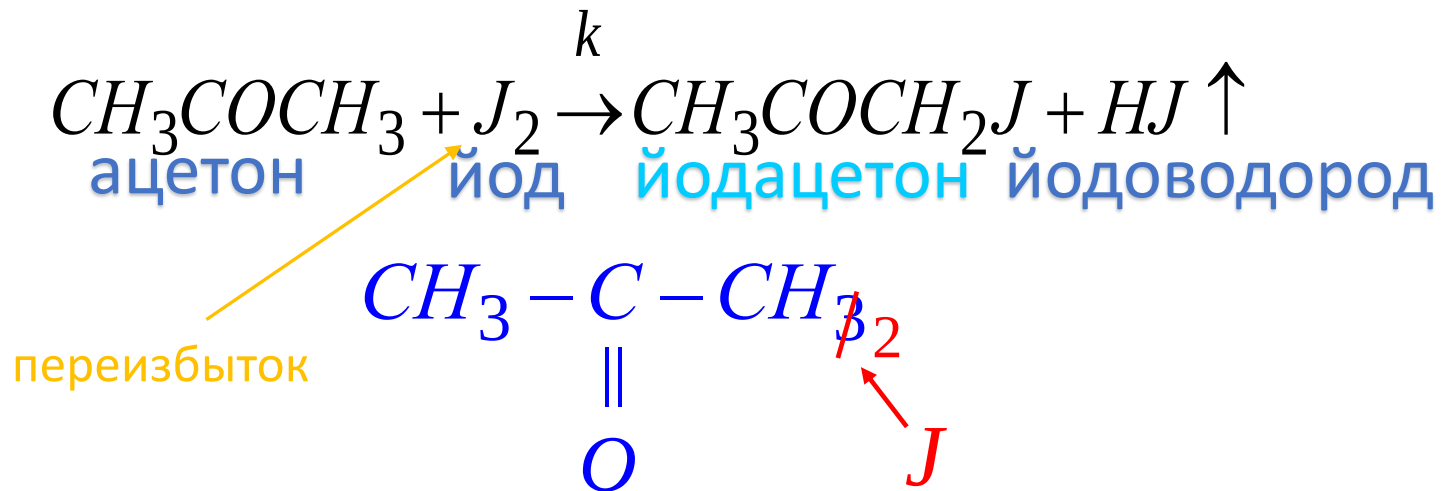
Лекция 14

Дифференциальные уравнения I-го порядка

1. Задачи из химии и физики, приводящие к ДУ I-го порядка.
2. Основные понятия для ДУ I-го порядка.
3. Примеры.

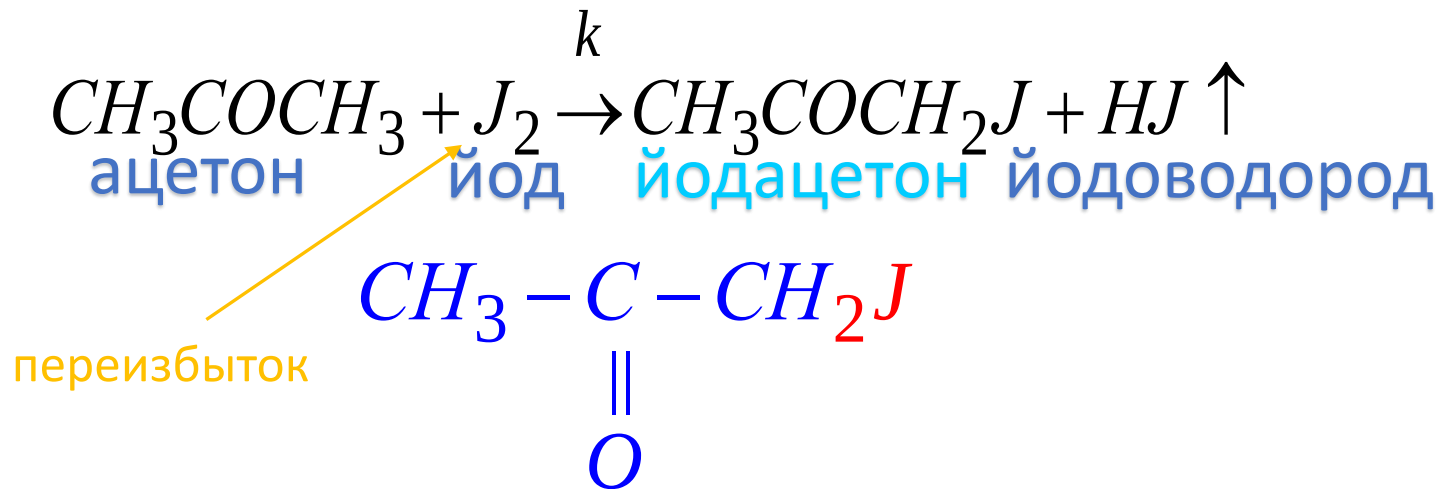
Задача из химии, приводящие к ДУ I-го порядка

Задача 1. Реакция ацетона с йодом идет при переизбытке йода. Найти зависимость концентрации ацетона от времени.



Задача из химии, приводящие к ДУ I-го порядка

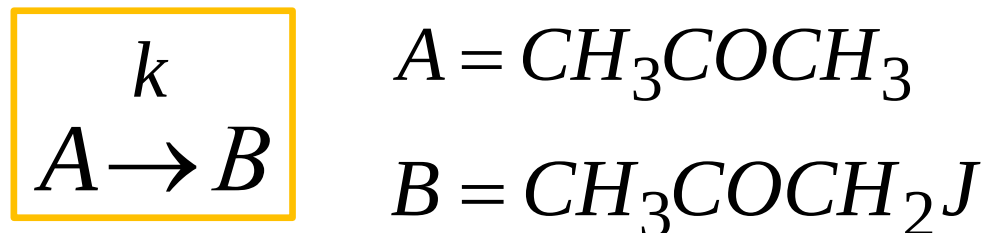
Задача 1. Реакция ацетона с йодом идет при переизбытке йода. Найти зависимость концентрации ацетона от времени.



Задача из химии, приводящие к ДУ I-го порядка

Решение.

Это односторонняя реакция первого порядка:



$x(t) = [A]$ - концентрация ацетона

$y(t) = [B]$ - концентрация йодацетона

$x(t), y(t)$ – искомые функции

Задача из химии, приводящие к ДУ I-го порядка

Этот слайд можно не конспектировать

Скорость реакции по элементу пропорциональна произведению концентраций в степенях, равных стехиометрическим коэффициентам.

$$\omega = -\frac{dx(t)}{dt} = k \cdot x(t)$$

$$x(t) + y(t) = a$$

закон сохранения вещества

$$x(0) = a \quad a - \text{концентрация вступающего}$$

$$y(0) = 0 \quad \text{в реакцию вещества (ацетона)}$$

Задача из химии, приводящие к ДУ I-го порядка. Задача Коши

Задача Коши:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -kx & \text{- дифференциальное уравнение (ДУ)} \\ x(0) = a & \text{- начальные условия (НУ)} \end{cases}$$

Решение задачи Коши:

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad (\cdot dt)$$

$$dx = -kx dt \quad (: x)$$

Задача из химии, приводящие к ДУ I-го порядка. Общее решение

$$\frac{dx}{x} = -k dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int k dt$$

Константа C
прибавляется
только один
раз!

$$\ln |x| = -kt + C \quad \text{- общий интеграл}$$

$$|x| = e^{-kt+C}$$

$$|x| = e^C e^{-kt}$$

$$x = \pm e^C e^{-kt}$$

C_1

Задача из химии, приводящие к ДУ I-го порядка. Общее решение

$$\frac{dx}{x} = -k dt$$

$$\int \frac{dx}{x} = -\int k dt$$

Константа C
прибавляется
только один
раз!

$$\ln |x| = -kt + C \quad \text{- общий интеграл}$$

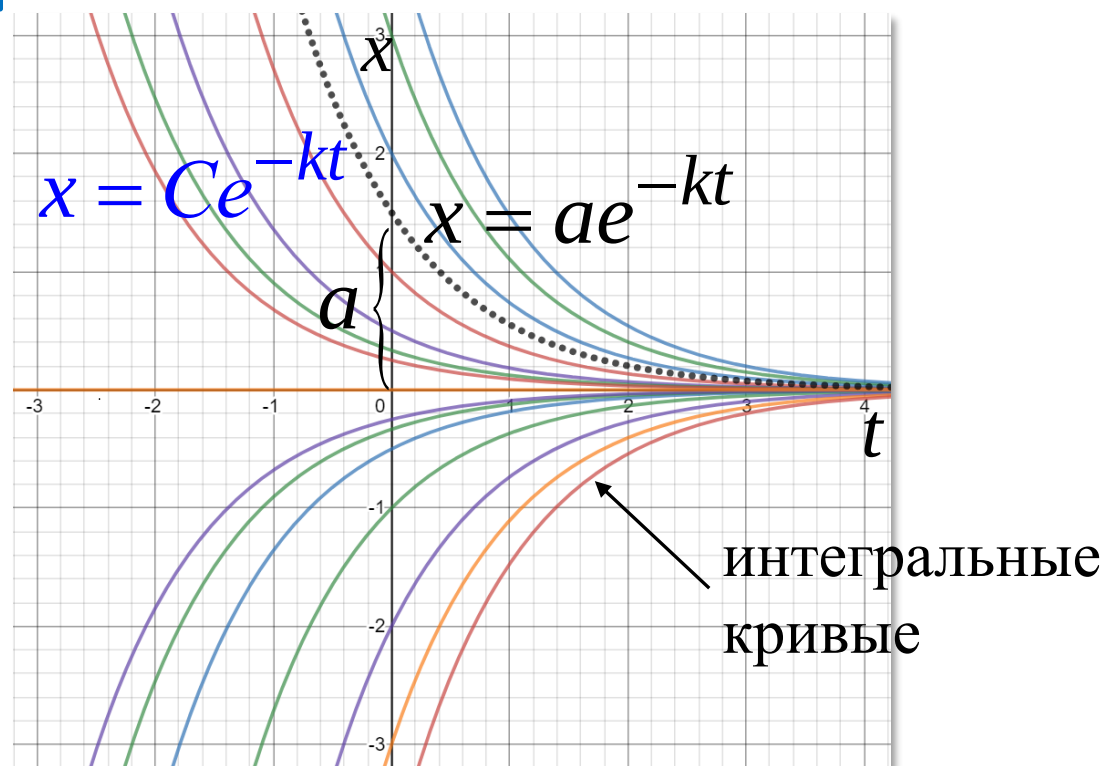
$$|x| = e^{-kt+C}$$

$$|x| = e^C e^{-kt}$$

$$x = \pm e^C e^{-kt}$$

Задача из химии, приводящие к ДУ I-го порядка. Общее решение

$$x = Ce^{-kt} \quad \text{- общее решение}$$

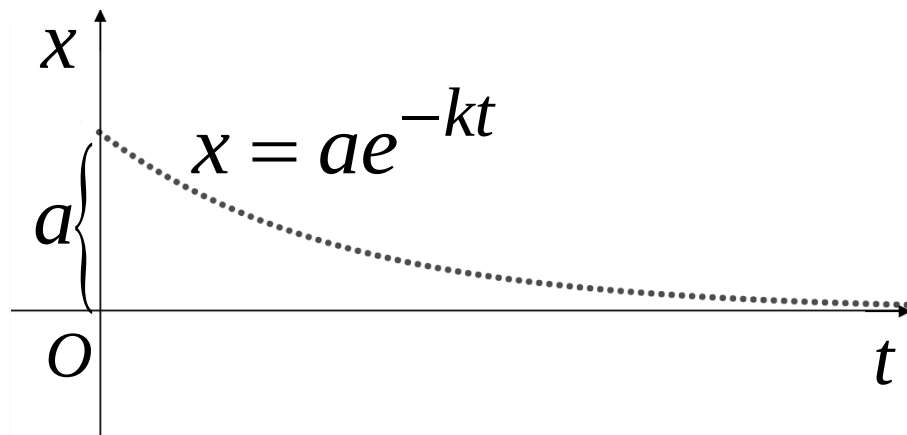


Задача из химии, приводящие к ДУ I-го порядка. Частное решение

$$x(0) = Ce^{-k \cdot 0}$$

$$a = C$$

$$C_0 = a$$



$$x = ae^{-kt}$$

- частное решение, удовлетворяющее
данным НУ

Задача из химии. Частное решение

Этот слайд можно не конспектировать

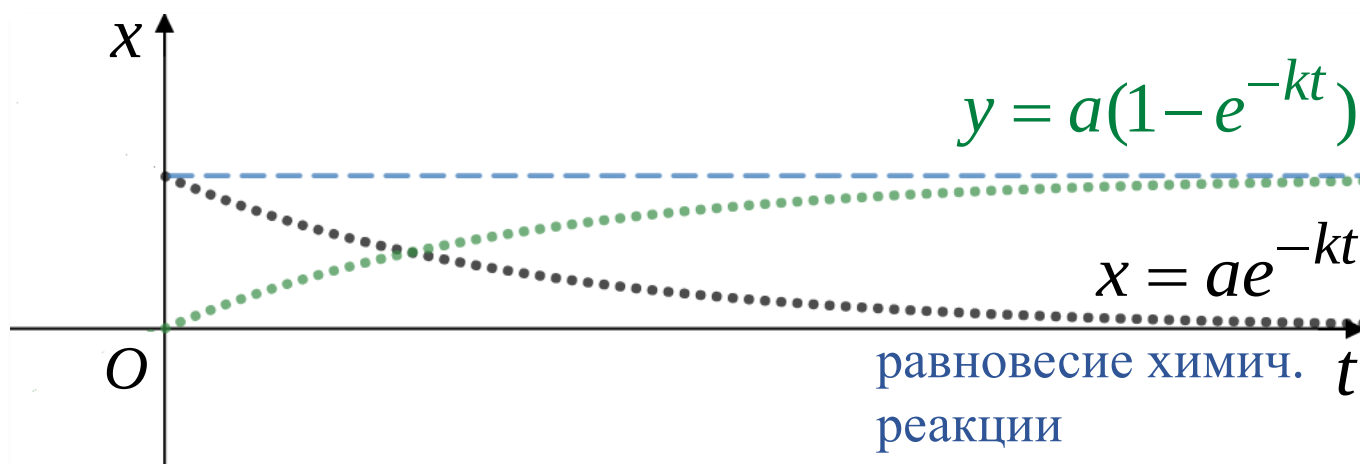
$$x = ae^{-kt}$$

$$x + y = a$$

$$ae^{-kt} + y = a$$

$$y = a - ae^{-kt}$$

$$y = a(1 - e^{-kt})$$



$$x \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow \infty, \quad y \rightarrow a \text{ при } t \rightarrow \infty$$

Задача 2 из физики, приводящие к ДУ I-го порядка

Задача 2. Скорость распада радия пропорциональна массе радия. Найти массу m радия в момент времени t и период полураспада T , если в нач. момент $t = 0$ времени масса равна m_0 .

Решение. Искомой функцией является $m(t)$.

Задача Коши:
$$\begin{cases} \frac{dm}{dt} = -km \\ m(0) = m_0 \end{cases}$$

Задача из физики, приводящие к ДУ I-го порядка

Из решения задачи 1 следует, что

$$m = Ce^{-kt} \quad - \text{общее решение ДУ}$$

$$m = m_0 e^{-kt} \quad - \text{частное решение, удовлетворяющее} \\ \text{данным НУ}$$

$$m_0 e^{-kT} = \frac{m_0}{2} \Rightarrow e^{-kT} = \frac{1}{2} \Rightarrow -kT = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$T = \frac{\ln 2}{k}$$

Определение ДУ I-го порядка

Опр. Функциональное уравнение вида

(1) $y' = f(x, y)$ или (2) $F(x, y, y') = 0$, которое связывает между собой **независимую переменную x , искомую функцию y и ее производную y' первого порядка** называется **дифференциальным уравнением первого порядка (ДУ I-го порядка)**.

Пример 1. $y' = -ky$, $(y')^2 - k^2 y^2 = 0$ – ДУ I порядка.

Определение частного решения ДУ I-го порядка

Опр. **Решением (частным)** уравнения (1) или (2) называется любая функция $y = y(x)$,

$x \in (a, b)$, которая обращает уравнение в тождество (верное равенство для всех $x \in (a, b)$), т.е.

1) $y'(x) = f(x, y(x))$ или

2) $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

Определение интегральной кривой

Пример 2.

Функция $y = e^{-kx}$, $x \in (-\infty; +\infty)$

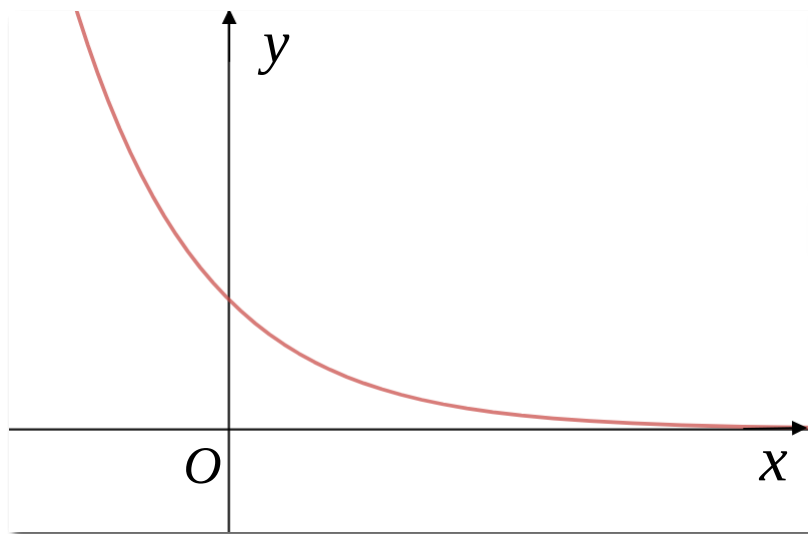
является **решением** уравнения $y' = -k y$:

$$y' = \left(-e^{kx} \right)' = -k e^{kx} = -k y.$$

Опр. **Интегральной кривой** ДУ называется график решения этого ДУ.

Определение интегральной кривой

Пример 3.



*Интегральная
кривая –*

график решения

$$y = e^{-kx}$$

$$\text{ДУ } y' = -ky$$

Определение частного интеграла

Опр. Частное решение $y = y(x)$ в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$ называется **частным интегралом** ДУ.

Пример 4. Уравнение $\ln y = -kx$ является частным интегралом ДУ $y' = -kx$, т.е. решением ДУ $y = e^{-kx}$ в неявном виде.

Определение общего решения ДУ I-го порядка

Опр. **Общим решением** ДУ (1) $y' = f(x, y)$ или (2) $F(x, y, y') = 0$ называется множество всех частных решений, записанных в виде функции $y = y(x, C)$, в частности,

для любого допустимого C функция $y = y(x, C)$ является решением ДУ.

Определение общего решения ДУ I-го порядка

Пример 5. Функция $y = Ce^{-kx}$ является общим решением уравнения $y' = -ky$ для любого C :

$$y' = \left(Ce^{-kx} \right)' = C(-k)e^{-kx} = -kCe^{-kx}$$

$$-ky = -kCe^{-kx} \Rightarrow$$

$$y' = -ky \text{ - верное тождество}$$

Определение общего интеграла ДУ I-го порядка

Опр. **Общим интегралом** ДУ I-го порядка называется общее решение в неявном виде:
 $\Phi(x, y, C) = 0$.

Пример 6

Уравнение $\ln |y| = -kx + \ln C$
является общим интегралом ДУ $y' = -ky$,
т.е. общим решением ДУ
 $y = \pm e^{-kx + \ln C} \Leftrightarrow y = \pm C e^{-kx}$ в неявном виде.

ДУ I-го порядка. Основные понятия

Пример 6. $y' = x$ — ДУ I-го порядка. Решим его.

$$y' = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \quad (\cdot dx)$$

$$dy = x dx$$

$$\int dy = \int x dx$$

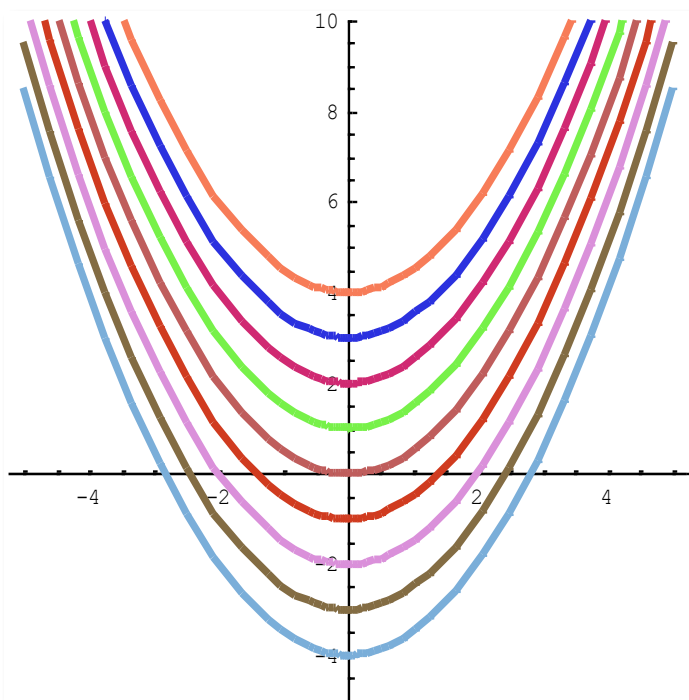
$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

**общее
решение**

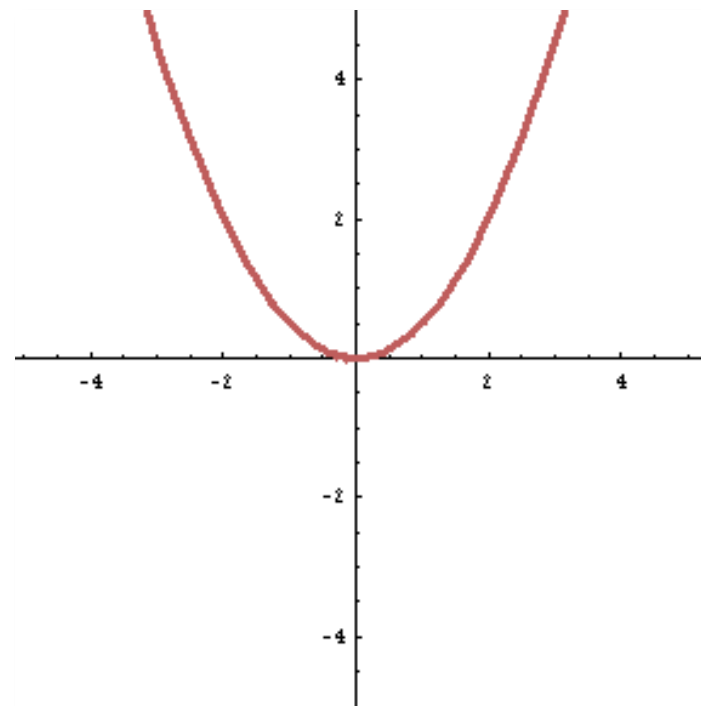
$$y = \frac{x^2}{2}$$

**частное решение
при $C=0$**

ДУ I-го порядка. Основные понятия



**семейство
интегральных
кривых**



интегральная кривая

Задача Коши ДУ I-го порядка

Пусть

1) $y' = f(x, y)$ – ДУ I-го порядка

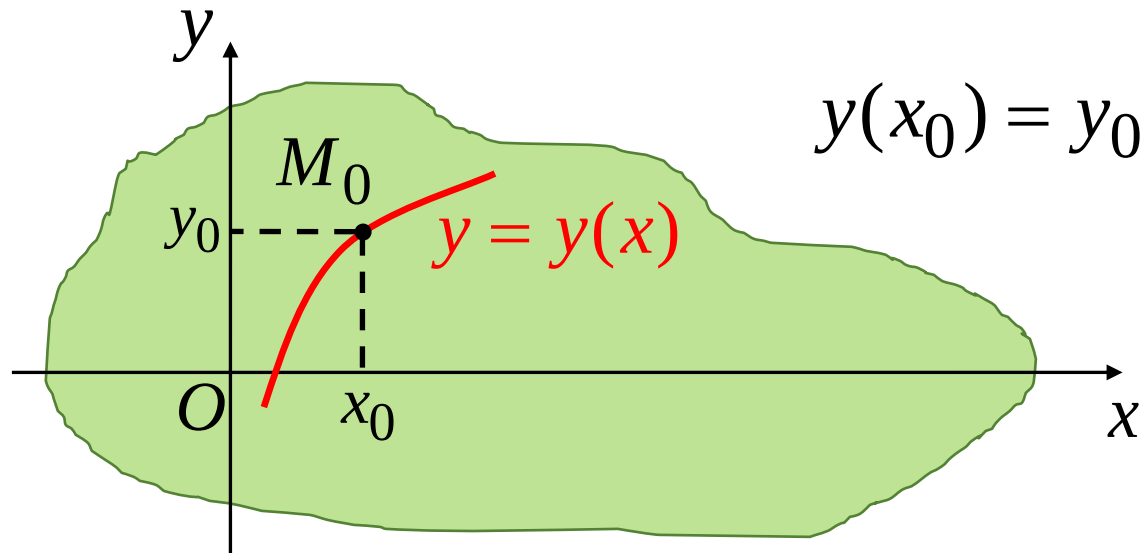
2) $y(x_0) = y_0$ – начальное условие (НУ)

Найти

решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию (НУ).

Задача Коши ДУ I-го порядка

Геометрический смысл: найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.



Теорема Коши для ДУ I-го порядка

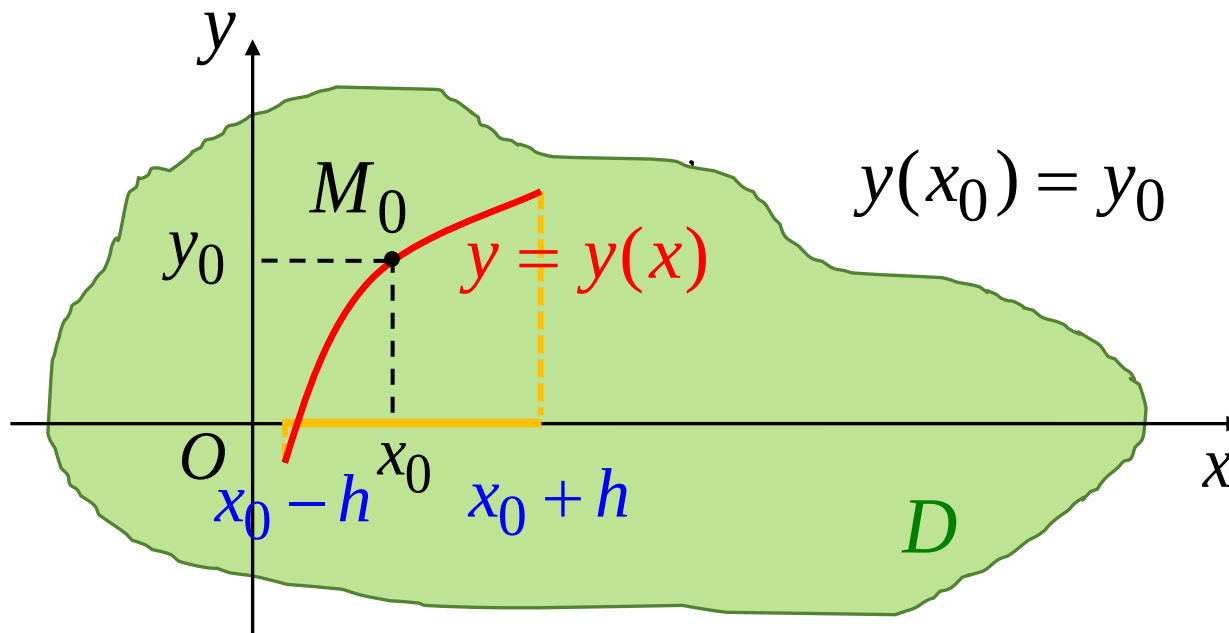
Теорема 1 (теорема Коши существования и единственности решения ДУ I-го порядка).

Если для ДУ I-го порядка $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своей частной производной $f'_y(x, y)$ в области D ,

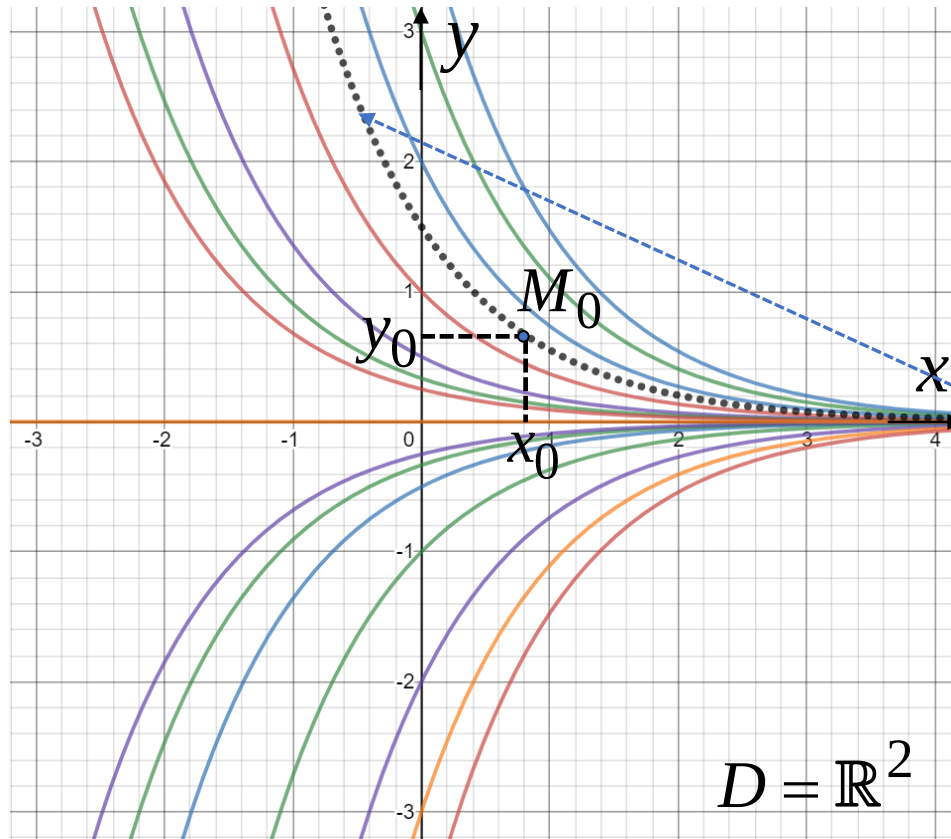
то для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ на некотором интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ *существует* *единственное решение* $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее НУ $y(x_0) = y_0$.

Геометрический смысл теоремы Коши

Через каждую точку $M_0(x_0, y_0) \in D$ проходит **единственная** интегральная кривая $y = y(x)$, $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$.

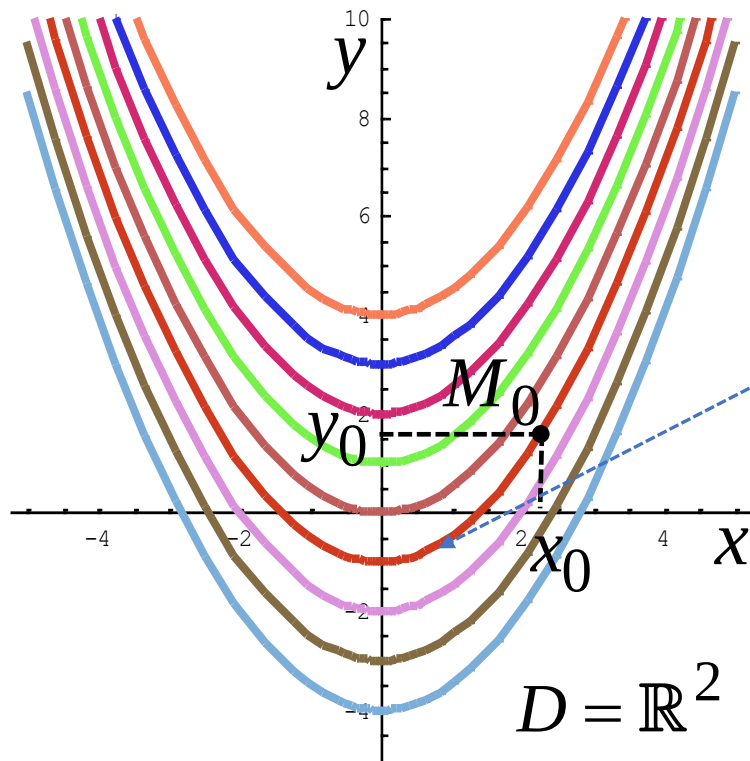


Геометрический смысл теоремы Коши



интегральная
кривая для ДУ
 $y' = -kx$,
проходящая
через точку
 $M_0(x_0, y_0)$

Геометрический смысл теоремы Коши



интегральная кривая
для ДУ $y' = x$,
проходящая через
точку $M_0(x_0, y_0)$