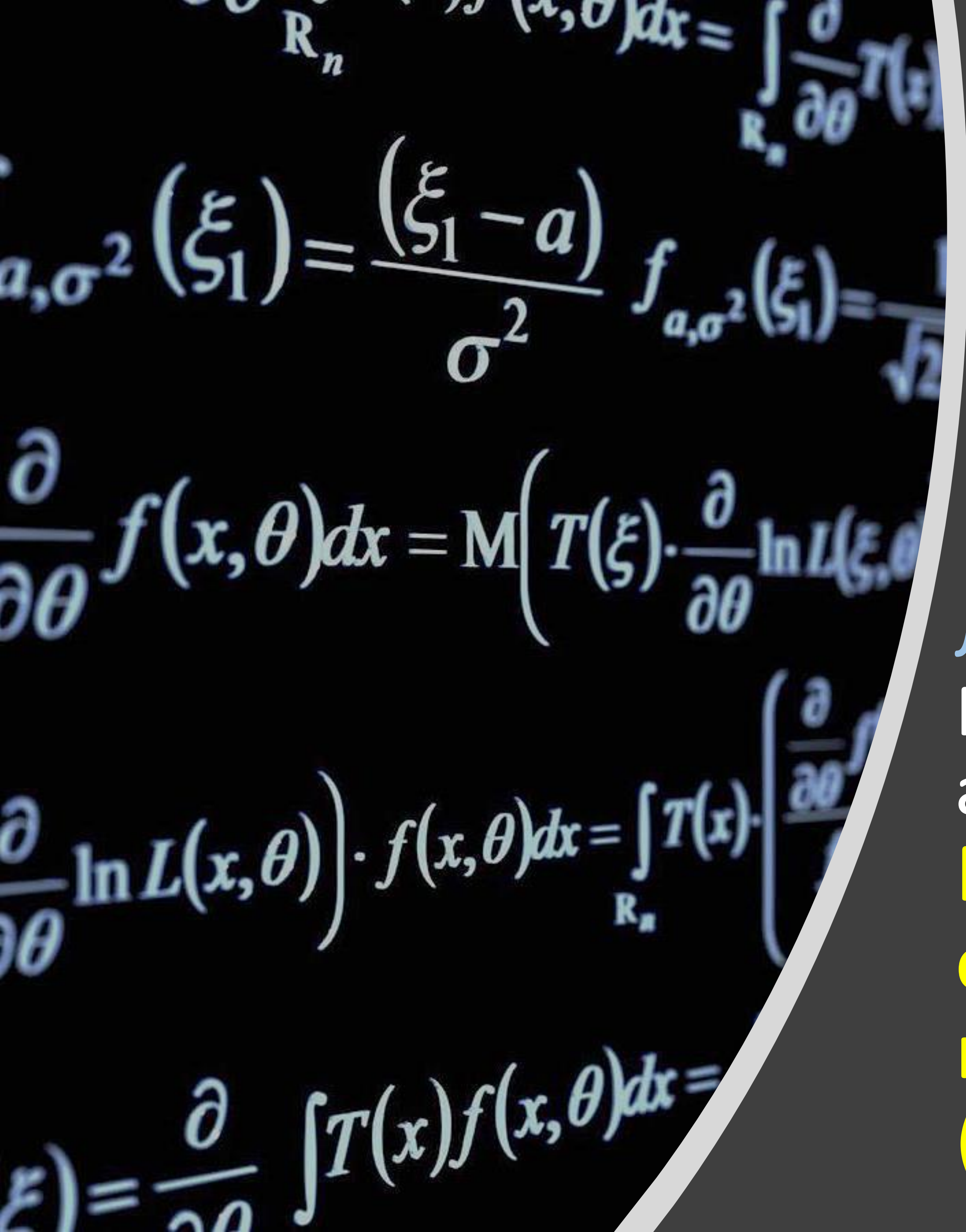


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, II семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 14
Математический анализ
Приложение определенного интеграла (продолжение)

Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически

Теорема 2. Если плоская кривая задается параметрически уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

где функции $x(t)$, $y(t)$ — непрерывно дифференцируемы, то её длина равна:

$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt}$$

Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически

Доказательство. Если плоская кривая задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta,$$

то $t = t(x),\ y = f(x) = y(t(x)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f'(x) = y'_x = y'_t(t(x)) \cdot t'_x(x) =$$

Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически

$$= y'_t(t(x)) \cdot \frac{1}{x'_t(t)} = \frac{y'_t(t)}{x'_t(t)};$$

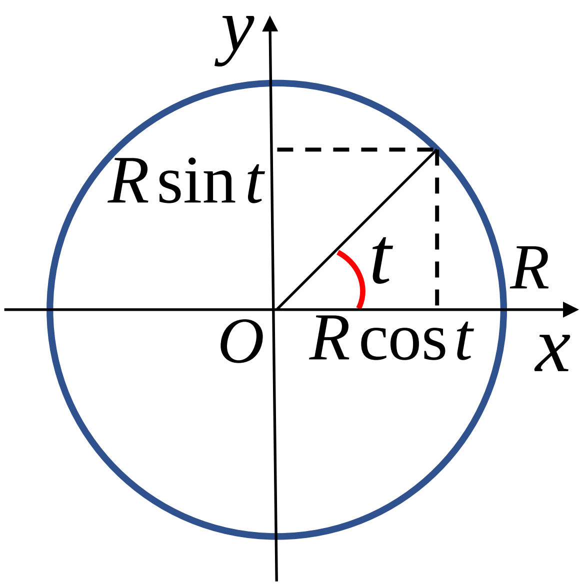
$$\Rightarrow l = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} dx = \begin{bmatrix} dx = x'_t(t)dt \\ x = a \Rightarrow t = \alpha \\ x = b \Rightarrow t = \beta \end{bmatrix} =$$

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + \left[\frac{y'(t)}{x'(t)} \right]^2} x'(t)dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t) \right)^2 + \left(y'(t) \right)^2} dt \blacksquare$$

Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически

Пример 6. Найти длину окружности.

Решение. Параметрически окружность радиуса R задается уравнениями



$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\begin{cases} x'(t) = -R\sin t \\ y'(t) = R\cos t \end{cases}$$

Вычисление длины плоской кривой, заданной параметрически

Следовательно,

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{\left(-R\sin t\right)^2 + \left(R\cos t\right)^2} =$$

$$= \sqrt{R^2\sin^2 t + R^2\cos^2 t} = R\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = R$$

$$l_{окружн.} = R\int_0^{2\pi} dt = R\,t\Big|_0^{2\pi} = 2\pi R$$

Вычисление длины пространственной кривой, заданной параметрически

Теорема 3. Если пространственная кривая задается параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad \alpha \le t \le \beta, \\ z = z(t), \end{cases}$$

где функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывно дифференцируемы, то её длина равна:

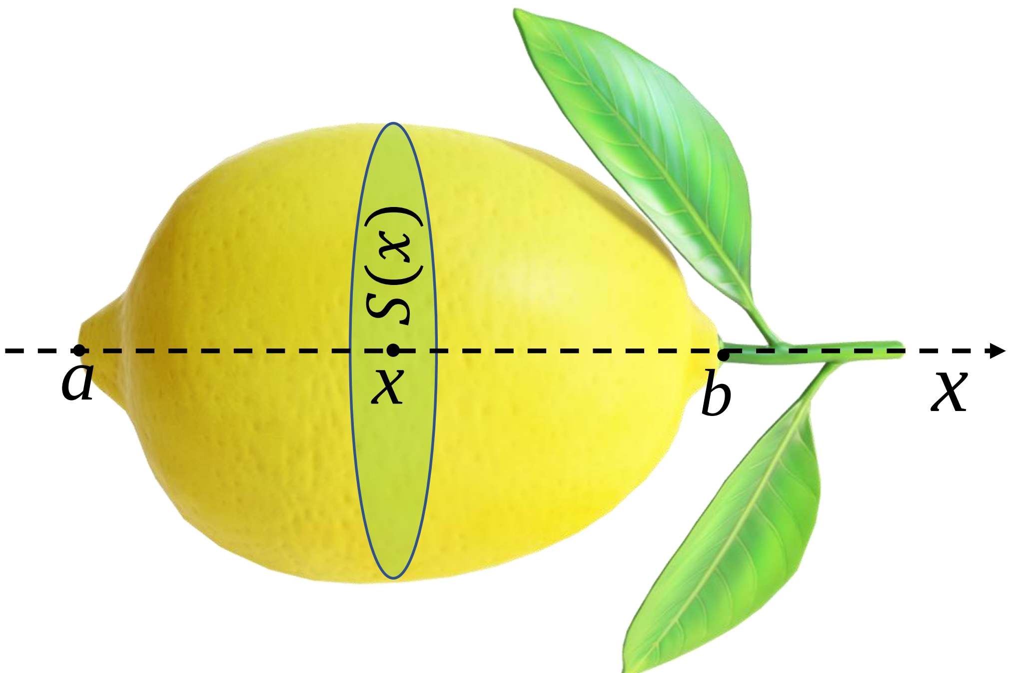
$$\boxed{l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\, dt}$$

Задача о вычислении объема тела по поперечным сечениям

Теорема 4. Пусть дано некоторое тело с объемом V, причем для любого x фигура, полученная в сечении тела плоскостью $x = const$, имеет площадь $S(x)$, $a \leq x \leq b$.
Предположим также, что функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}$$

Задача о вычислении объема тела по поперечным сечениям



$$V = \int_a^b S(x)\,dx$$

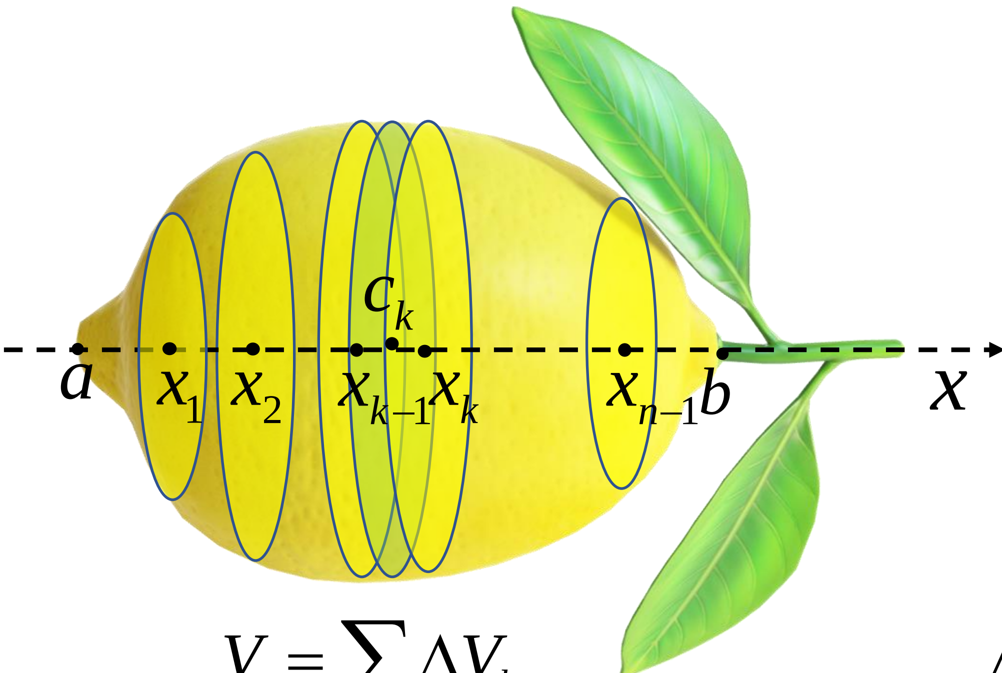
Задача о вычислении объема тела по поперечным сечениям

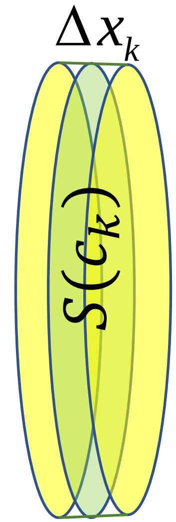
Разделим отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$.

Через каждую точку проведем плоскость $x = x_k$.

Это приведет к разделению тела на слои, которые при малом расстоянии между точками деления приближенно можно считать цилиндрами.

Задача о вычислении объема тела по поперечным сечениям





$$V = \sum_k \Delta V_k$$

$$\Delta V_k \approx S(c_k)\Delta x_k$$

Задача о вычислении объема тела по поперечным сечениям

$$V = \sum_k \Delta V_k \qquad \Delta V_k \approx S(c_k)\Delta x_k \Rightarrow$$

$$V \approx \sum_k S(c_k)\cdot \Delta x_k \Rightarrow \left[d = \max_k \Delta x_k \right] \Rightarrow$$

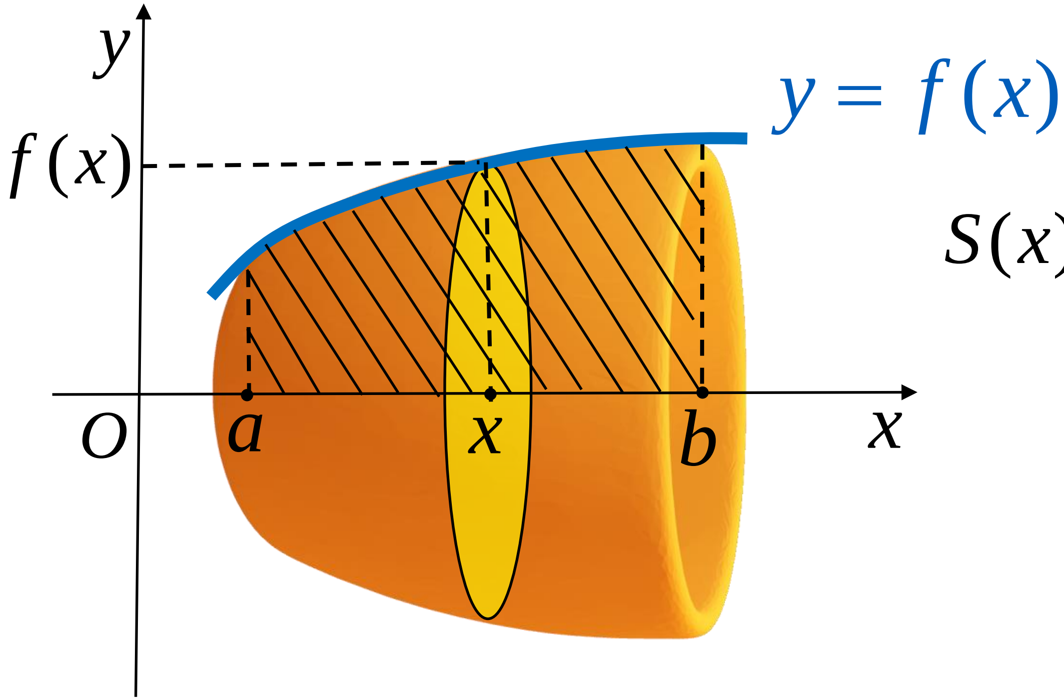
$$V = \lim_{d\to 0} \sum_k S(c_k)\cdot \Delta x_k \Rightarrow V = \int_a^b S(x)dx \ \blacksquare$$

Вычисление объема тела вращения вокруг оси *Ox*

Пусть тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапецией под графиком функции $y = y(x) = f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Тогда его объем равен

$$\boxed{V_x = \pi \int_a^b y^2(x)dx = \pi \int_a^b \left[f(x) \right]^2 dx}$$

Вычисление объема тела вращения вокруг оси Ox



$$S(x) = \pi R^2 = \pi\left[f(x)\right]^2$$

$$\Downarrow$$

$$V = \int_a^b S(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b \pi y^2(x)\,dx \;\blacksquare$$

Вычисление объема тела вращения вокруг оси *Ox*. Пример 7

Пример 7. Найти объем шара.

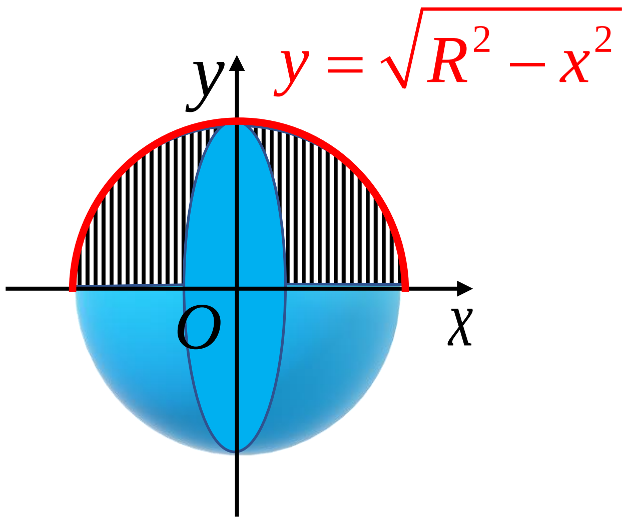
Решение. Шар получается при вращении половины круга вокруг оси Ox. Поэтому

Уравнение верхней границы:

$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad -R \le x \le R$$

$$V_{шара} = V_x = \pi \int_{-R}^{R} y^2(x)dx = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx =$$

Вычисление объема тела вращения вокруг оси Ox. Пример 7



$$=\pi\int_{-R}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx=$$

$$=\pi\left(\int_{-R}^{R}R^2\,dx-\int_{-R}^{R}x^2\,dx\right)=$$

$$=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\pi\left(\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left((-R)^3-\frac{(-R)^3}{3}\right)\right)$$

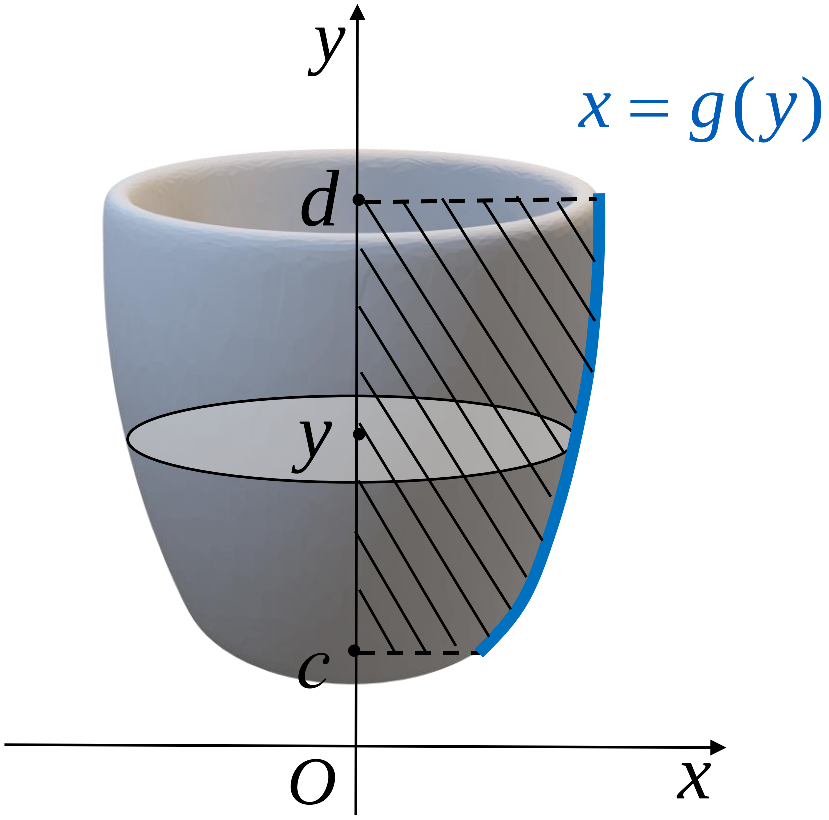
$$=\pi\left(\frac{2}{3}R^3-\frac{2}{3}(-R)^3\right)=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Вычисление объема тела вращения вокруг оси *Oy*

Пусть тело образовано вращением вокруг оси Oy криволинейной трапецией под графиком функции $x = x(y) = g(y)$ на отрезке $[c, d]$. Тогда его объем равен

$$\boxed{V_y = \pi \int_c^d x^2(y)dy = \pi \int_c^d \left[g(y)\right]^2 dy}$$

Вычисление объема тела вращения вокруг оси Oy



Доказательство аналогично (упр.)

Задача о вычислении объема тела вращения. Пример 8

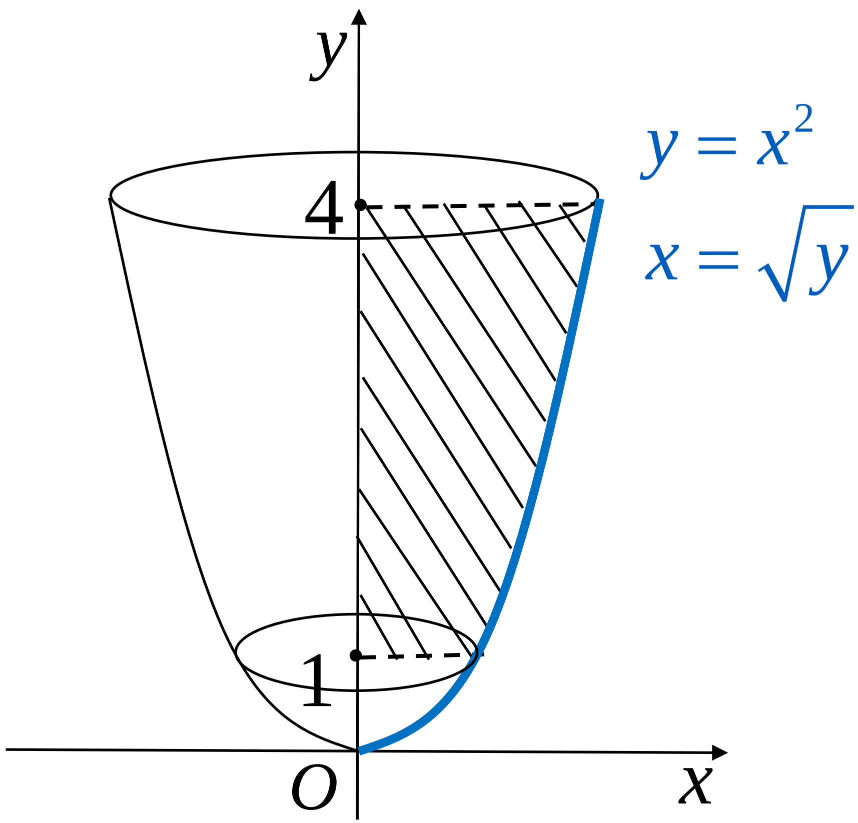
<u>Пример 8.</u> Найти объем тела вращения фигуры вокруг оси Oy, ограниченной, линиями $y = x^2, y = 1, y = 4$.

<u>Решение.</u> $y = x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{y} \Longrightarrow$

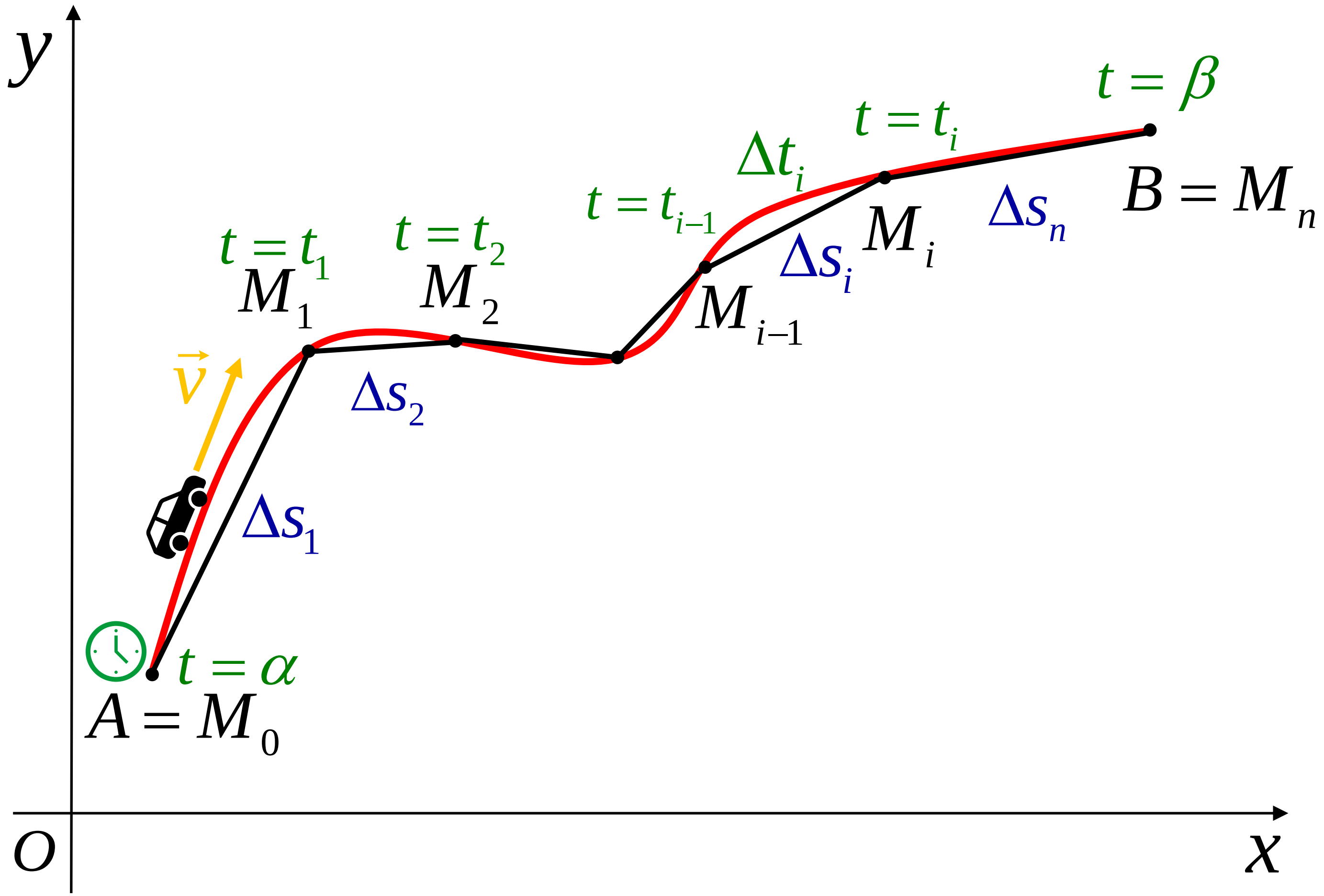
$$V_y = \pi \int_1^4 x^2(y)dy = \pi \int_1^4 \left[\sqrt{y}\right]^2 dy =$$

$$= \pi \int_1^4 y\,dy = \pi \frac{y^2}{2}\Bigg|_1^4 = \pi\left(\frac{16}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{15\pi}{2}$$

Задача о вычислении объема тела вращения. Пример 8



Приложение в механике. Задача о вычислении пройденного пути



Приложение в механике. Задача о вычислении пройденного пути

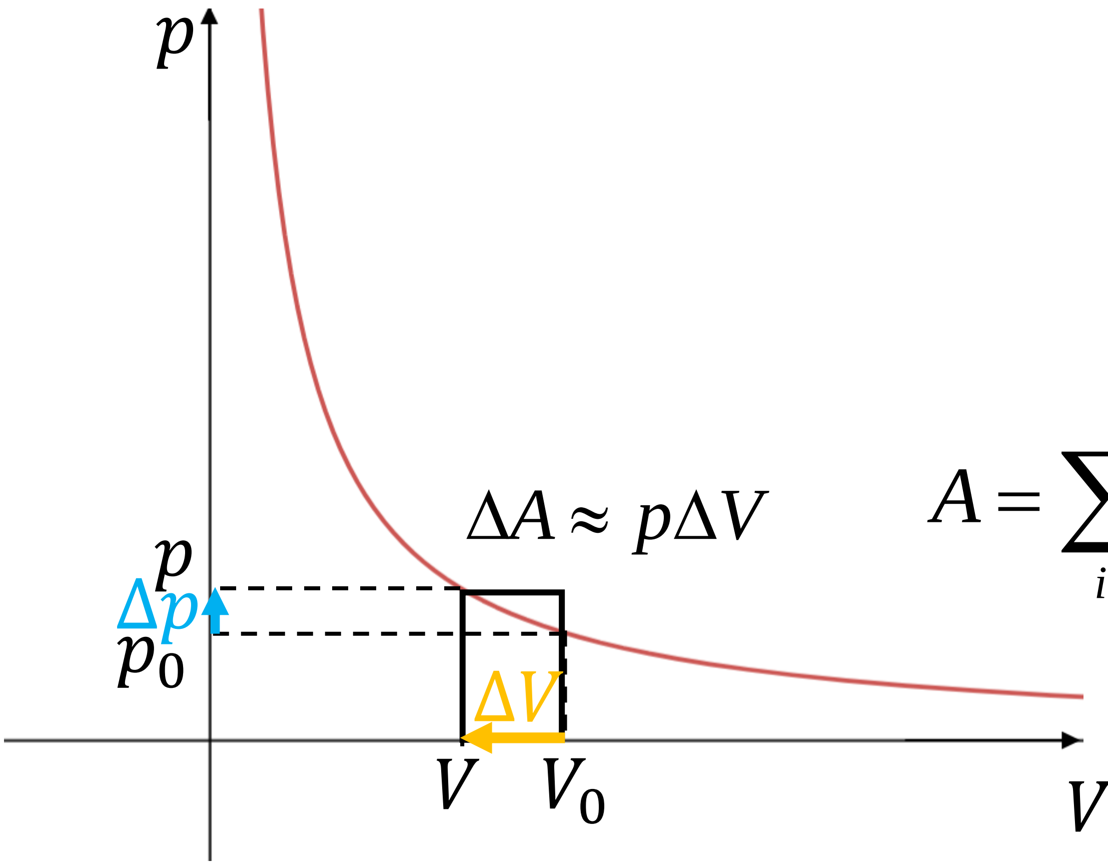
$$\Delta s_i \approx v_i \Delta t_i$$

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \ldots + \Delta s_n \qquad s \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} v_i \Delta t_i, \text{ где } d = \max_i \Delta t_i \Rightarrow$$

$$\boxed{s = \int_{\alpha}^{\beta} v(t)\,dt}$$

Приложение в термодинамике. Работа идеального газа

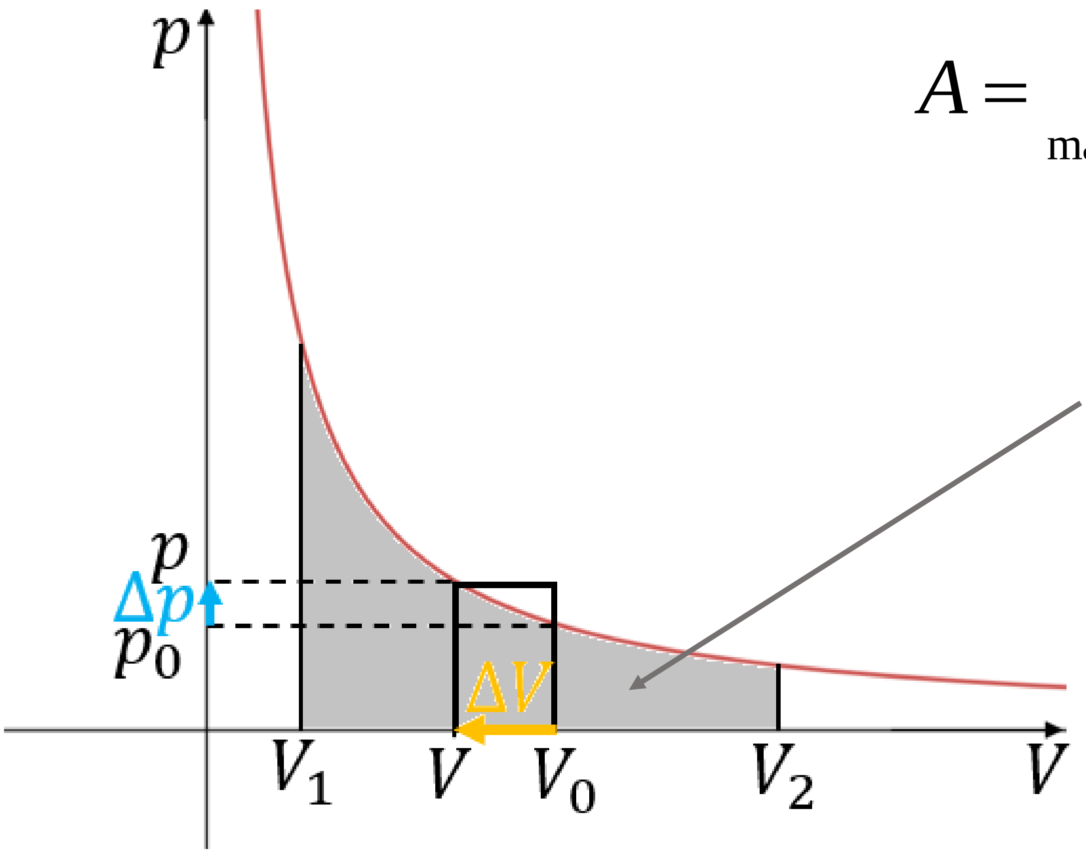


$$\Delta A_i \approx p_i \Delta V_i$$

$$dA = pdV$$

$$A = \sum_i \Delta A_i \approx \sum_i p_i \Delta V_i$$

Приложение в термодинамике. Работа идеального газа



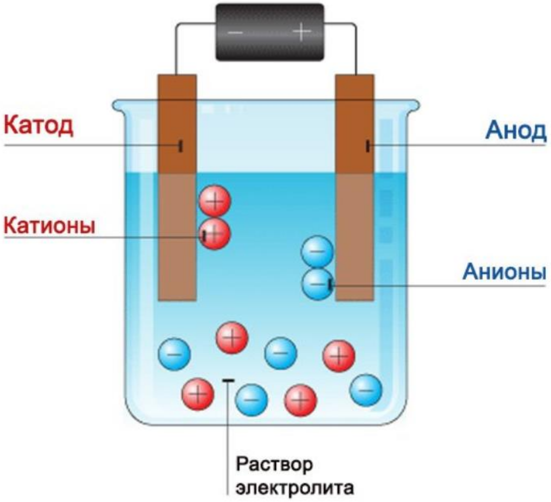
$$A = \lim_{\max \Delta V_i \to 0} \sum_i p_i \Delta V_i$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV$$

Приложение в химии. Электролиз

$$q=\int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$$ – количество заряда,

протекшего через электролизер



Изображение взято с [сайта]

$$\Delta q_j \approx I_j \Delta t_j \qquad dq = Idt$$

$$q=\sum_j \Delta q_j \approx \sum_j I_j \Delta t_j$$

$$q=\lim_{\max \Delta t_j \to 0} \sum_j I_j \Delta t_j = \int_{t_1}^{t_2} I(t)dt$$

Приложение в химии. Импульсный электолиз

Импульсный электролиз / Костин Н. А., Кублановский В. С., Заблудовский А. В.; Отв. ред. А. В. Городыский; АН УССР. Ин-т общ. и неорган. химии.— Киев : Наук. думка, 1989.—168 с.— ISBN 5-12-000754-6.

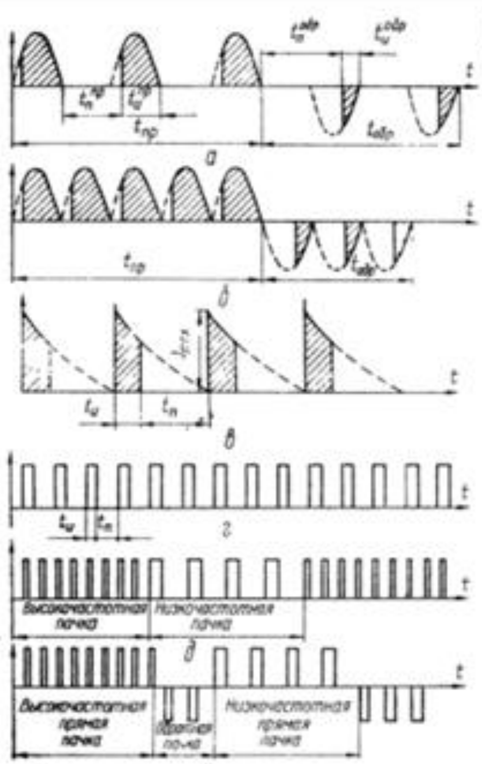


Рис. 1.1. Некоторые формы импульсного поляризующего тока:

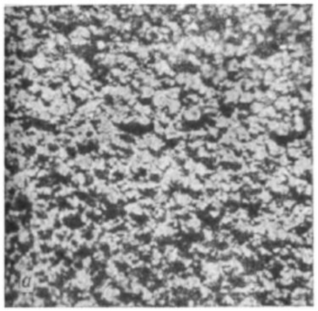
Основные формы импульсов поляризующего тока показаны на рис. 1.1 и в [3, 4].

Среднее значение поляризующего тока

$$J_{\text{ср}} = \frac{1}{T}\int_0^T j(t)\,dt,$$

Этот слайд можно не конспектировать

Микрофотографии рельефа поверхности осадков никеля, полученных при электролизе током



постоянным

импульсным

Задача (упр.,2б.) Найти среднее значение полязирующего тока, если сам ток равен

$$I(t)=\begin{cases} a\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), t\in\left[0;\frac{T}{2}\right], \\ 0, \quad t\in\left[\frac{T}{2};T\right] \end{cases}$$