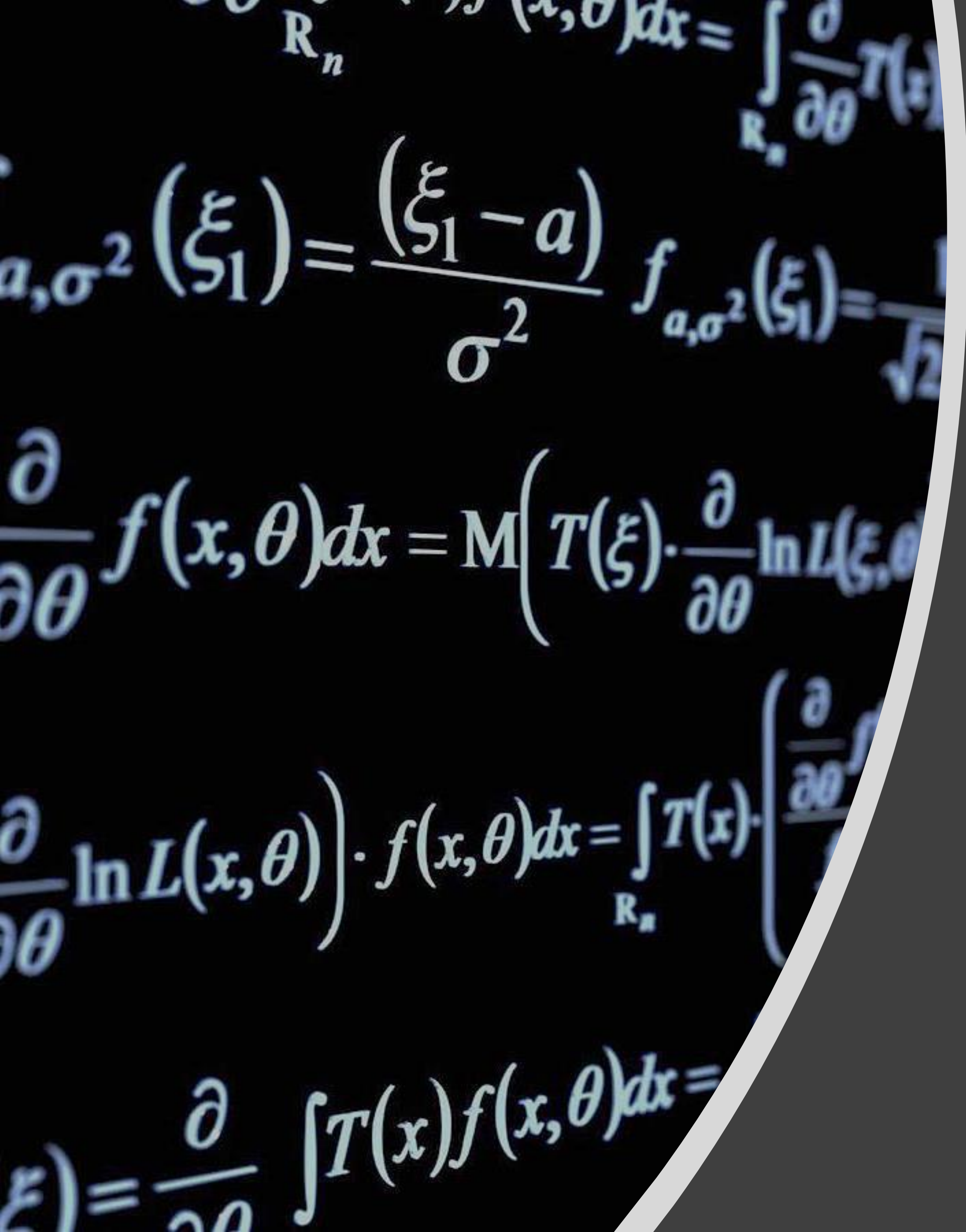


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 14

Математический анализ

Производная функции (определение)

Определение производной функции в точке

<u>Опр.</u> Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.

Производной $f'(x_0)$ $\left(y'(x_0)\right)$ функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ в точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} \right)$$

Определение производной функции в точке

$\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента

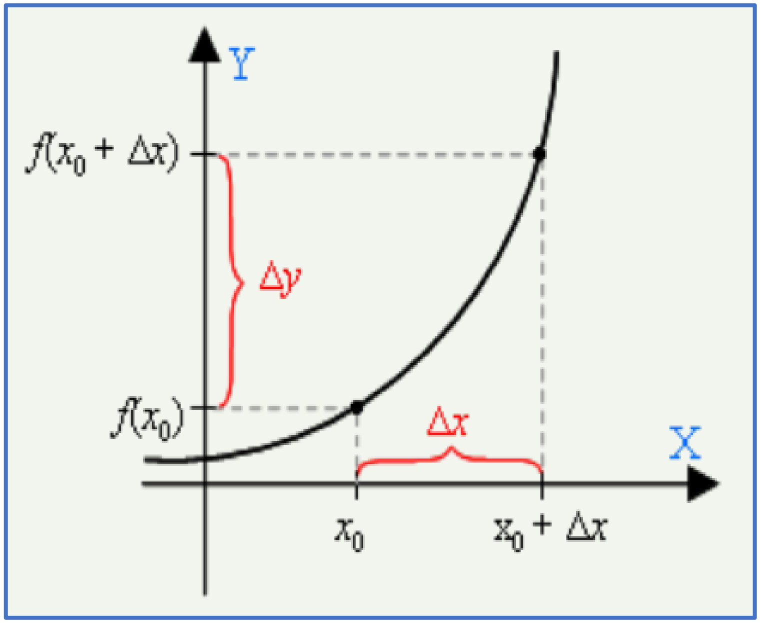
$\Rightarrow x = x_0 + \Delta x$

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ – приращение функции

$(\Delta y(x_0) = y(x) - y(x_0))$

$\Rightarrow \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Определение производной функции в точке



Графическое изображением взято
ОТСЮДА

Производная функции в точке-
это скорость изменения функции в этой точке

Определение производной функции в точке

Пример 1. Пусть $f(x) = x^2$. Найдем $f'(x_0)$ для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Решение. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = x^2 - x_0^2$$

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2$$

Определение производной функции в точке

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big((x_0 + \Delta x) - x_0\big)\big((x_0 + \Delta x) + x_0\big)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(2x_0 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0$$

$\Rightarrow\ f'(x) = (x^2)' = 2x$ для любого $x \in \mathbb{R}$

Определение производной функции в точке

Пример 2 (упр.) Для функции $f(x) = x^3$ производная $f'(x) = 3x^2$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Указание. Для $\Delta f(x_0)$ использовать формулу разности кубов.

Определение производной функции в точке

Пример 3 (упр.*) Для функции $f(x) = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$, производная $f'(x) = nx^{n-1}$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Указание. Для $\Delta f(x_0)$ использовать формулу

$$a^n - b^n =$$
$$= (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-1} + b^{n-1})$$

Определение производной функции в точке

Замечание. Формула $(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$, где $x > 0$, справедлива для любого $x \in \mathbb{R}$.

Указание. Для $\Delta f(x_0)$ использовать формулу

$$a^n - b^n =$$
$$= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-1} + b^{n-1})$$

Определение производной функции в точке

<u>Пример 3.</u> Пусть $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Докажем, что $f(x) =$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

<u>Решение.</u> $f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(0)}{\Delta x}$

$$\Delta f(0) = f(x) - f(0) = \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{0} = \sqrt[3]{x}$$

$$x = 0 + \Delta x = \Delta x$$

$$\Delta f(0) = \sqrt[3]{\Delta x}$$

Определение производной функции в точке

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\left(\sqrt[3]{\Delta x}\right)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$$

Не существует конечного предела

$\Rightarrow$ функция $f(x) = \sqrt[3]{x}$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

Определение производной функции в точке

Пример 4. Пусть $f(x) = e^x$. Найдем $f'(x_0)$ для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Решение. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = e^x - e^{x_0}$$

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta f(x_0) = e^{x_0 + \Delta x} - e^{x_0}$$

Определение производной функции в точке

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x_0}\left(e^{\Delta x} - 1\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0} \underbrace{\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{\text{ЗЗП} \to 1} = e^{x_0}$$

$$\Rightarrow f'(x) = (e^x)' = e^x$$

Определение производной функции в точке

Пример 5. Пусть $f(x) = \sin x$. Найдем $f'(x_0)$ для любой точки $x_0 \in \mathbb{R}$.

Решение. $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = \sin x - \sin x_0$$

$$x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta f(x_0) = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Определение производной функции в точке

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{2}\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\cancel{2} \cdot \frac{\Delta x}{2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \underbrace{\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{1} \cdot \overbrace{\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)}^{\cos x_0} = \cos x_0 \Rightarrow f'(x) =$$

$$= (\sin x)' = \cos x$$

Определение производной функции в точке

<u>Пример 6 (упр.)</u> Пусть $f(x) = a^x$.

Тогда $f'(x) = a^x \ln x$.

<u>Пример 7 (упр.)</u> Пусть $f(x) = \cos x$.

Тогда $f'(x) = -\sin x$.

Определение функции, дифференцируемой в точке

Опр. Функция $f(x)$, определенная в $O(x_0)$, называется дифференцируемой в точке $x = x_0$, если существует производная $f'(x_0)$ в этой точке.

Пример. Функция $f(x) = x^2$ является дифференцируемой в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Определение производной функции в точке

<u>Обозначение</u> для

$$1)\ y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$$

$$2)\ y'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

где $\Delta y(x) = y(x + \Delta x) - y(x)$

Геометрический смысл производной функции в точке

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке $x = x_0$.

Тогда производная $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Геометрический смысл производной функции в точке

<u>Доказательство</u>

секущая F $\to$

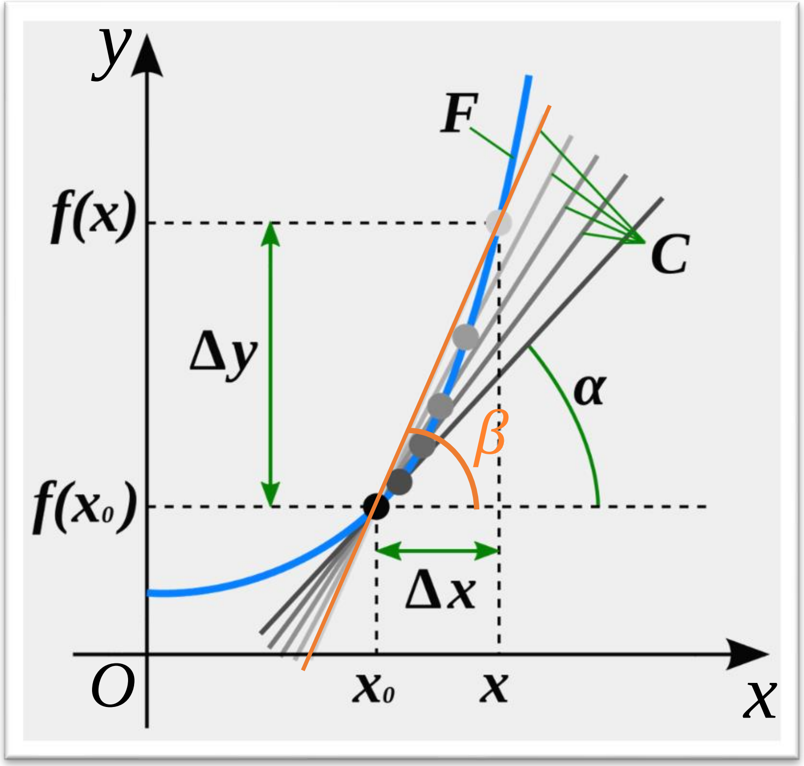
касательной C при $\Delta x \to 0$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \beta = \alpha$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \beta =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \beta\right) = \operatorname{tg} \alpha$$

[непрерывность функции $y = \operatorname{tg} x$]



Графическая информация взята ОТСЮДА

F – секущая

C– касательная

Геометрический смысл производной функции в точке

Доказательство

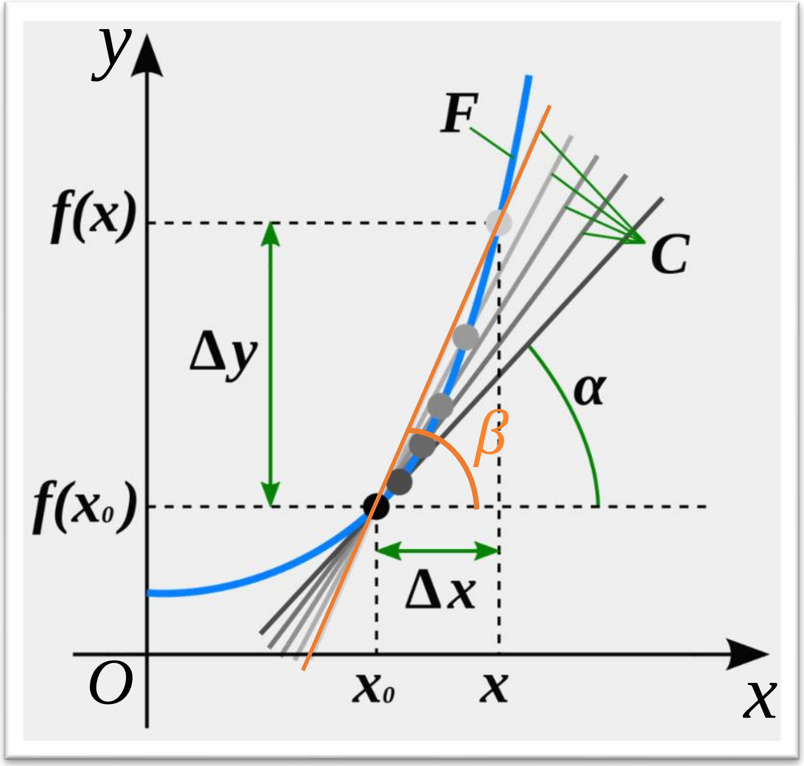
$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}} = k_{\text{кас}}$$

$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg}\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} k_{\text{сек}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} =$$

$$= f'(x_0)$$

$$\Rightarrow k_{\text{кас}} = f'(x_0) \blacksquare$$



Графическая информация взята ОТСЮДА

F – секущая

C– касательная

Геометрический смысл производной функции в точке

<u>Следствие.</u> Уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке $x = x_0$ (на графике в точке $M_0(x_0, y_0)$):

$$\boxed{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)}$$

Геометрический смысл производной функции в точке

<u>Пример 9.</u> Написать уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$.

<u>Решение.</u>

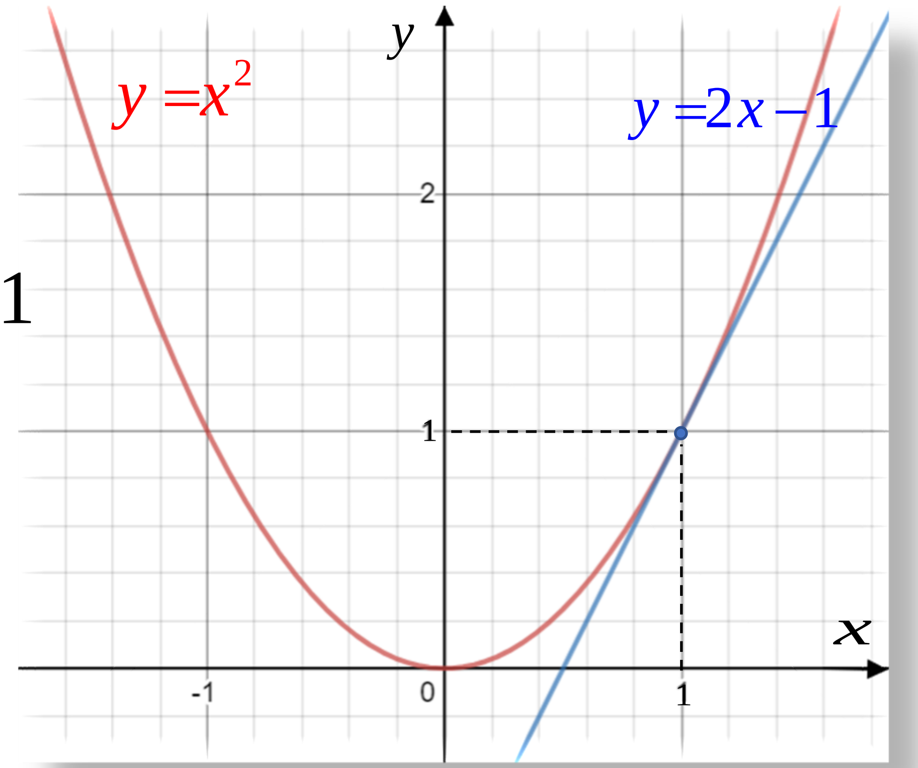
$$y = x^2, \quad y' = 2x, \quad x_0 = 1$$

$$y'(x_0) = 2, \quad y_0 = y(x_0) = 1$$

$$\boxed{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)}$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1$$



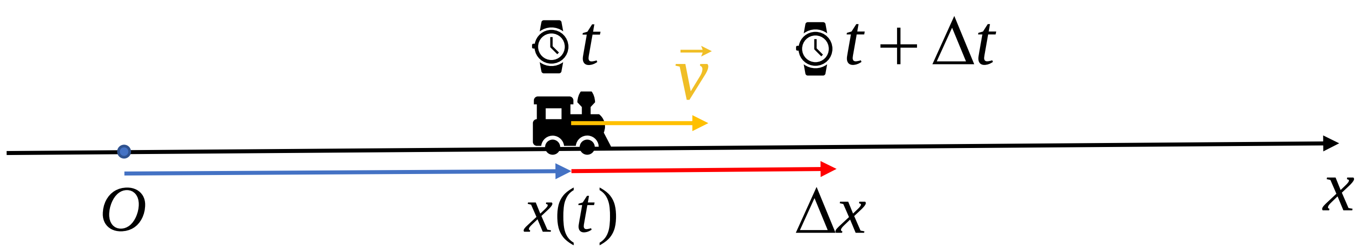
Механический смысл производной функции в точке

$x = x(t)$ – координата материальной точки, движущейся по прямой

$v_x = v_x(t) = x'(t)$ – проекция её мгновен. скорости $\vec{v}$ на Ox,

$$v_x(t) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

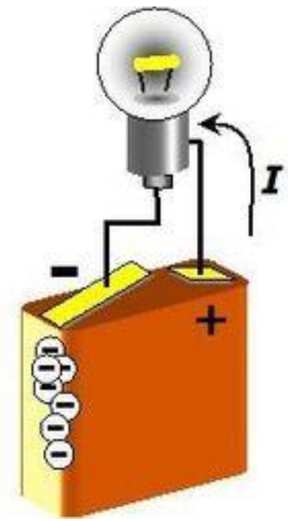
$a_x = a_x(t) = v'_x(t) = x''(t)$ – мгновен. ускорение точки



Физический смысл производной функции в точке

$q = q(t) -$ количество заряда в момент времени t

$i = i(t) = q'(t) -$ сила тока в проводнике в момент времени t



$$i(t) \approx \frac{\Delta q}{\Delta t} \Rightarrow i(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} -$$

количество заряда, протекшего через поперечное сечение проводника в момент времени t

Химический смысл производной функции в точке

$a = a(t)(b = b(t))$ – концентация исходного вещества (продукта реакции) в момент времени t

$v(t) = a'(t) = -b'(t)$ – *скорость* химической реакции в момент времени t:

$$v(t) \approx \frac{\Delta a}{\Delta t} \Rightarrow v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta a}{\Delta t}$$ – изменение концентации за единицу времени

Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке

Теорема 2.

Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.

Если функция $f(x)$ **дифференцируема** в точке x_0, то она **непрерывна** в этой точке.

Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке

Доказательство.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Тогда существует конечный предел

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

И по теореме о связи функции, имеющей предел и б.м.ф.

Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad (\cdot \Delta x \to 0)$$

$\alpha(\Delta x) -$ б.м.ф. при $\Delta x \to 0$

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} (f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x) = 0$$

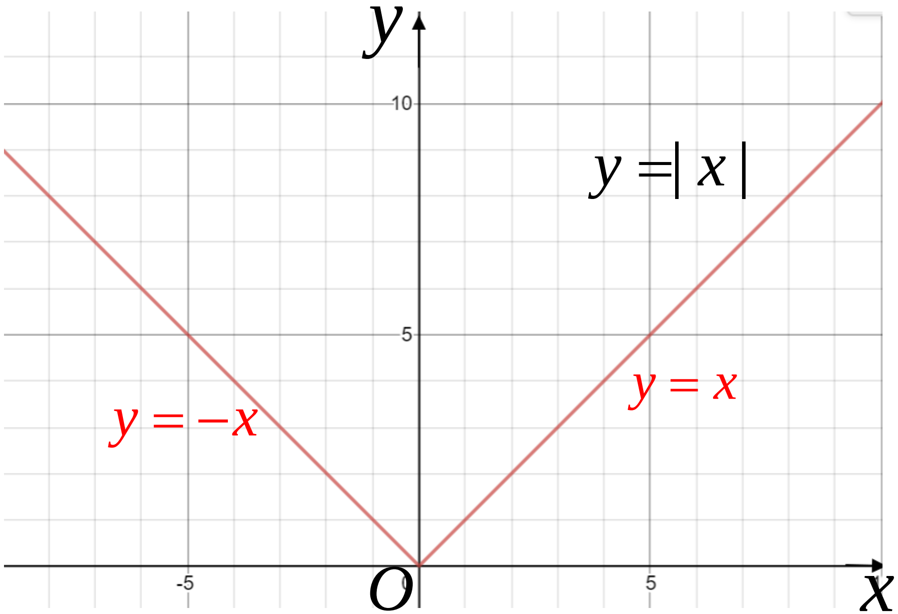
$\Rightarrow$ Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 ■

Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке

Обратное неверно.

Функция $f(x) = |x|$ **непрерывна** в точке $x_0 = 0$, но **не дифференцируема** в этой точке.

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0, \\ -x, \text{если } x < 0 \end{cases}$$



Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке

$$x = x_0 + \Delta x = 0 + \Delta x = \Delta x$$

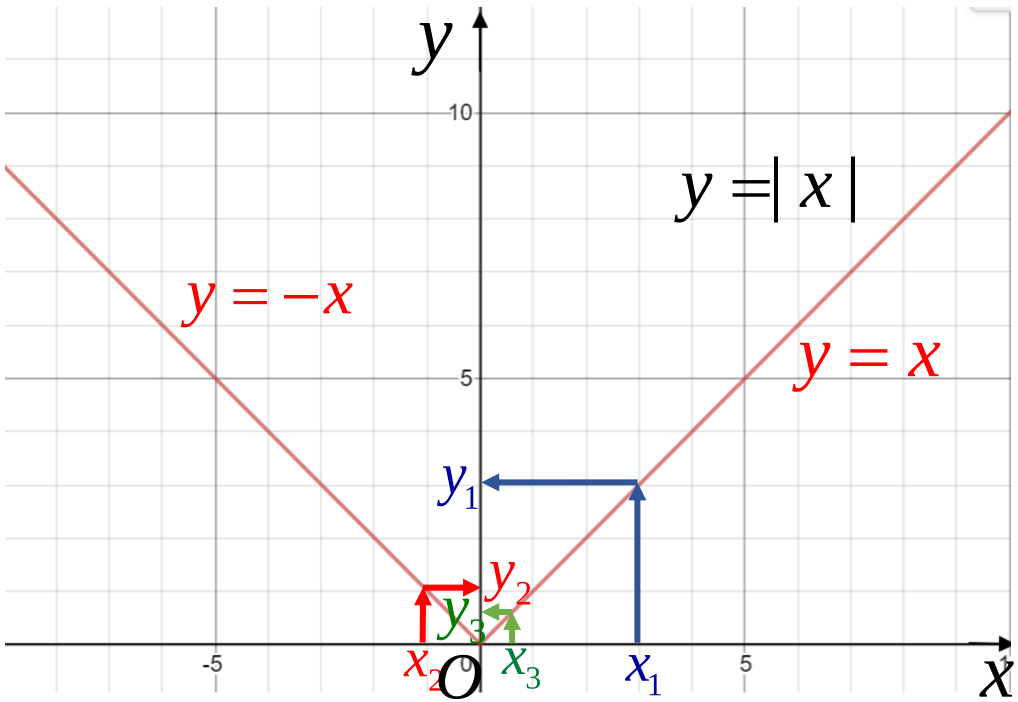
$$\Delta f(x_0) = \Delta f(0) = f(x) - f(0) = |x| - 0 =$$

$$= |x| = |\Delta x|$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} |\Delta x| = 0 = f(x_0)$$

$\Rightarrow$ функция $f(x)$ **непрерывна** в точке $x_0 = 0$

Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке



Если $\{x_n\}$ стремится к $x_0 = 0$,
то $\{f(x_n)\}$ стремится к $f(x_0) = 0$

Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке

$$\Delta f(x_0) = |\Delta x|$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

не равны

Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке

$$\Rightarrow \; f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$$

не существует

$\Rightarrow$ $f(x)$ **не дифференцируема** в точке $x_0 = 0$.

(не существует касательной в точке $x_0 = 0$)