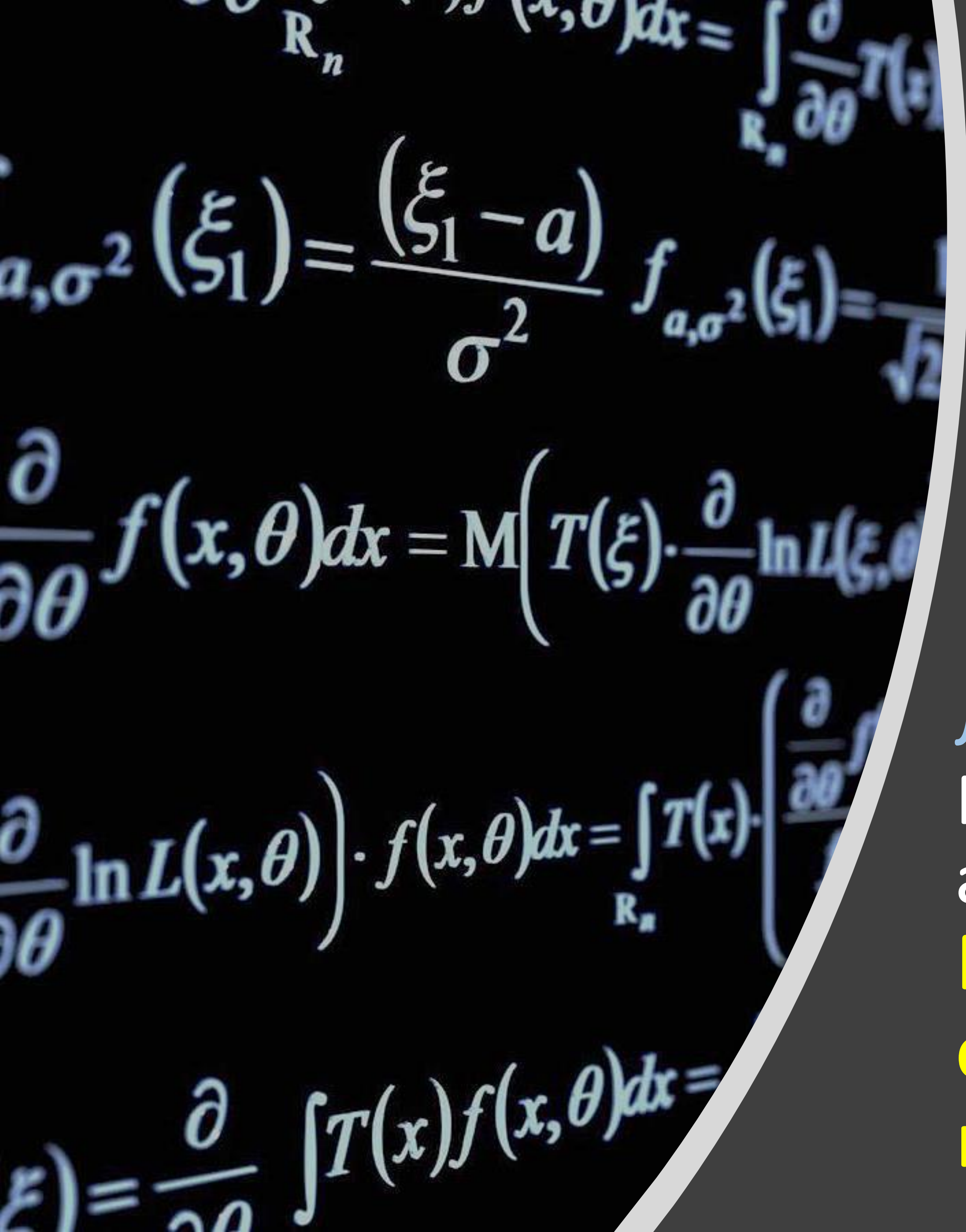


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, II семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

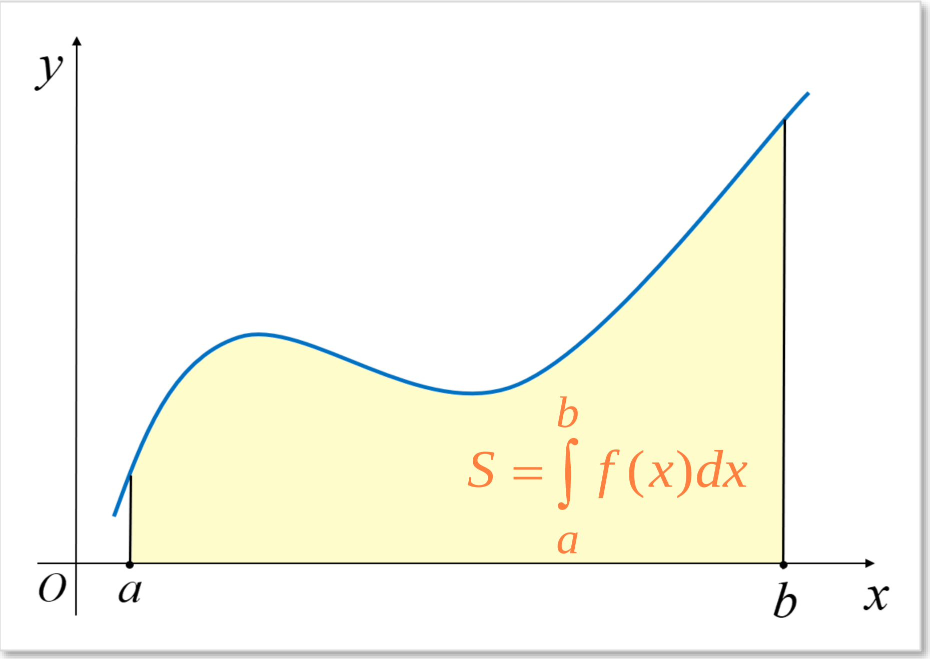
к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 13
Математический анализ
Приложение определенного интеграла

Вычисление площади

Если $f(x)$ — неотрицательная интегрируемая на отрезке $[a;b]$ функция, S — площадь криволинейной трапеции под ее графиком, то

$$\boxed{S = \int_a^b f(x)\,dx}$$

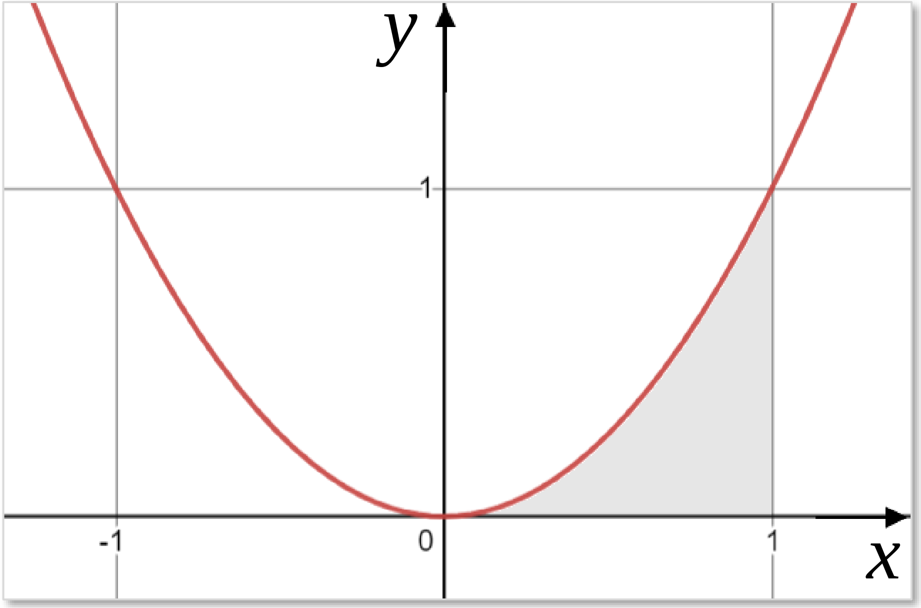


Вычисление площади. Пример 1

Пример 1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

$$S = \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 =$$

$$= \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$

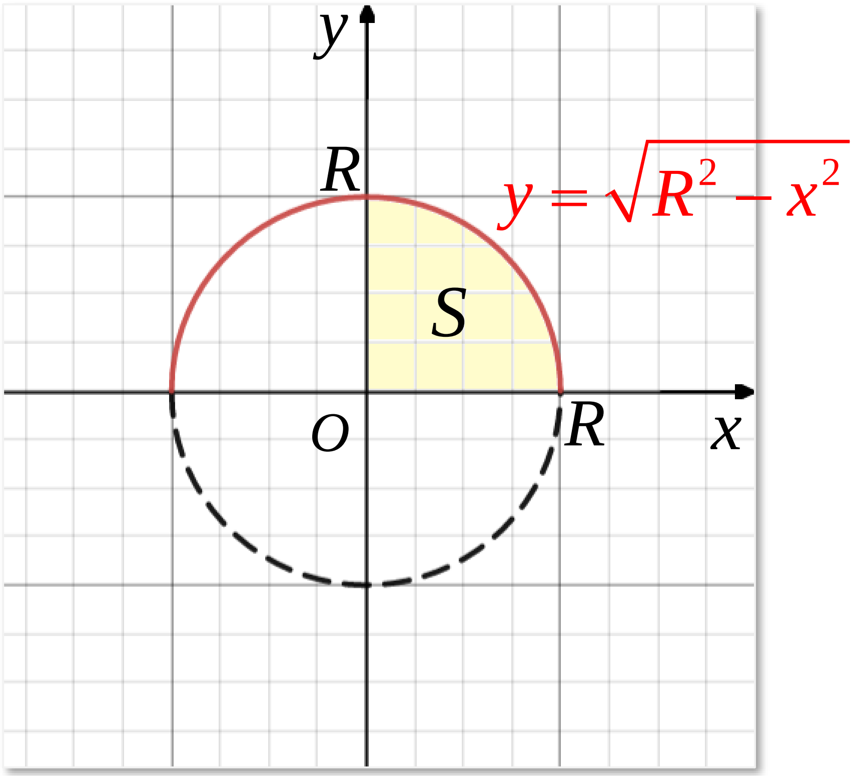


Вычисление площади. Пример 2

Пример 2. Вычислить площадь круга радиуса R.

Решение.

$$S_{круга} = 4S$$



Вычисление площади. Пример 2

$$S=\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,dx=\left[\begin{array}{l} x=R\sin t \\ dx=R\cos t\,dt \\ x=0\Rightarrow \sin t=0\Rightarrow t=0 \\ x=R\Rightarrow \sin t=1\Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array}\right]=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}\,R\cos t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{R^2(1-\sin^2 t)}\,R\cos t dt=$$

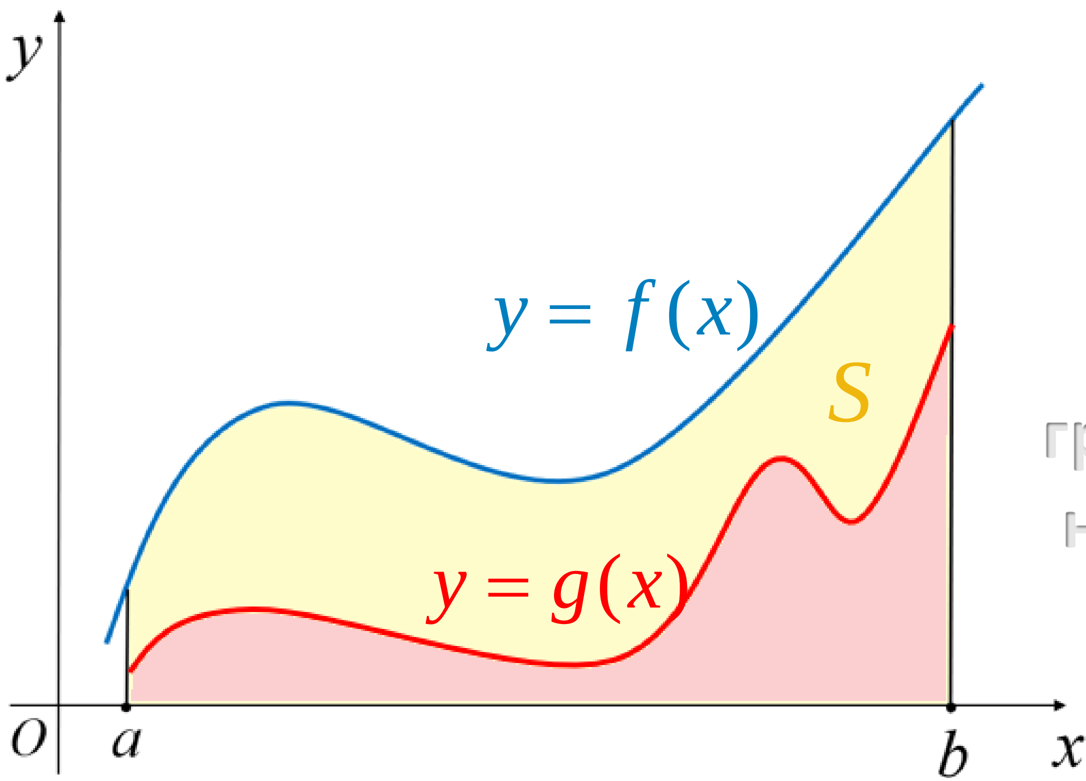
Вычисление площади. Пример 2

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos^2 t\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{R^2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{R^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{R^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2\frac{\pi}{2}-\left(0+\frac{1}{2}\sin 0\right)\right)=$$

$$=\frac{\pi R^2}{4} \Rightarrow S_{круга} = 4S = \pi R^2$$

Вычисление площади



из верхнего графика вычесть нижний график

Если $f(x) \geq g(x)$, на $[a,b]$, то

$$\boxed{S = \int_a^b \bigl(f(x) - g(x)\bigr)dx}$$

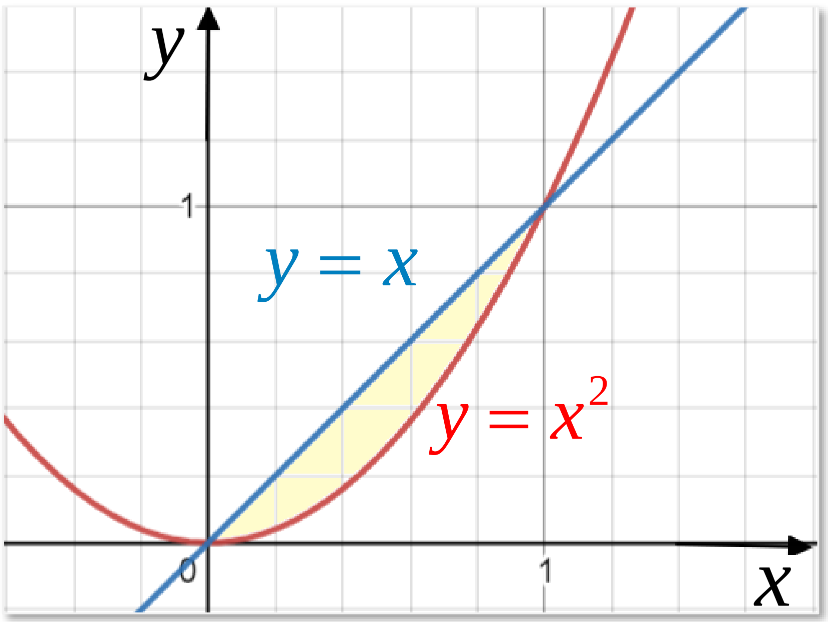
Вычисление площади. Пример 3

Пример 3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x,\ y = x^2$.

Решение. Найдем точки пересечения линий $y = x,\ y = x^2$:

$$x = x^2 \Rightarrow x = 0, x = 1.$$

$$f(x) = x,\ g(x) = x^2 \Rightarrow$$



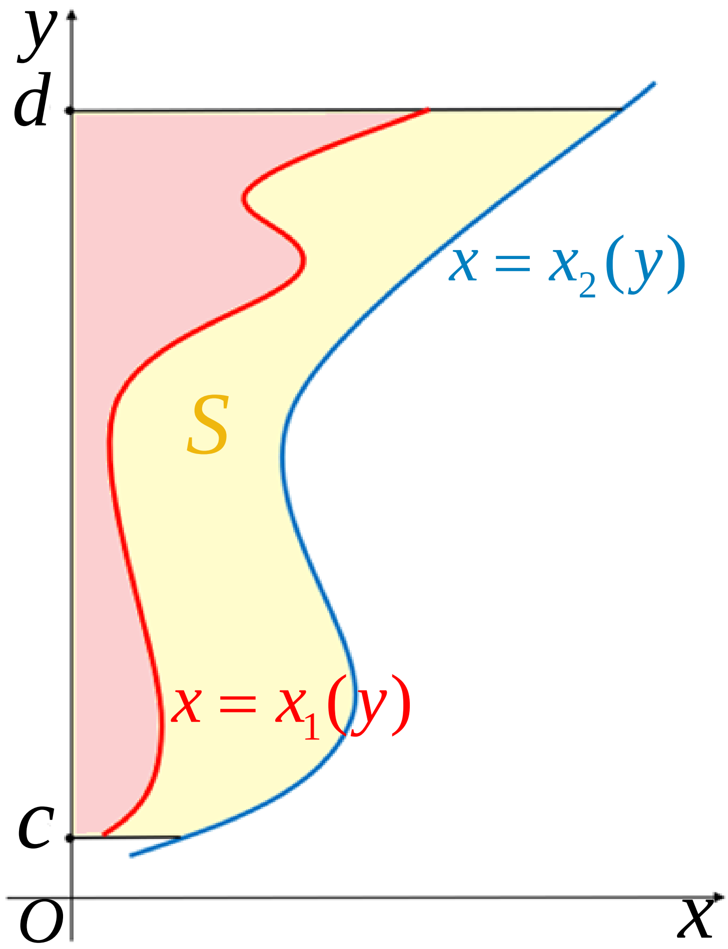
Вычисление площади. Пример 3

$$S = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)dx =$$

$$= \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{6}$$

Вычисление площади



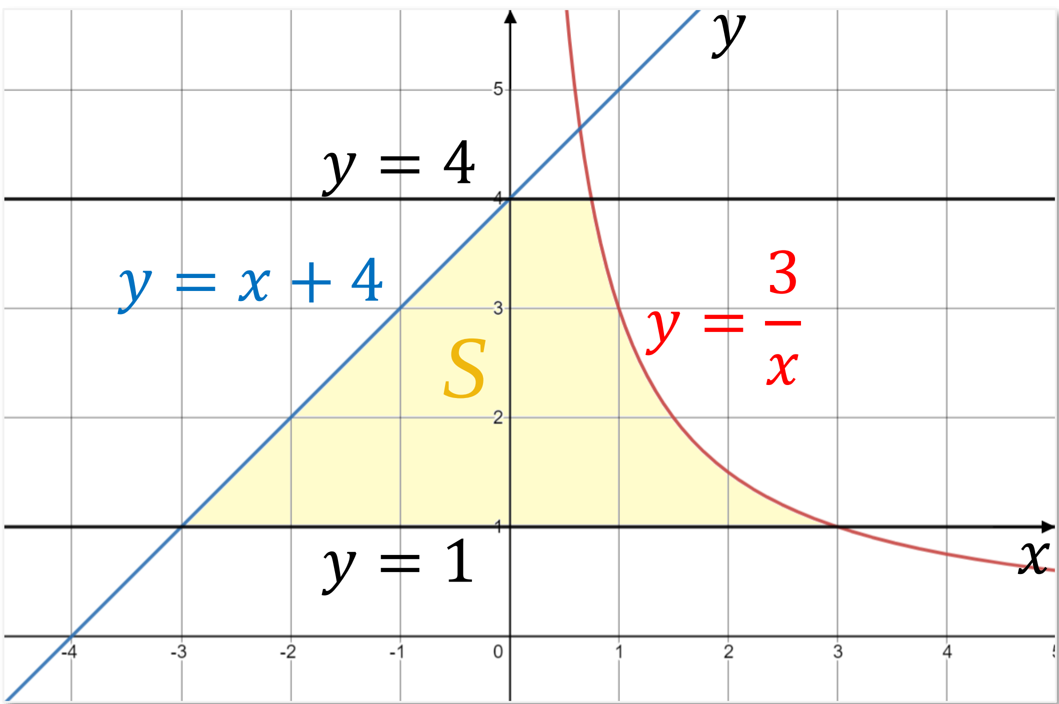
Если $x_2(y) \geq x_1(y)$, на $[c,d]$, то

$$\boxed{S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))dy}$$

из правого графика вычесть левый график

Вычисление площади. Пример 4

<u>Пример 4</u>. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 3,\ y = x + 4, y = 1, y = 4.$



$$y = \frac{3}{x} \Rightarrow x = \frac{3}{y}$$

$$y = x + 4$$

$$\Downarrow$$

$$x = y - 4$$

Вычисление площади. Пример 4

$$S = \int_c^d (x_2(y) - x_1(y))dy =$$

$$= \int_1^4 \left(\frac{3}{y} - (y - 4)\right) dy = \left(3\ln|y| - \frac{y^2}{2} + 4y\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= \left(3\ln|4| - \frac{16}{2} + 16\right) - \left(3\ln|1| - \frac{1}{2} + 4\right) =$$

$$= \left(3\ln 4 + \frac{16}{2}\right) - \frac{7}{2} = 3\ln 4 + \frac{9}{2}$$

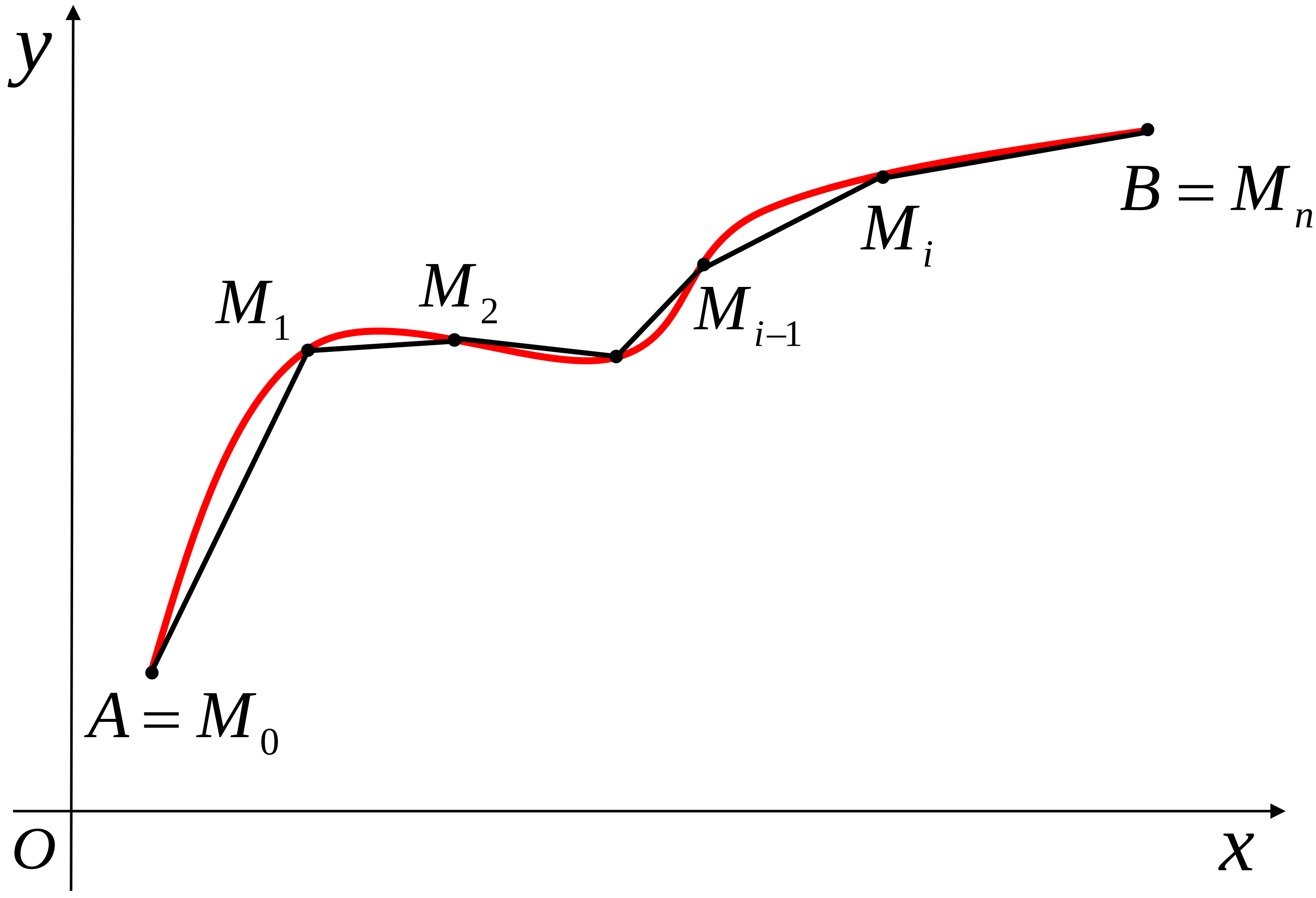
Задача о вычислении длины кривой

Пусть $L -$ кривая с концами A, B
и $A = M_0, M_1, \ldots, M_n = B -$ точки на ней.
Соединяя точки $M_0, M_1, \ldots, M_n$ отрезками, получим *ломаную* L_n с вершинами в этих точках.

Пусть $l -$ длина кривой L, а
$l_n -$ длина ломаной L_n.

Тогда $l \approx l_n$;
точность этого равенства тем выше,
чем меньше длина звеньев ломаной L_n.

Задача о вычислении длины кривой



Вычисление длины кривой – дуги графика функции

<u>Теорема 1.</u> Если $f(x)$ – непрерывно дифференц. функция, определенная на отрезке $[a;b]$, то ее длина находится по формуле

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2}\, dx}$$

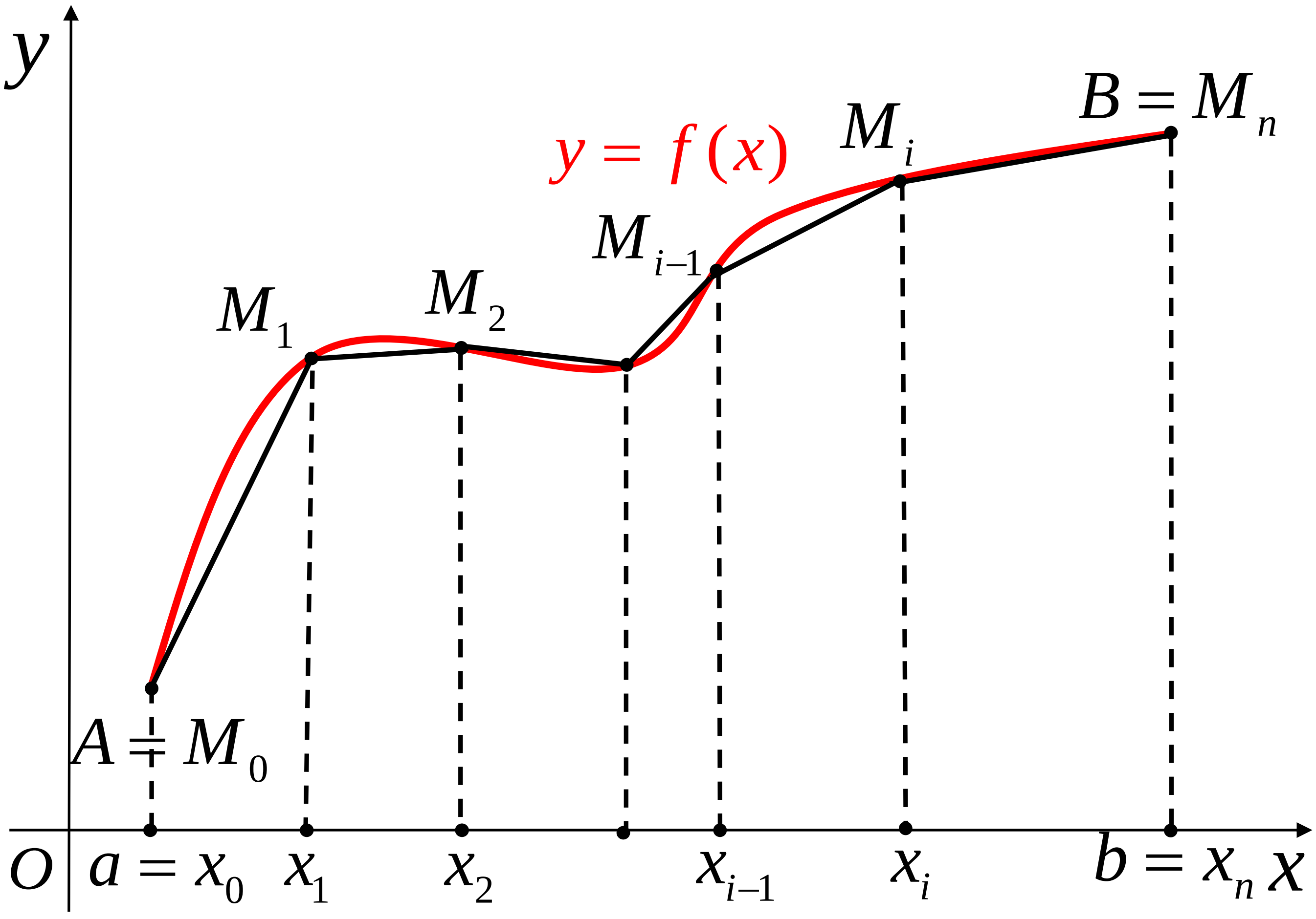
Вычисление длины кривой – дуги графика функции

Доказательство. Разделим отрезок $[a,b]$ на n частей точками $a = x_0, x_1, \dots, x_n = b$.

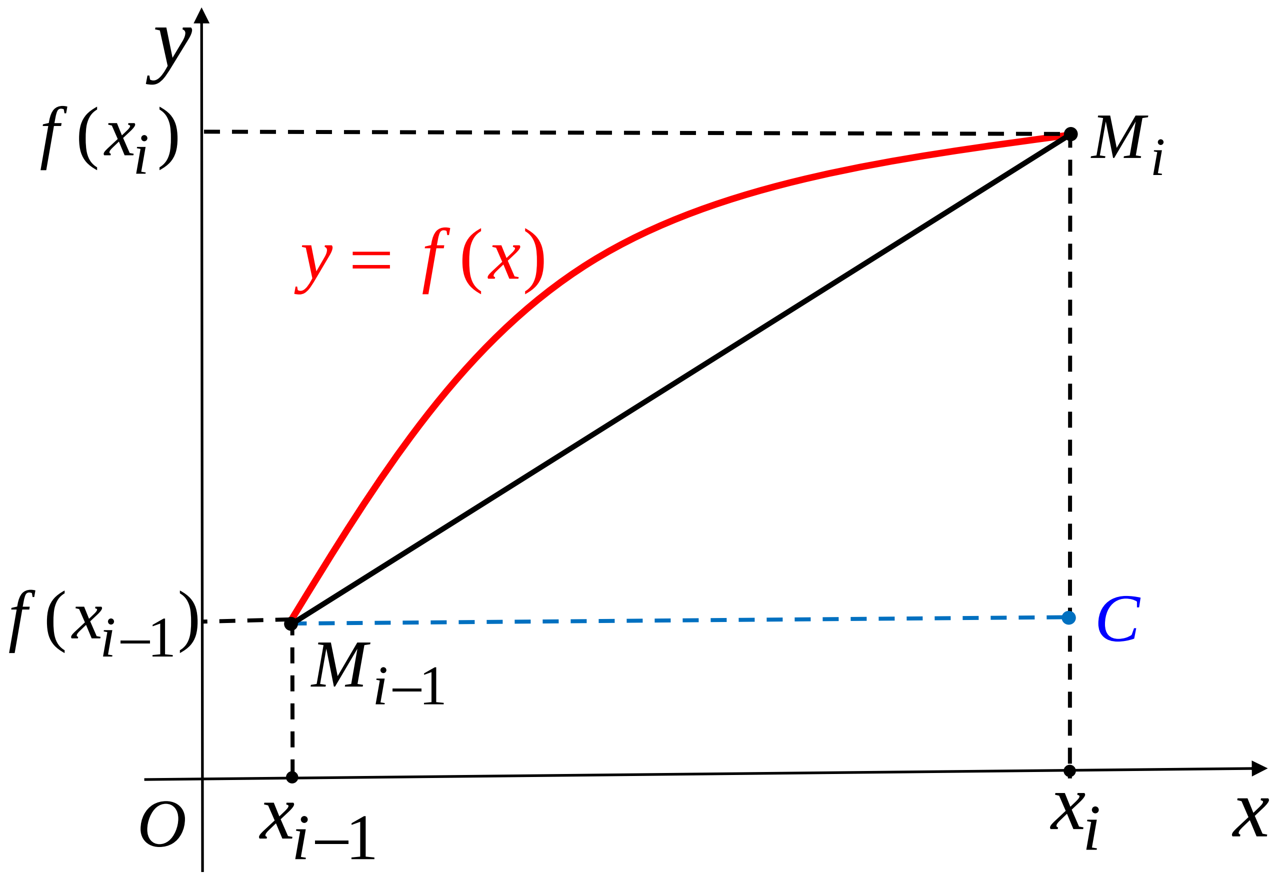
Обозначим через M_i соответствующую точку на графике: $M_i\big(x_i, f(x_i)\big)$. Эти точки образуют ломаную L_n, вписанную в график $f(x)$.

Найдем длину звена $M_{i-1}M_i$ этой ломаной.

Вычисление длины кривой – дуги графика функции



Вычисление длины кривой – дуги графика функции



Вычисление длины кривой – дуги графика функции

$\Delta l_i -$ длина участка кривой от M_{i-1} до M_i.

$$\Delta l_i \approx \left|M_{i-1}M_i\right| = \sqrt{\left|M_{i-1}C\right|^2 + \left|CM_i\right|^2}$$

$$\left|M_{i-1}C\right| = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

$\left|CM_i\right| = \left|f(x_i) - f(x_{i-1})\right| =$ [по теореме Лагранжа

существует $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$] $= \left|f'(\xi_i)\right|\Delta x_i \Rightarrow$

$$\Delta l_i \approx \sqrt{\Delta x_i^{\,2} + \left[f'(\xi_i)\right]^2 \Delta x_i^{\,2}} = \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\,\Delta x_i$$

Вычисление длины кривой – дуги графика функции

Следовательно,

$l = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i$

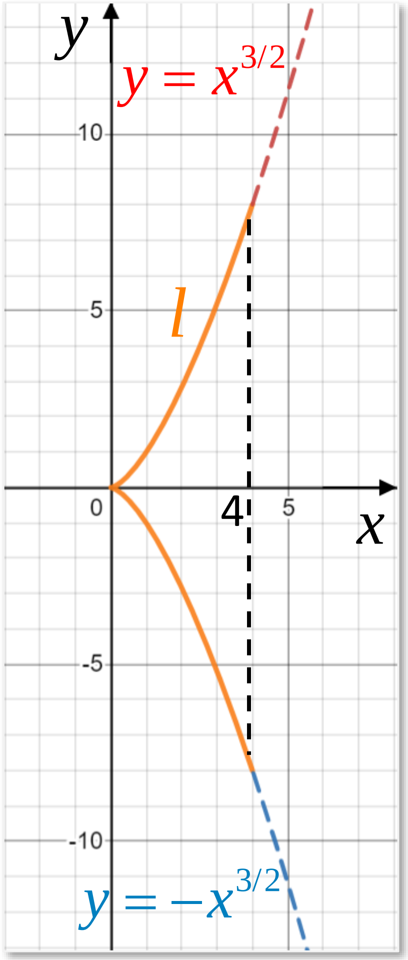
причем точность этого равенства тем выше, чем меньше Δx_i.

Таким образом, для $d = \max\limits_{i} \Delta x_i$

$$l = \lim_{d \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(\xi_i)\right]^2}\, \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\, dx \ \blacksquare$$

Вычисление длины кривой – дуги графика функции. Пример 5

Пример 5. Найти длину полукубической параболы $y^2 = x^3,\ 0 \le x \le 4$.



Решение. По условию $y^2 = x^3,\ x \ge 0 \Rightarrow y = \pm x^{3/2}$

Вычисление длины кривой – дуги графика функции. Пример 5

Так эта парабола симметрична относительно оси Оx, то длина всей линии будет равна:

$$l = 2\int_0^4 \sqrt{1+[y']^2}\,dx, \text{ где } y = x^{3/2}$$

$$l = 2\int_0^4 \sqrt{1+\left[\frac{3}{2}\sqrt{x}\right]^2}\,dx = 2\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx =$$

Вычисление длины кривой – дуги графика функции. Пример 5

$$= 2\int_0^4 \sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+\dfrac{9}{4}x \\ dt = \dfrac{9}{4}dx \Rightarrow dx = \dfrac{4}{9}dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 4 \Rightarrow t = 10 \end{array}\right] = \frac{8}{9}\int_1^{10}\sqrt{t}\,dt =$$

$$= \frac{8}{9}\left.\frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^{10} = \frac{8}{9}\cdot\frac{2}{3}\left.\left(\sqrt{t}\right)^3\right|_1^{10} = \frac{16}{27}\cdot\left(10\sqrt{10}-1\right)$$