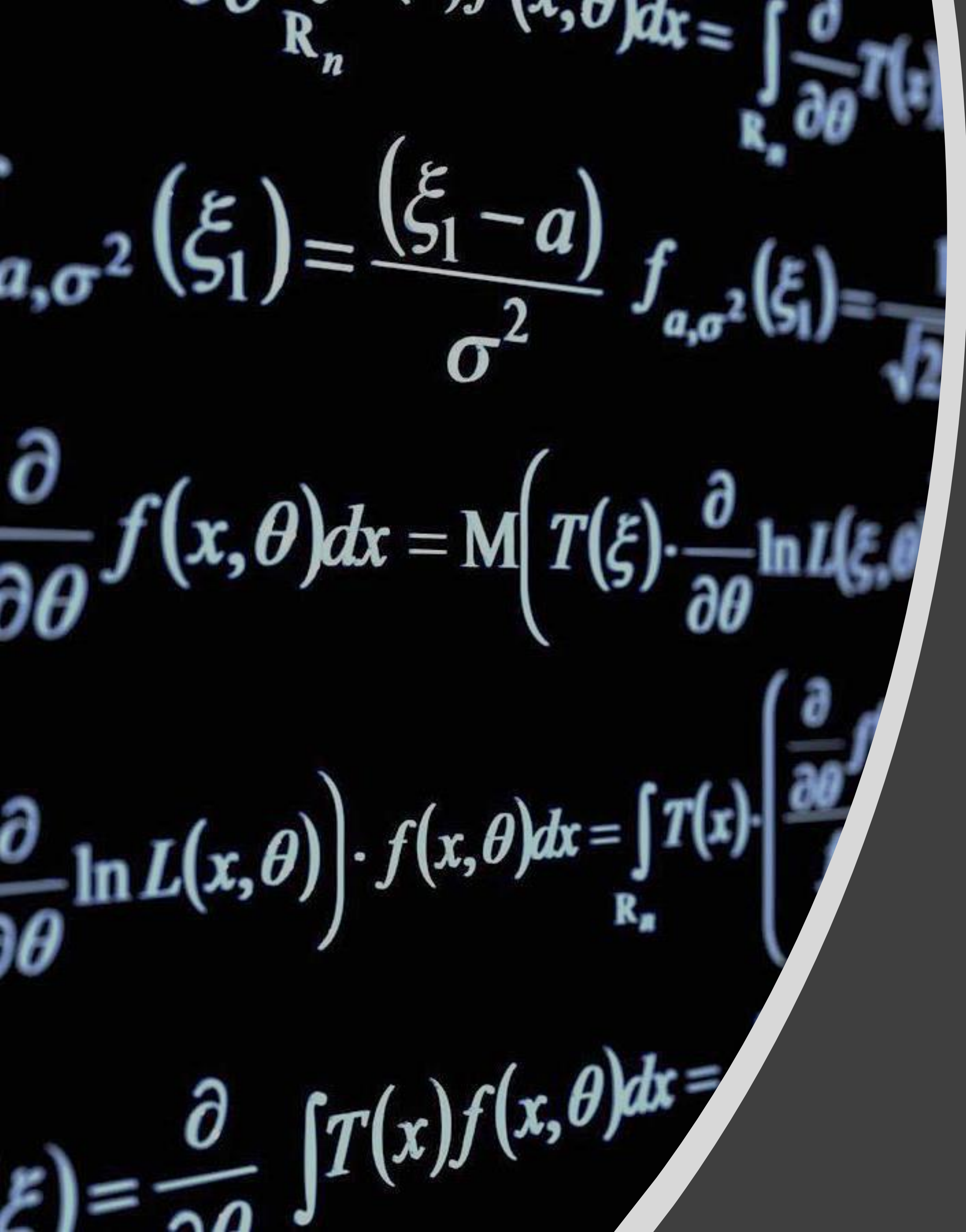


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 13

Математический анализ

Непрерывность функции на промежутке

Определение функции, непрерывной на интервале

Опр. Функция $f(x)$ называется непрерывной на интервале $(a; b)$, если она непрерывна в любой точке $x_0 \in (a; b)$

График непрерывной функции на интервале – сплошная линия, которую можно провести, не отрывая карандаша от бумаги

Определение непрерывной функции на интервале

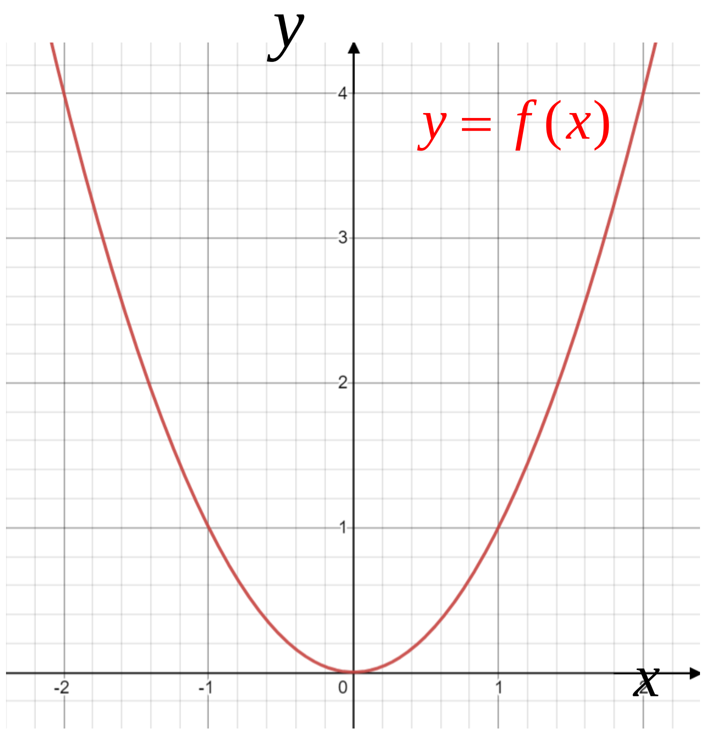
<u>Примеры.</u>

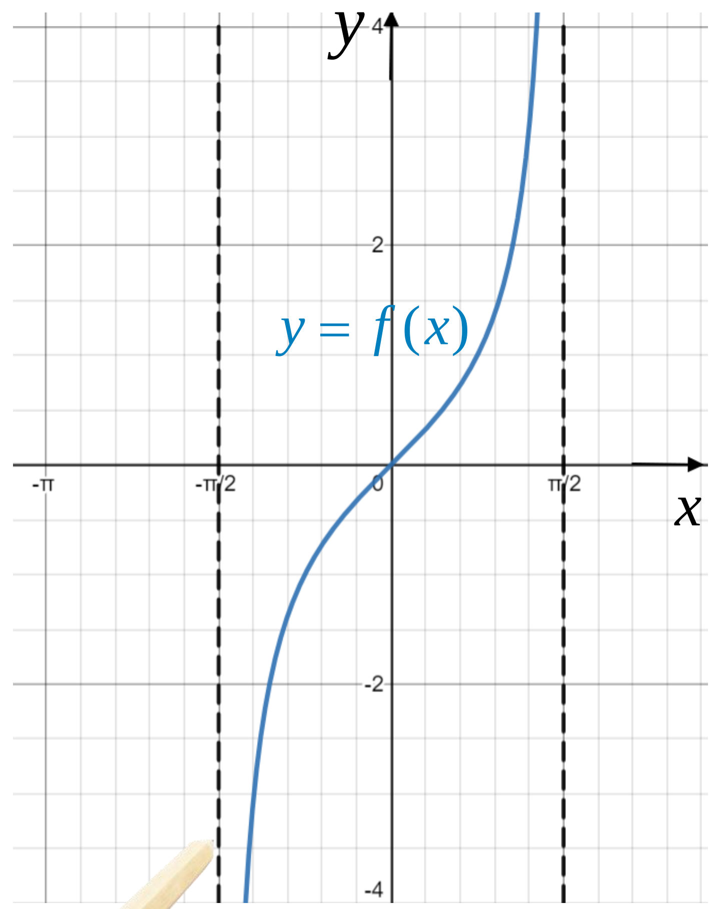
(1) Функции
$f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = e^{-x}$
непрерывны на интервале $(-\infty; +\infty)$;

(2) Функция $f(x) = \ln x$ непрерывна на интервале $(0; +\infty)$;

(3) Функция $f(x) = \operatorname{tg} x$ непрерывна на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Определение непрерывной функции на интервале





Арифметические свойства функций, непрерывных на интервале

Теорема 1 (арифметические свойства функций, непрерывных на интервале)

Сумма, разность, произведение двух функций, частное двух функций (при условии, что знаменатель не равен нулю), непрерывных на интервале, степень функции, непрерывной на интервале, являются непрерывными функциями на этом интервале.

Арифметические свойства функций, непрерывных на интервале

Доказательство проведем для суммы функций

Пусть функции $f(x),\ g(x)$ – непрерывны на интервале (a, b).

И пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда функции $f(x),\ g(x)$ непрерывны в точке x_0.

Арифметические свойства функций, непрерывных на интервале

Тогда по теореме об арифметических свойствах функций, непрерывных в точке, функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в точке x_0.

$$\Downarrow$$

функция $f(x) + g(x)$ непрерывна на (a, b) ∎

Доказательство других свойств – упр.

Непрерывность сложной функции на интервале

Теорема 2 (непрерывность сложной функции на интервале) (без док-ва)

1) $y = f(x)$ определена и непрерывна на (a, b) .

2) Пусть $z = g(y)$ определена и непрерывна на (c, d) .

3) $f((a, b)) \subseteq (c, d)$, т.е. если $x \in (a, b)$, то $y = f(x) \in (c, d)$

4) Тогда $z = g\left(f(x)\right)$ определена и непрерывна на (a, b) .

Непрерывность сложной функции на интервале

Пример 1.

1) $y = f(x) = \operatorname{tg} x$ определена и непрерывна на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

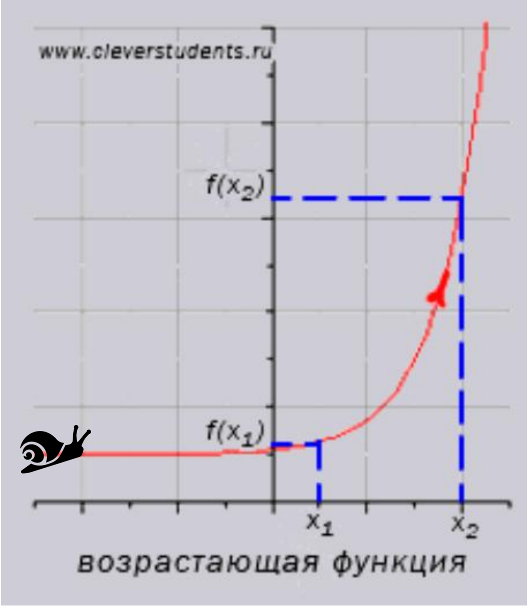
2) Пусть $z = g(y) = y^2$ определена и непрерывна на $(-\infty; +\infty)$.

3) $f\left(\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-\infty; +\infty)$.

4) Тогда $z = g\big(f(x)\big) = (\operatorname{tg} x)^2$ определена и непрерывна на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

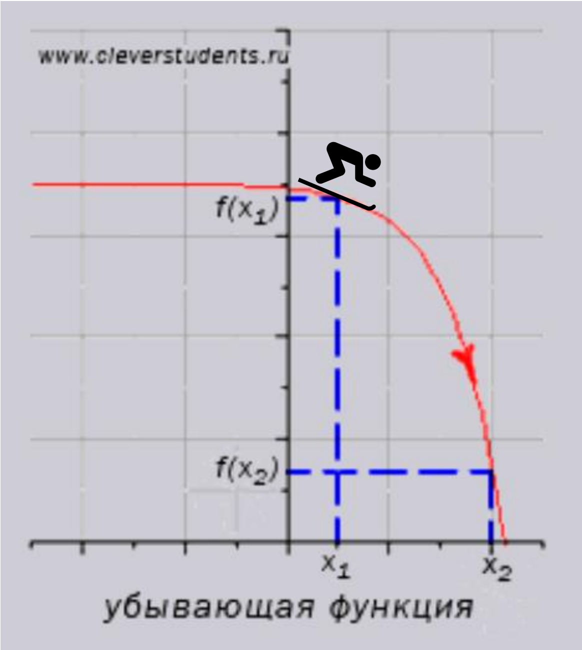
Определение монотонной функции

Опр. Функция $f(x)$ называется возрастающей (↑) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) < f(x_2)$.



Определение монотонной функции

<u>Опр.</u> Функция $f(x)$ называется убывающей ($\downarrow$) на множестве X, если для любых $x_1, x_2 \in X$ таких, что $x_1 < x_2$ выполняется $f(x_1) > f(x_2)$.



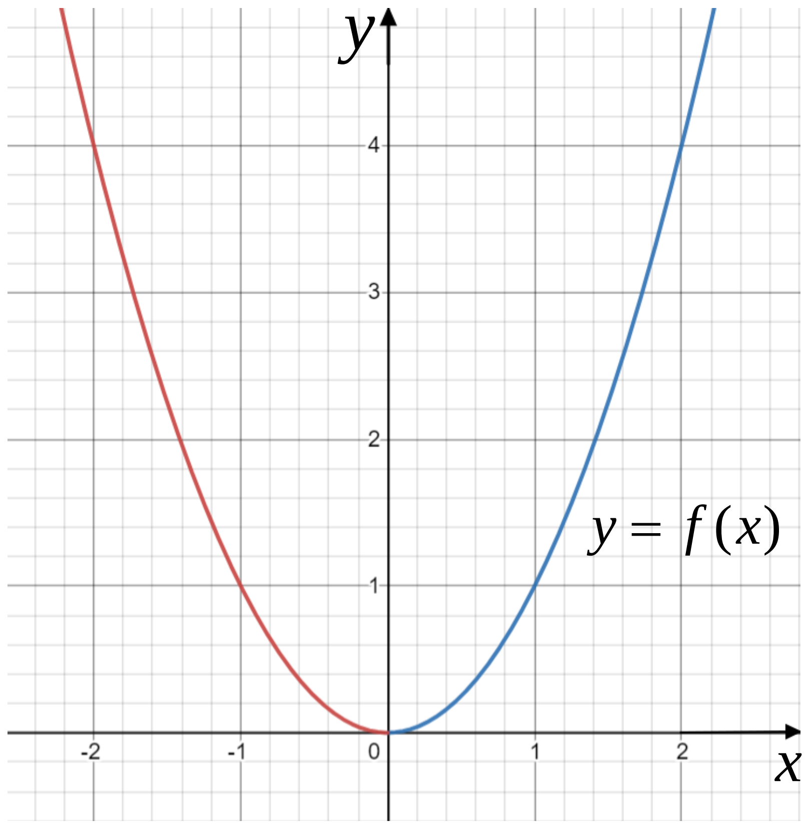
Определение монотонной функции

Опр. Функция $f(x)$ называется монотонной, если она возрастающая или убывающая.

Утверждение. Если функция $f(x)$ монотонная, то она взаимно однозначная (обратимая) (упр.)

Определение монотонной функции

Пример 2. Функция $f(x) = x^2$ является убывающей на множестве $(-\infty; 0]$ и возрастающей на $[0; +\infty)$.



$f(x) = x^2$ не является монотонной на $(-\infty;+\infty)$.

Непрерывность обратной функции

Теорема 3. Пусть $y = f(x) -$ непрерывная монотонная функция на (a, b) и $f\big((a, b)\big) = (c, d)$. Тогда обратная функция $y = f^{-1}(x)$ монотонная непрерывная функция на (c, d).

Без док-ва.

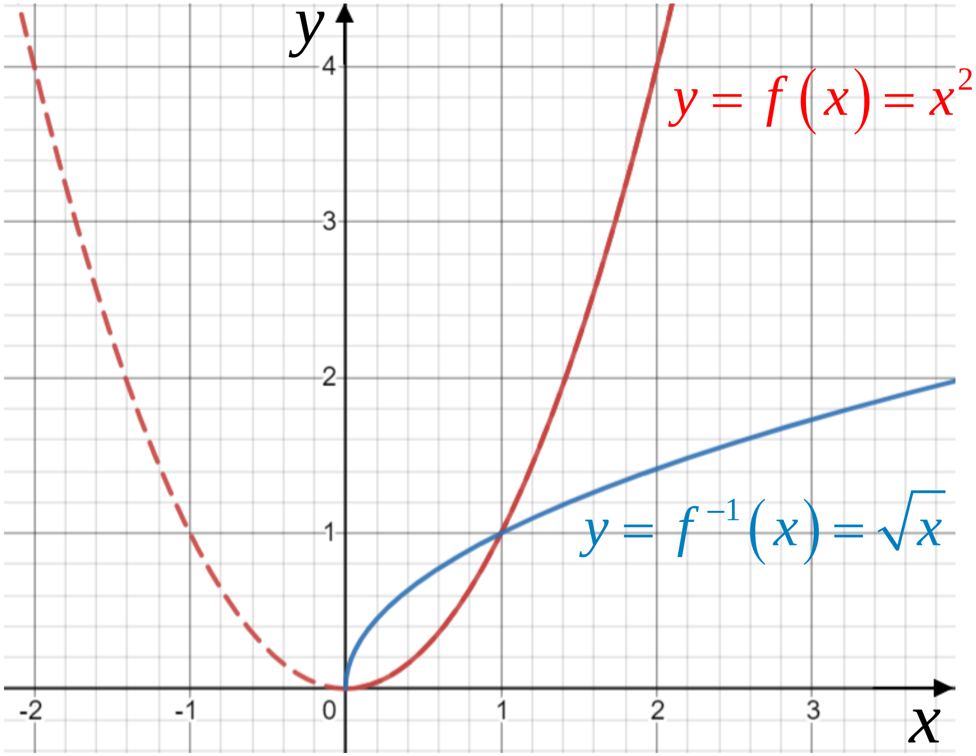
Непрерывность обратной функции на интервале

Пример 3.

Функция $y = f(x) = x^2$ возрастает и непрерывна на $(0; +\infty)$ и $f\big((0; +\infty)\big) = (0; +\infty)$.

Тогда функция $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ возрастает и непрерывна на $(0; +\infty)$.

Непрерывность обратной функции на интервале



Непрерывность функции на промежутке

Опр. Промежутком числовой прямой называется интервал (a, b), полуинтервалы $[a, b), (a, b]$ и отрезок $[a, b]$.

Примеры.

$(-1{,}3), \left(\sqrt{2}, +\infty\right), (-\infty; 0), (-\infty; +\infty);$

$[-2; 5), (-\infty; 1.1];\ \left[-\frac{2}{3}; 10\right]$ – промежутки

Непрерывность функции на промежутке

Чтобы определить непрерывность функции на любом промежутке, а не только на интервале, введем понятие непрерывности слева и справа.

Определение функции, непрерывной справа в точке

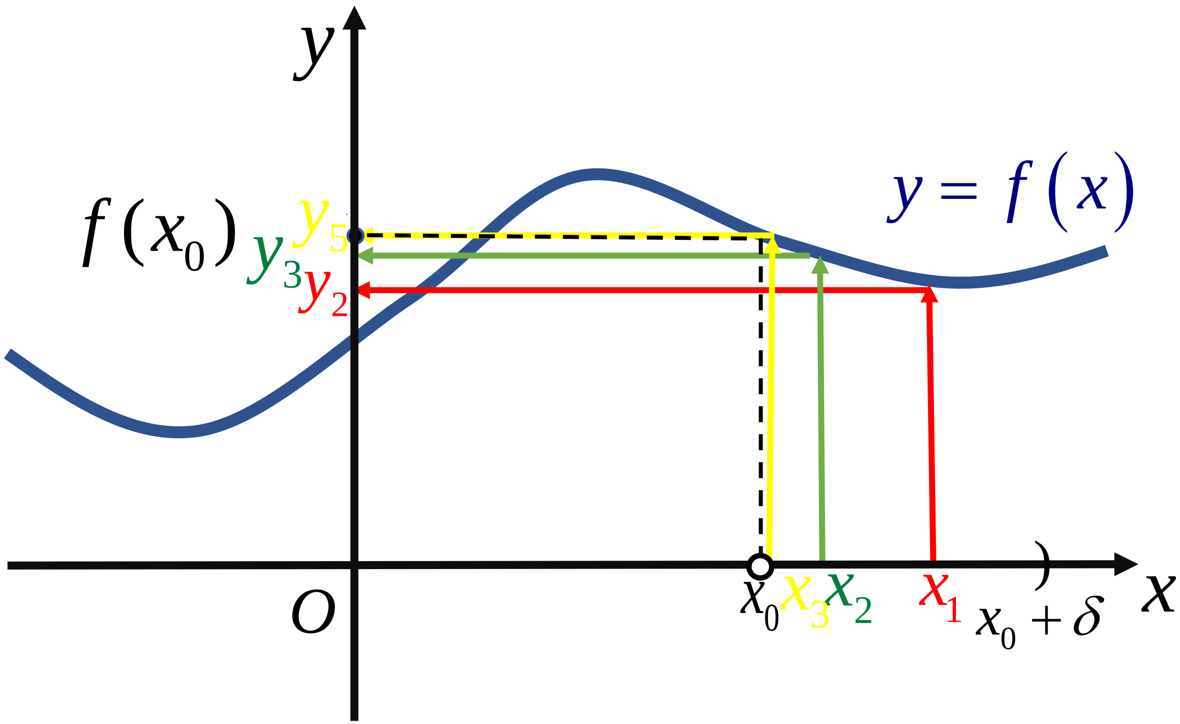
Пусть функция $f(x)$ определена в правой δ-окрестности $[x_0; x_0+\delta)$ точки $x = x_0$.

Опр. Говорят, что функции $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0, если

1) существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$ и

2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = f(x_0)$.

Определение функции, непрерывной справа в точке



$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = f(x_0)$$

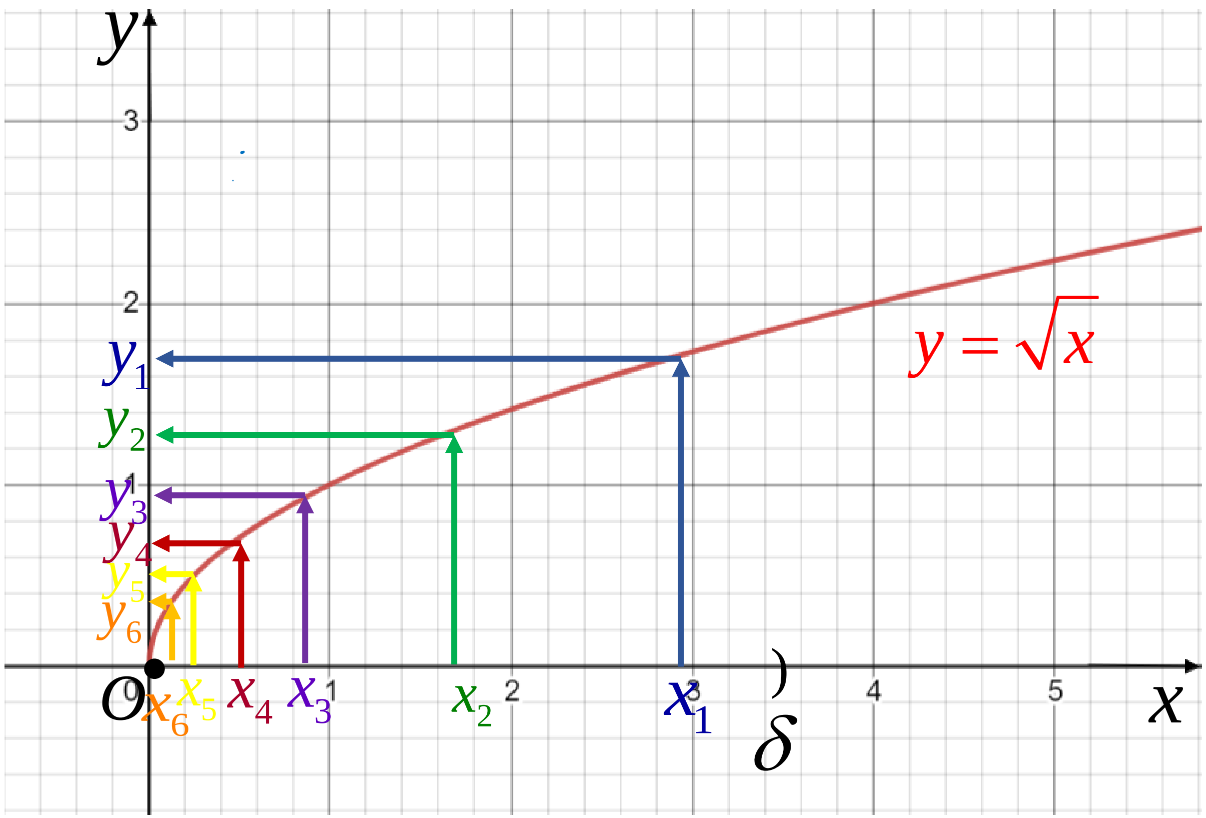
Определение функции, непрерывной справа в точке

<u>Пример 4.</u>

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \sqrt{x} =$$

$$= \sqrt{0} = 0$$

$$\Downarrow$$



Функция

$f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $x = 0$

Определение функции, непрерывной слева в точке

Опр. функции, непрерывной слева в точке аналогично (упр.)

Упр. Привести пример функции, определенной в $O(x_0)$, непрерывной справа в точке $x = x_0$, но имеющей разрыв I рода.

Упр. Привести пример функции, определенной в $O(x_0)$, непрерывной слева в точке $x = x_0$, но имеющей разрыв II рода.

Определение функции, непрерывной на промежутке

Опр. Функция $f(x)$ называется непрерывной на полуинтервале $[a; b)$, если она непрерывна на интервале $(a; b)$ и непрерывна справа в точке $x = a$.

Опр. функции, непрерывной на полуинтервале $(a; b]$ и отрезке $[a; b]$ аналогично (упр.).

Определение функции, непрерывной на промежутке

<u>Примеры.</u>

(1) Функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на $[0; +\infty)$.

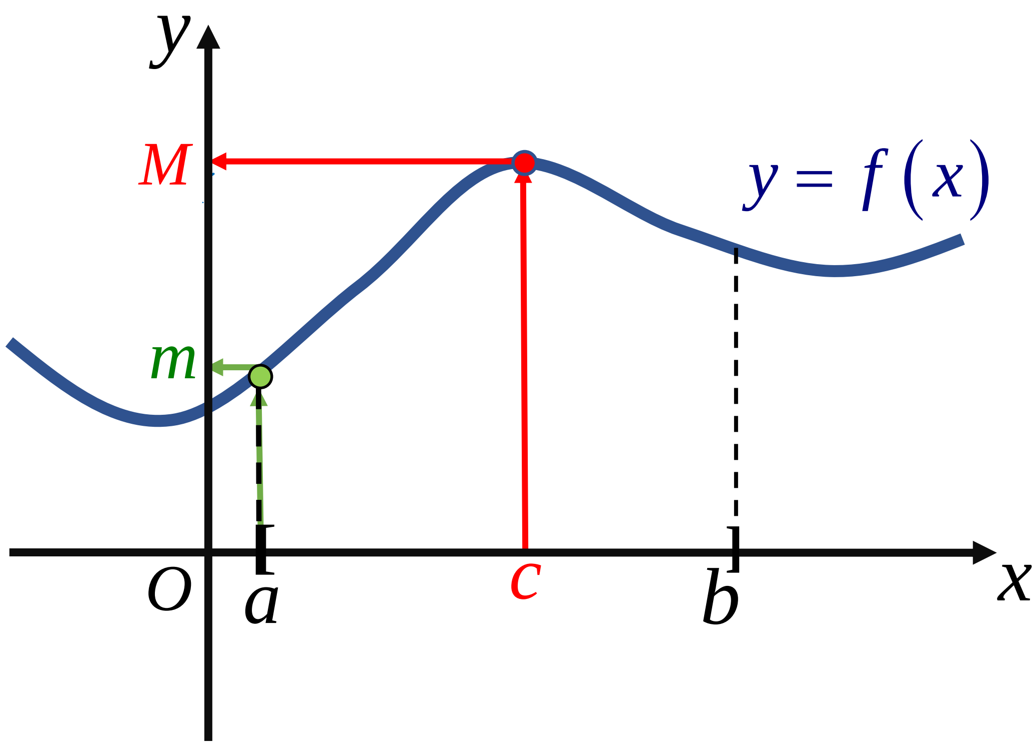
(2) Функция $f(x) = \arcsin x$ непрерывна на $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема Вейерштрасса. Функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наибольшего и наименьшего значений.

Без доказательства.

Свойства функций, непрерывных на отрезке



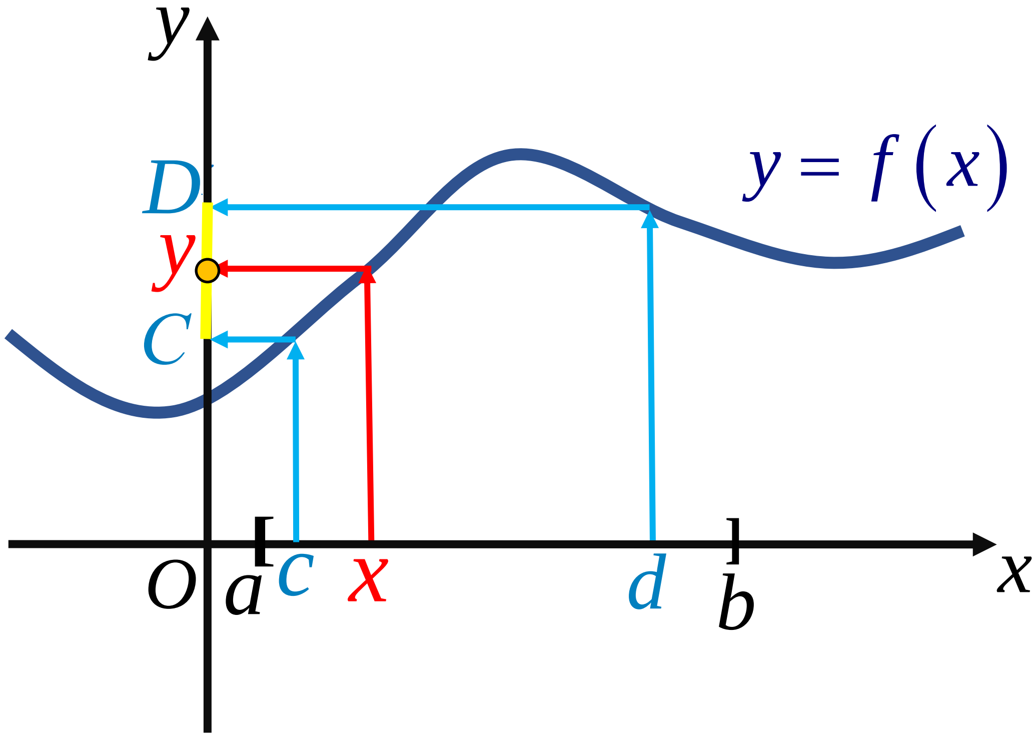
$M(m)$ – наибольшее (наименьшее) значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Свойства функций, непрерывных на отрезке

<u>Теорема Больцано-Коши.</u>

Если непрерывная функция, определённая на отрезке, принимает два значения, то она принимает и любое значение между ними.

Свойства функций, непрерывных на отрезке



Свойства функций, непрерывных на отрезке

Следствие (о нуле функции).
Пусть функция $f(x) -$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и значения $f(a)$ и $f(b) -$ разных знаков. Тогда существует такое значение $c \in [a; b]$ (нуль функции), что $f(c) = 0$.

Док-во (упр.)