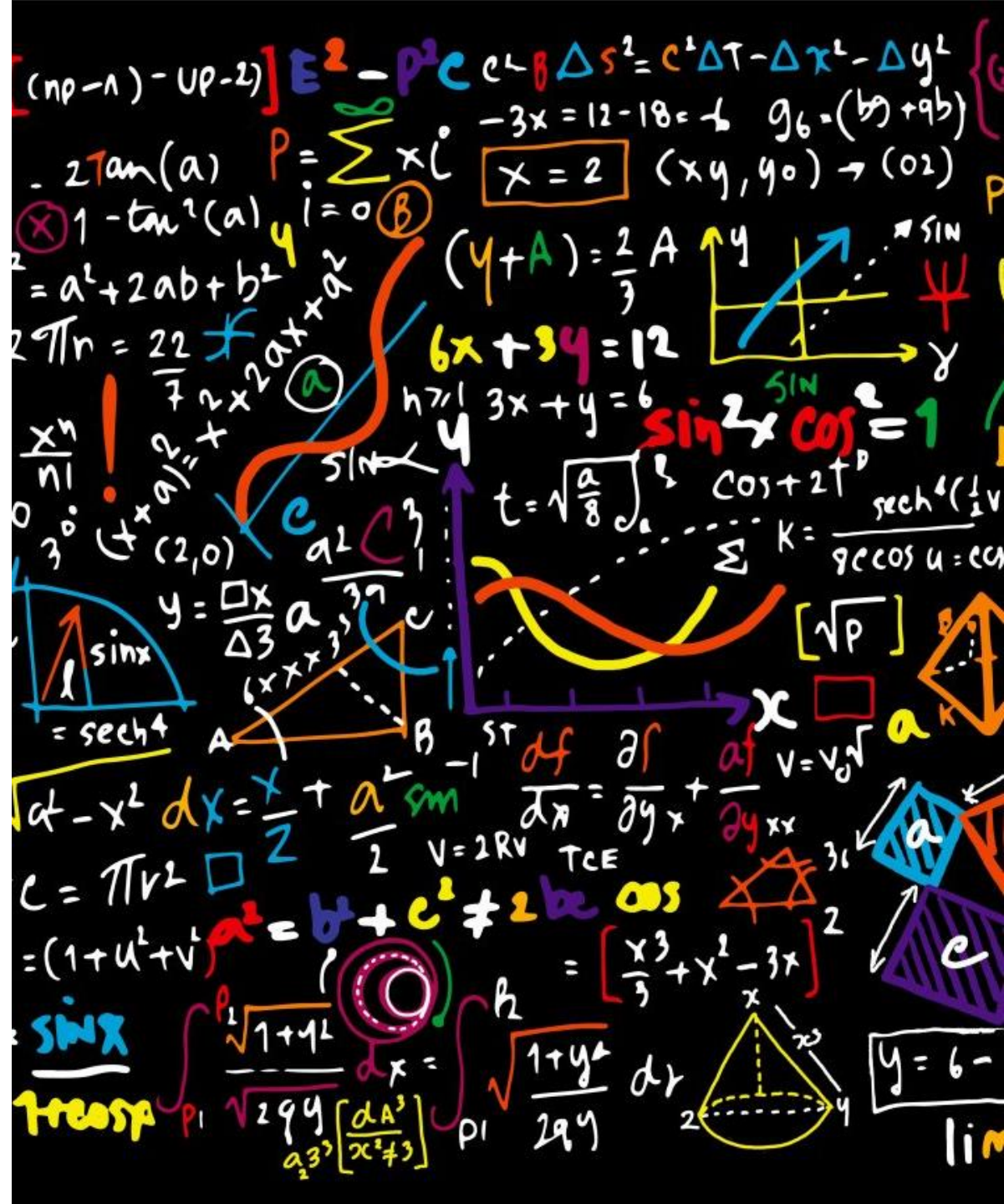




Лекция 12

Степенные ряды

1. Понятие степенного ряда.
2. Теорема Абеля.
3. Область сходимости степенного ряда.
4. Вычисление радиуса сходимости.
5. Нахождение области сходимости степенного ряда.

Определение степенного ряда

Опр. Ряд вида

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

называется **степенным рядом**,

а значения a_n — **коэффициентами степенного ряда**.

Определение степенного ряда

Степенной ряд всегда сходится при $x = 0$
к числу a_0 .

В других точках возможна сходимость и
расходимость степенного ряда.

Теорема Абеля

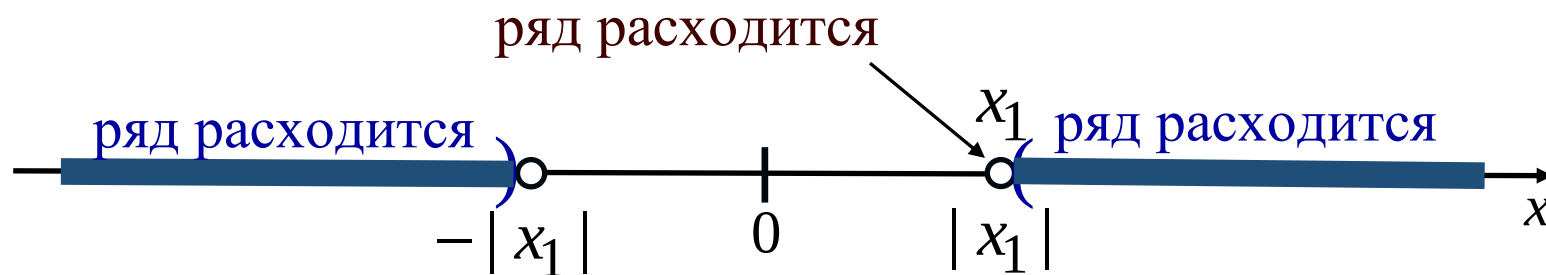
Теорема 1 (теорема Абеля).

1) Если степенной ряд (1) сходится при $x = x_0$, $x_0 \neq 0$, то этот ряд **сходится абсолютно** для любого $x \in \mathbb{R}$ такого, что $|x| < |x_0|$;



Теорема Абеля

2) Если степенной ряд (1) расходится при $x = x_1$, то этот ряд **расходится** для любого $x \in \mathbb{R}$ такого, что $|x| > |x_1|$.



Теорема Абеля. Доказательство

Доказательство.

1) Пусть ряд (1) сходится при $x = x_0$, т.е. сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n + \dots$$

Следовательно, по необходимому признаку сходимости ряда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n x_0^n = 0$$

Теорема Абеля. Доказательство

т.е. последовательность $\{a_n x_0^n\}$ сходится и поэтому ограничена.

Значит, существует число $M > 0$ т.ч. $|a_n x_0^n| < M$ для любого $n \in \mathbb{N}$.

Пусть $|x| < |x_0|$. Тогда $\frac{|x|}{|x_0|} < 1$. Значит, $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$.

Тогда $|x|^n < |x_0|^n \Rightarrow \frac{|x|^n}{|x_0|^n} = \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < 1 \Rightarrow$

Теорема Абеля. Доказательство

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x|^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x_0|^n \cdot \frac{|x|^n}{|x_0|^n} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_0^n| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < \end{aligned}$$

$$\left[|a_n x_0^n| < M \right] < \sum_{n=0}^{\infty} M \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^n = M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n,$$

$$\text{где } q = \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1.$$

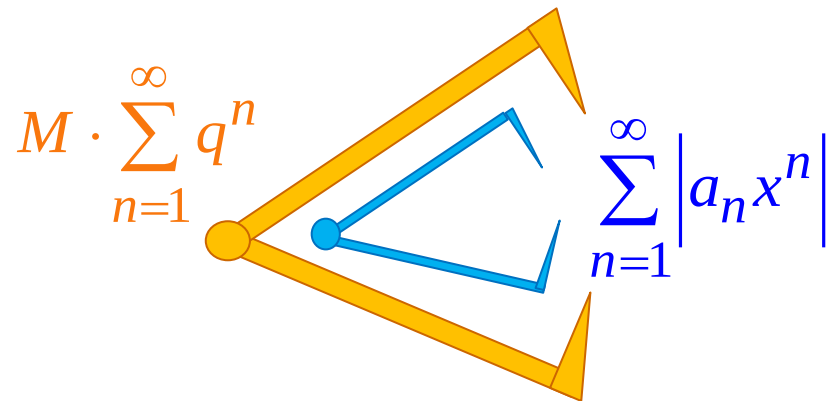
Теорема Абеля. Доказательство

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

$\Rightarrow$ ряд $M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится.

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$
сходится по
признаку сравнения.

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
абсолютно сходится ■



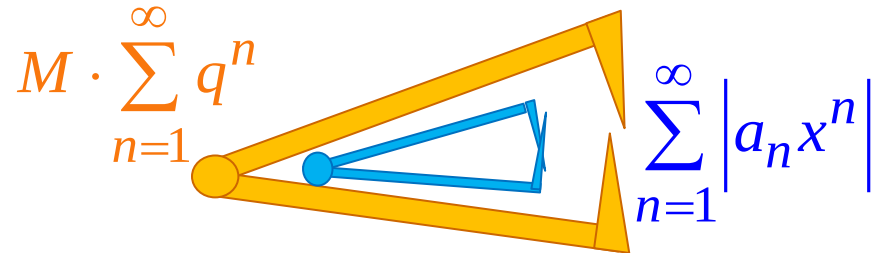
Теорема Абеля. Доказательство

Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится как бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

$\Rightarrow$ ряд $M \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ сходится.

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$
сходится по
признаку сравнения.

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
абсолютно сходится ■



Теорема Абеля. Доказательство

2) Пусть ряд (1) расходится при $x = x_1$ и пусть $|x| > |x_1|$.

Предположим противное: ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится.

$\Rightarrow$ по 1) ряд (1) абсолютно сходится при $x = x_1$, что противоречиво.

Область сходимости степенного ряда

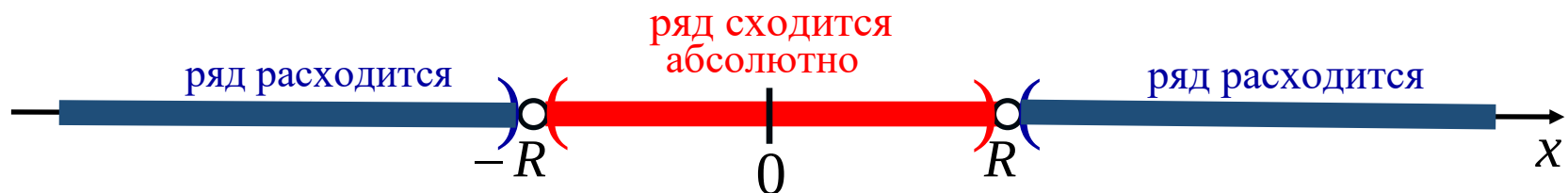
Опр. Областью сходимости степенного ряда (1) называется множество точек $x \in \mathbb{R}$ при которых ряд (1) сходится.

Опр. Число $R > 0$ такое, что при $|x| < R$ степенной ряд (1) сходится, а при $|x| > R$ ряд (1) расходится называется радиусом сходимости, а интервал $(-R, R)$ — интервалом сходимости.

Область сходимости степенного ряда

Вывод. Если R — радиус сходимости степенного ряда (1), то

- при $x \in (-R, R)$ ряд степенной (1) **абсолютно сходится**;
- при $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ ряд **расходится**;
- в точках $x = -R, x = R$ требуется **дополнительное исследование**.



Вычисление радиуса сходимости

Теорема 2. Радиус сходимости степенного ряда (1) при условии $a_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ равен

$$R = \frac{1}{d}, \text{ где } d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Доказательство. Воспользуемся признаком Даламбера

$$d(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}x^{n+1}|}{|a_nx^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

Вычисление радиуса сходимости

Итак, $d(x) = |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |x| \cdot d,$

где $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}.$

Если $d(x) < 1$, то ряд (1) абсолютно сходится.

$$d(x) < 1 \Leftrightarrow |x| \cdot d < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{d}$$

Если $d(x) > 1$, т.е. $|x| > \frac{1}{d}$, то ряд (1) абсолютно расходится. Можно показать, что ряд (1) просто расходится.

Следовательно, $R = \frac{1}{d}$ ■

Вычисление радиуса сходимости

Теорема 3. Радиус сходимости степенного ряда (1) при условии $a_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ равен

$$R = \frac{1}{q}, \text{ где } q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

Доказательство аналогично док-ву теоремы 2 (упр).

Область сходимости. Задача 1

Задача 1. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

Решение.

Вычислим радиус сходимости по теореме 2.

$$a_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2}{(n+1)^2} \Rightarrow$$

Область сходимости. Задача 1

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2} \right] = 1 \Rightarrow$$

$$R = \frac{1}{d} = 1 \Rightarrow$$

При $x \in (-1, 1)$ ряд **абсолютно сходится**.

При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ряд **расходится**.



Область сходимости. Задача 1

Исследуем граничные точки.

При $x = 1$ исходный ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

и он **сходится** (как гармонический при $\alpha = 2$).

При $x = -1$ исходный ряд имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

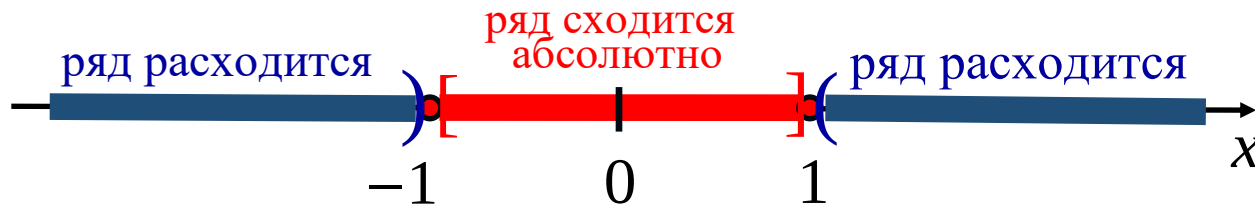
и он **тоже абсолютно сходится**, т.к.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Область сходимости. Задача 1

Ответ:

1. При $x \in [-1, 1]$ ряд **абсолютно сходится**.
2. При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ряд **расходится**.



Область сходимости. Задача 2

Задача 2. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

Решение.

Вычислим радиус сходимости по теореме 2.

$$a_n = \frac{1}{n!} \Rightarrow a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!}{(n+1)!} =$$

Область сходимости. Задача 2

$$= \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \dots \cdot \cancel{n}}{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \dots \cdot \cancel{n} \cdot (n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

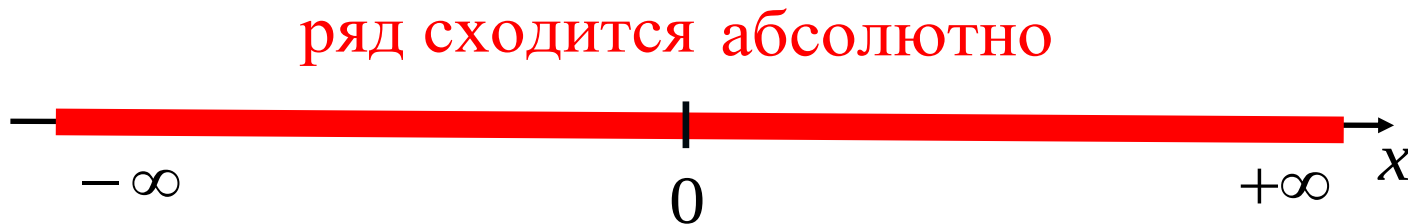
$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0 \Rightarrow$$

$$R = \frac{1}{d} = \left[\frac{1}{0} \right] = \infty \Rightarrow$$

При $x \in (-\infty, +\infty)$ ряд **абсолютно сходится**.

Область сходимости. Задача 2

Ответ: при $x \in (-\infty, +\infty)$ ряд **абсолютно
сходится.**



Область сходимости произвольного степенного ряда

Для ряда (*) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ нужно сделать замену $z = x - x_0$. Ряд (*) превратится в ряд (**) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$\Downarrow$

интервал сходимости ряда (**) имеет вид

$z \in (-R, R)$ с центром в точке $z = 0 \Rightarrow$

Область сходимости произвольного степенного ряда

интервал сходимости ряда (*) имеет вид

$x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ с центром в точке $x = x_0$



Алгоритм нахождения области сходимости степенного ряда

Для решения задач удобно использовать

Алгоритм нахождения области сходимости
степенного ряда

(см. след. слайды; их можно не конспектировать)

Алгоритм нахождения области сходимости степенного ряда

Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, a_n > 0$

1) Делаем замену $z = x - x_0$, рассматриваем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$

2) Находим радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$:

2.1) $R = \frac{1}{q}$, где $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$; 2.2) $R = \frac{1}{d}$, где $d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$;



3) Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 3.1) при $z = R$; 3.2) при $z = -R$

Область сходимости. Задача 3

Задача 3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} (x+1)^n}{3^{n+1} \sqrt{n+2}}$$

Решение. Это степенной ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad a_n = \frac{2^{n-1}}{3^{n+1} \sqrt{n+2}} > 0, \quad x_0 = -1$$

Область сходимости. Задача 3

1) Делаем замену $z = x + 1$, рассматриваем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} z^n}{3^{n+1} \sqrt{n+2}}$$

2) Находим радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$:

$$a_{n+1} = \frac{2^{(n+1)-1}}{3^{(n+1)+1} \sqrt{(n+1)+2}} = \frac{2^n}{3^{n+2} \sqrt{n+3}}$$

Область сходимости. Задача 3

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^n}{3^{n+2}\sqrt{n+3}}}{\frac{2^{n-1}}{3^{n+1}\sqrt{n+2}}} = \frac{2^n \cdot 3^{n+1}\sqrt{n+2}}{2^{n-1} \cdot 3^{n+2}\sqrt{n+3}} = \frac{2\sqrt{n+2}}{3\sqrt{n+3}}$$

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n+2}}{3\sqrt{n+3}} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n}}{3\sqrt{n}} \right] = \frac{2}{3}$$

$$R = \frac{1}{d} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

Область сходимости. Задача 3

При $z \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ряд **абсолютно сходится**.

При $z \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ ряд **расходится**.



Область сходимости. Задача 3

3) Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 3.1) при $z = R$;
3.2) при $z = -R$

3.1) Исследуем ряд

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1} \sqrt{n+2}} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1} \sqrt{n+2}} \frac{3^n}{2^n} = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6\sqrt{n+2}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6\sqrt{n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{расходится} \\ &\quad \left(\alpha = \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Область сходимости. Задача 3

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ расходится

$\Rightarrow$ 3.2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n$ не сходится абсолютно,

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |a_n (-R)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n (-1)^n R^n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \text{ расходится} \right)$$

$(a_n > 0, R > 0)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1} \sqrt{n+2}} \left(-\frac{3}{2} \right)^n =$$

Область сходимости. Задача 3

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1} \sqrt{n+2}} (-1)^n \frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6 \sqrt{n+2}}$$

Применим признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6 \sqrt{n+2}} \Rightarrow b_n = \frac{1}{6 \sqrt{n+2}}$$

$$1) b_n > 0; \quad 2) b_n \downarrow; \quad 3) b_n \rightarrow 0 \Rightarrow$$

Область сходимости. Задача 3

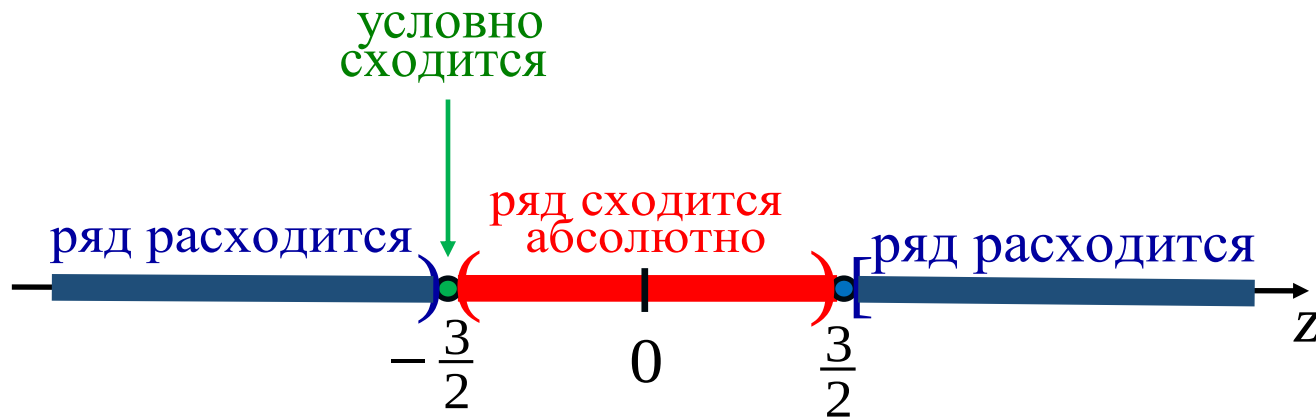
$$\text{Ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6\sqrt{n+2}} \quad \begin{array}{l} \text{сходится} \\ \text{по признаку} \\ \text{Лейбница} \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n \text{ сходится условно.}$$

Область сходимости. Задача 3

Промежуточный ответ:

1. При $z \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ряд **абсолютно сходится**.
2. При $z \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ ряд **расходится**.
3. При $z = -\frac{3}{2}$ ряд **условно сходится**.



Область сходимости. Задача 3

Ответ:

1. При $x \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ряд **абсолютно сходится**.
2. При $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ряд **расходится**.
3. При $x = -\frac{5}{2}$ ряд **условно сходится**.

