Несобственный интеграл. Приближенные вычисления определенного интеграла

Математика, II сем. Лекция 12. ДФиПХ, ИЕНиМ.

Лекторы: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.
к.ф.-м.н., доцент Перминова О.Е.

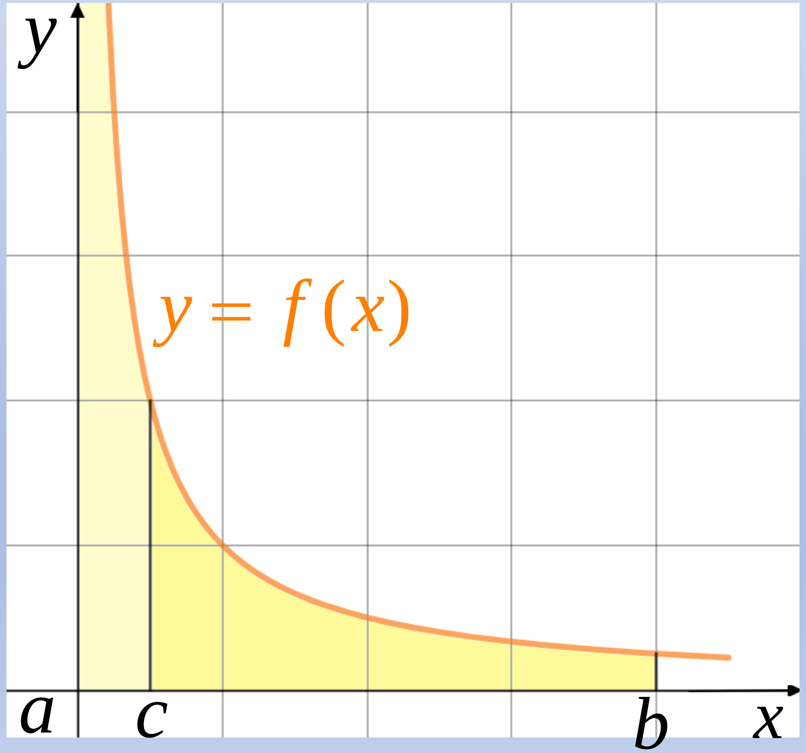
Несобственный интеграл I-го рода

- **Определение.** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $(a;b]$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$. Если существует $\lim\limits_{c\to a+0} \int\limits_c^b f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом I-го рода

и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx.$

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c\to a+0} \int\limits_c^b f(x)dx.}$$



Несобственный интеграл II-го рода

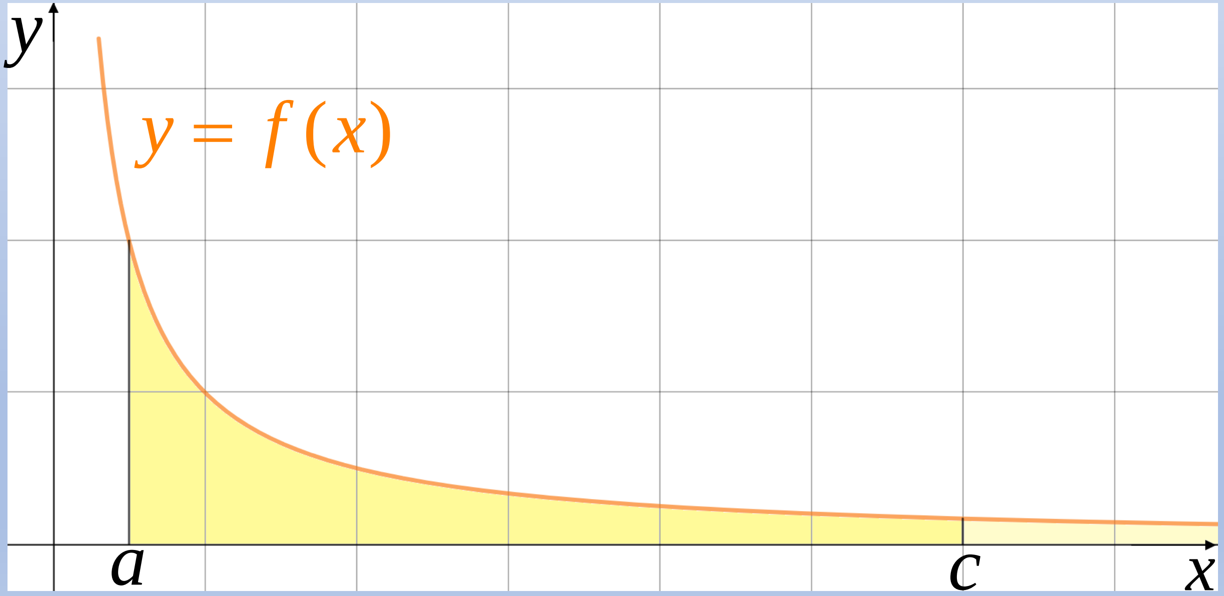
- **Определение**. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$.

Если существует $\lim\limits_{c\to+\infty}\int\limits_a^c f(x)dx$, то он называется несобственным интегралом II-го рода

и обозначается $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{c\to+\infty}\int\limits_a^c f(x)dx.}$$



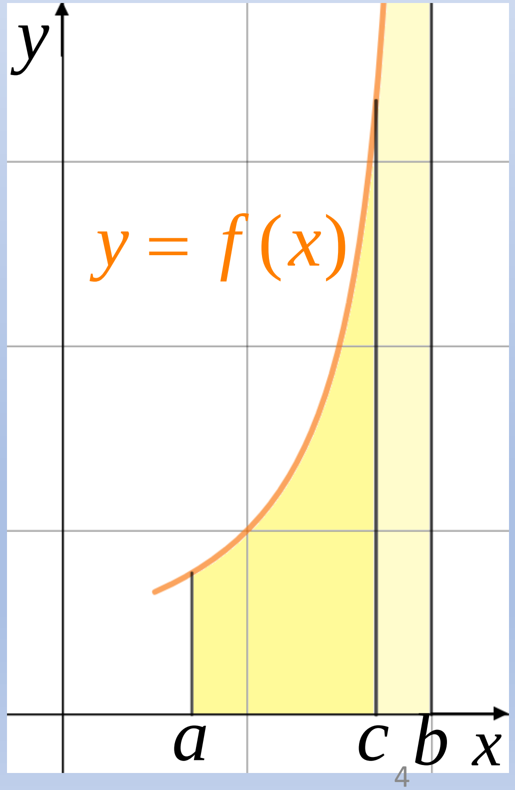
Несобственный интеграл I-го рода

- Аналогично определяется несобственный интеграл I-го рода

$\int\limits_a^b f(x)dx$, если $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{c\to b-0} \int\limits_a^c f(x)dx.}$$

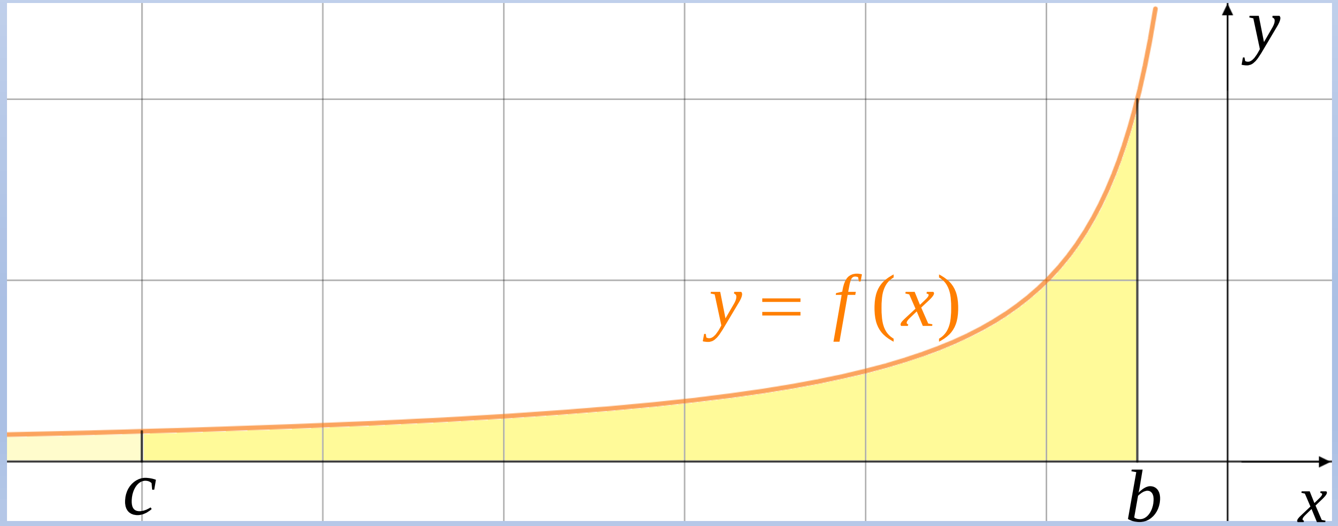


Несобственный интеграл II-го рода

- Аналогично определяется несобственный интеграл II-го рода $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx,$ если $y = f(x)$ непрерывна на $(-\infty;b]$.

Таким образом, по определению

$$\boxed{\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{c\to-\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx.}$$



Несобственный интеграл. Пример 1

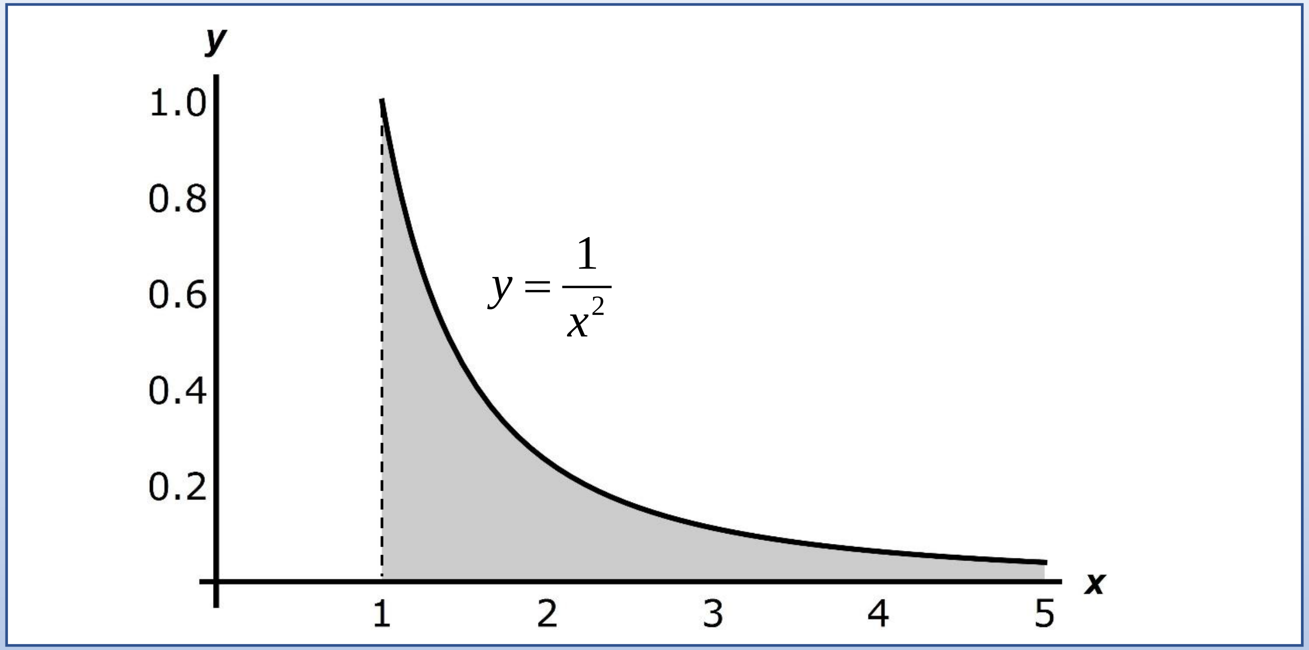
Найти $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$

Решение.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \int\limits_{1}^{+\infty} x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_{1}^{+\infty} = \left.-\frac{1}{x}\right|_{1}^{+\infty} =$$

$$= \left[-\left(\frac{1}{+\infty} - \frac{1}{1}\right) = -(0-1) = 1\right] = 1$$

Ответ: 1



Задача 1. Найти $\int\limits_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$. Сделать чертеж.

Ответ: $\frac{1}{8}$

Несобственный интеграл. Пример 2

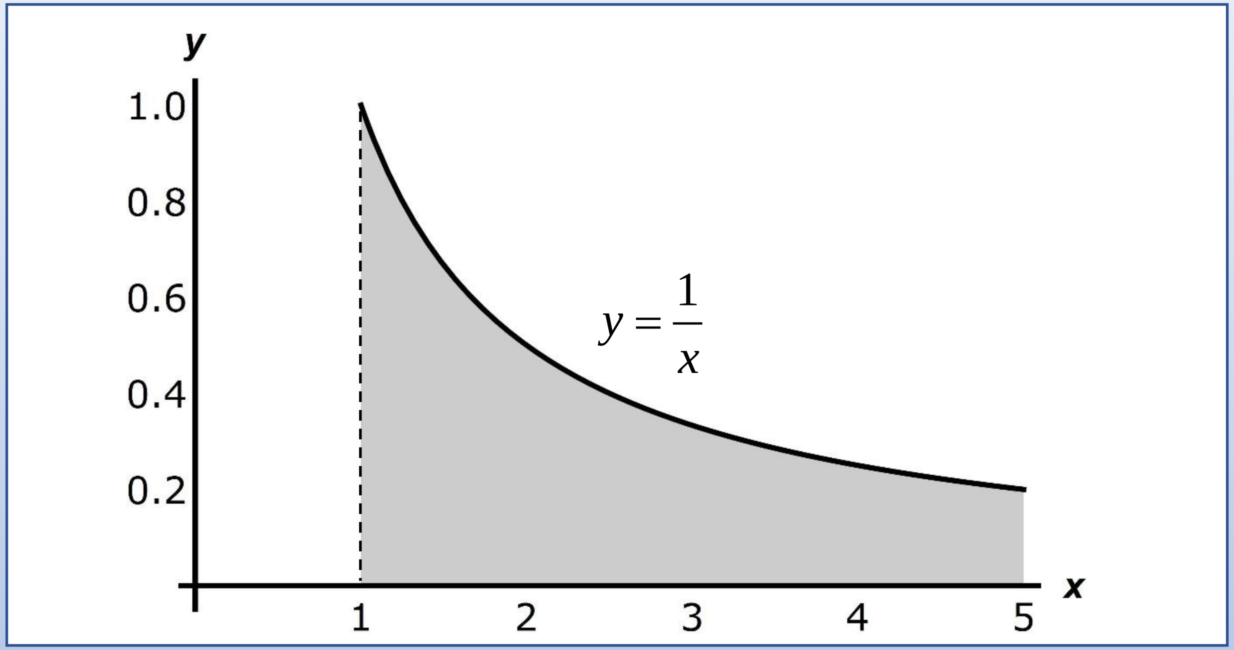
Найти $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x}.$

Решение.

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{1}^{+\infty} =$$

$$= \left[\ln(+\infty) - \ln 1 = +\infty - 0 = +\infty\right] = +\infty$$

Ответ: интеграл расходится

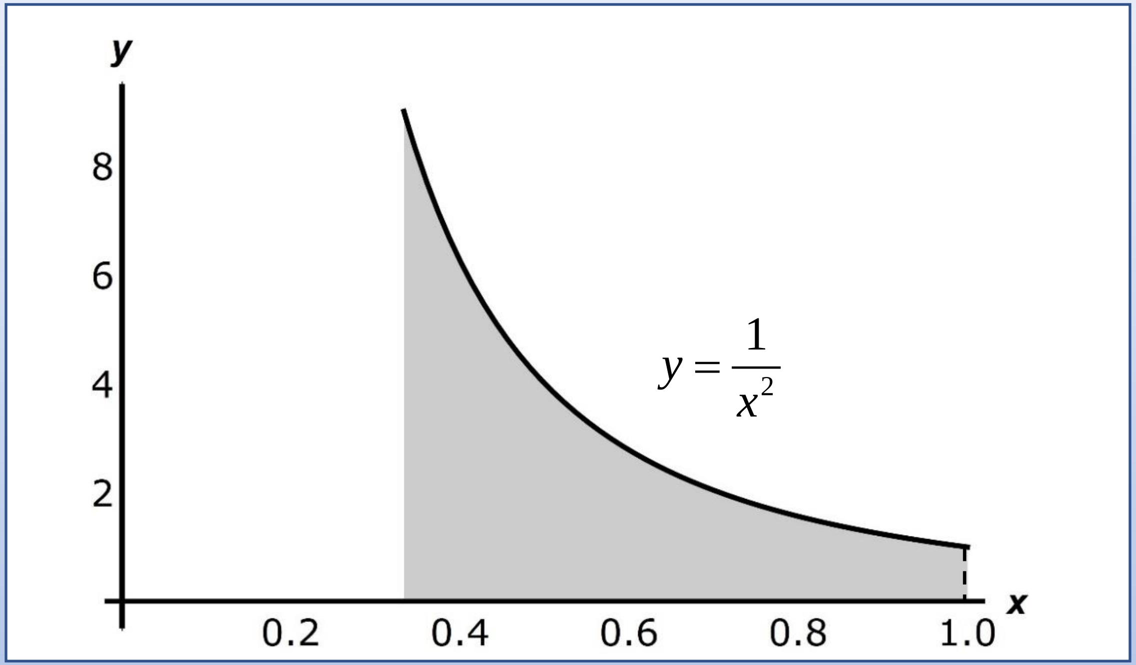


Задача 2. Найти $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Сделать чертеж.

Ответ: интеграл расходится

Несобственный интеграл. Пример 3

Найти $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$



Решение.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 x^{-2}\,dx = \left.\frac{x^{-1}}{-1}\right|_0^1 =$$

$$= -\left.\frac{1}{x}\right|_0^1 = \left[-\left(1-\frac{1}{0}\right) = \infty\right] = \infty$$

Ответ: интеграл расходится

Задача 3. Найти $\int_0^1 \frac{dx}{x}$. Сделать чертёж.

Ответ: интеграл расходится

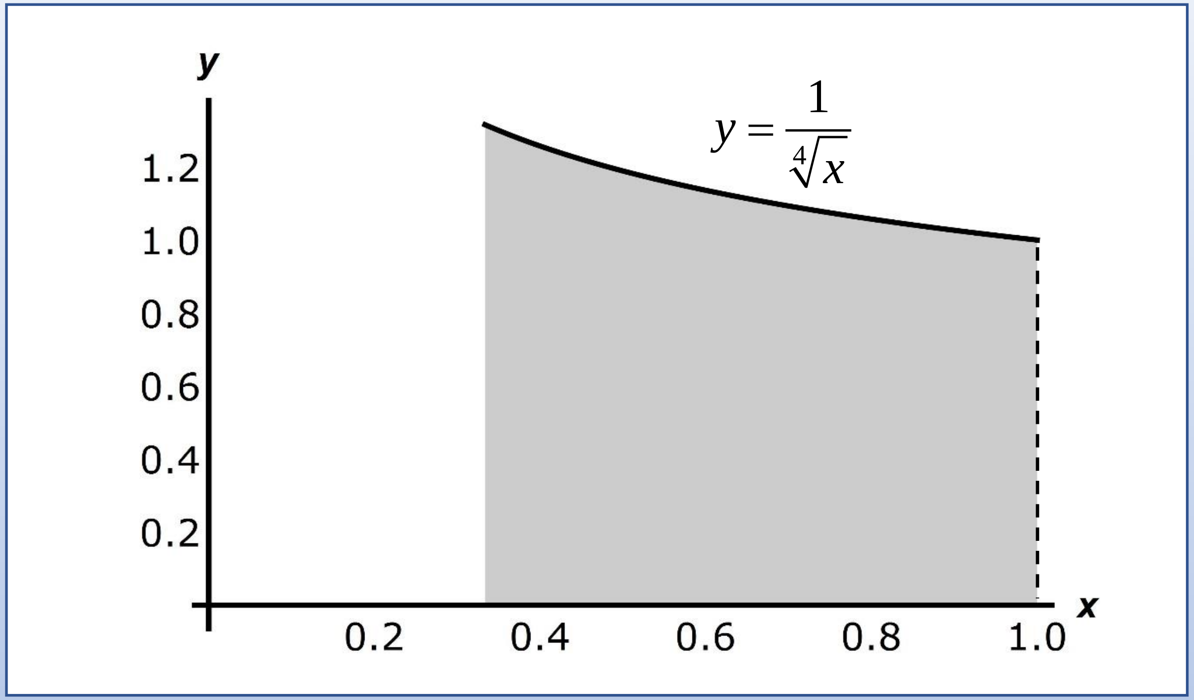
Несобственный интеграл. Пример 4

Найти $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

Решение.

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = \int\limits_0^1 x^{-\frac{1}{4}}\,dx = \left.\frac{x^{\frac{3}{4}}}{3/4}\right|_0^1 =$$

$$= \left.\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}\right|_0^1 = \left[\frac{4}{3}(1-0) = \frac{4}{3}\right] = \frac{4}{3}$$



Ответ: $\frac{4}{3}$

Задача 4. Найти $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$. Сделать чертёж.

Ответ: $\frac{3\sqrt[3]{4}}{2}$

Несобственный интеграл. Пример 7 (площадь)

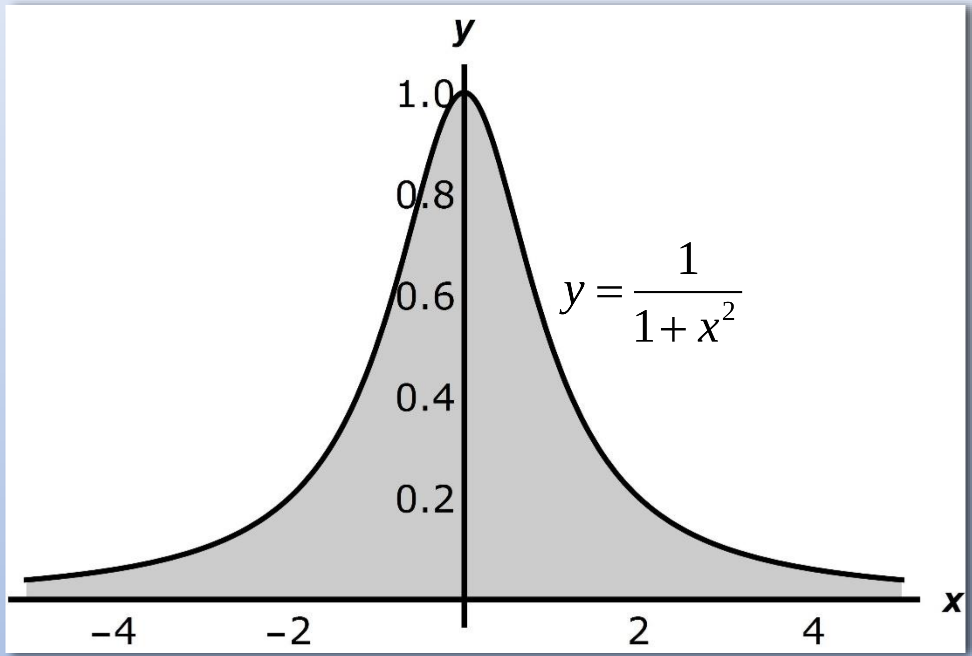
Задача 7.

Вычислить площадь фигуры, заключенной

между линией $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и её асимптотой (y = 0)

Решение. $S = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = 2\int\limits_{0}^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^2} = \cdots$

Ответ: π



Несобственный интеграл. ВЫВОДЫ

Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha - ?$

Интеграл $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}}$ сходится тогда и только тогда, когда $\alpha - ?$

Приближенное вычисление интегралов

Интегралы

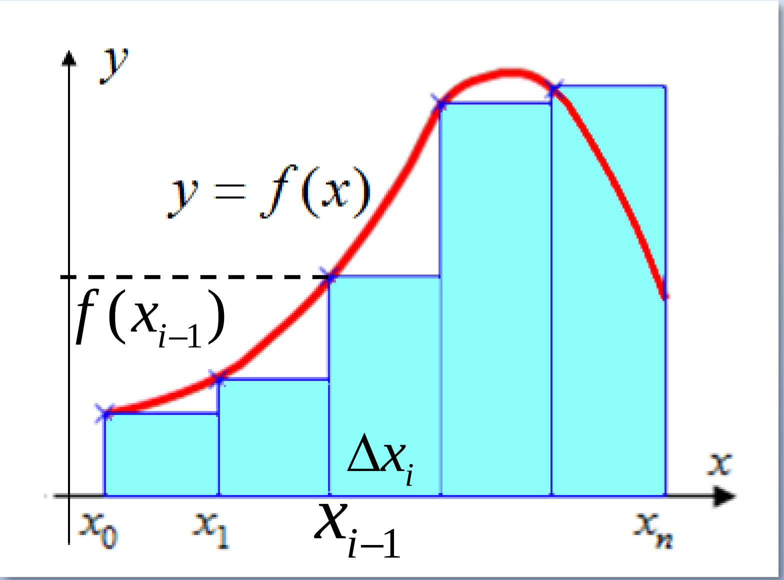
$$\int e^{-x^2}dx,\quad \int \sin x^2 dx,\quad \int \cos x^2 dx,$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \frac{\cos x}{x}dx,\quad \int \frac{dx}{\ln x}$$

“неберущиеся”, т.е. не существует такой элементарной функции $f(x)$, что $f'(x)$ равняется одной из перечисленных выше функций.

Приближенное вычисление интегралов

Метод левых прямоугольников



$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x_i = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

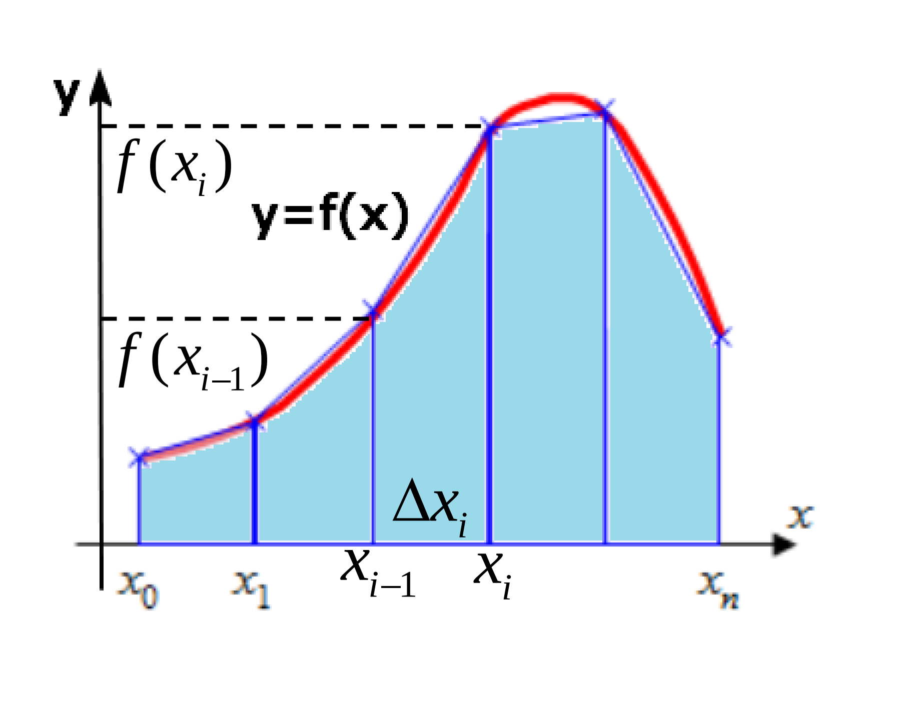
Погрешность равна $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Метод правых прямоугольников, формула - ? (1балл)

Метод средних прямоугольников формула - ? (1балл)

Приближенное вычисление интегралов

Метод трапеций

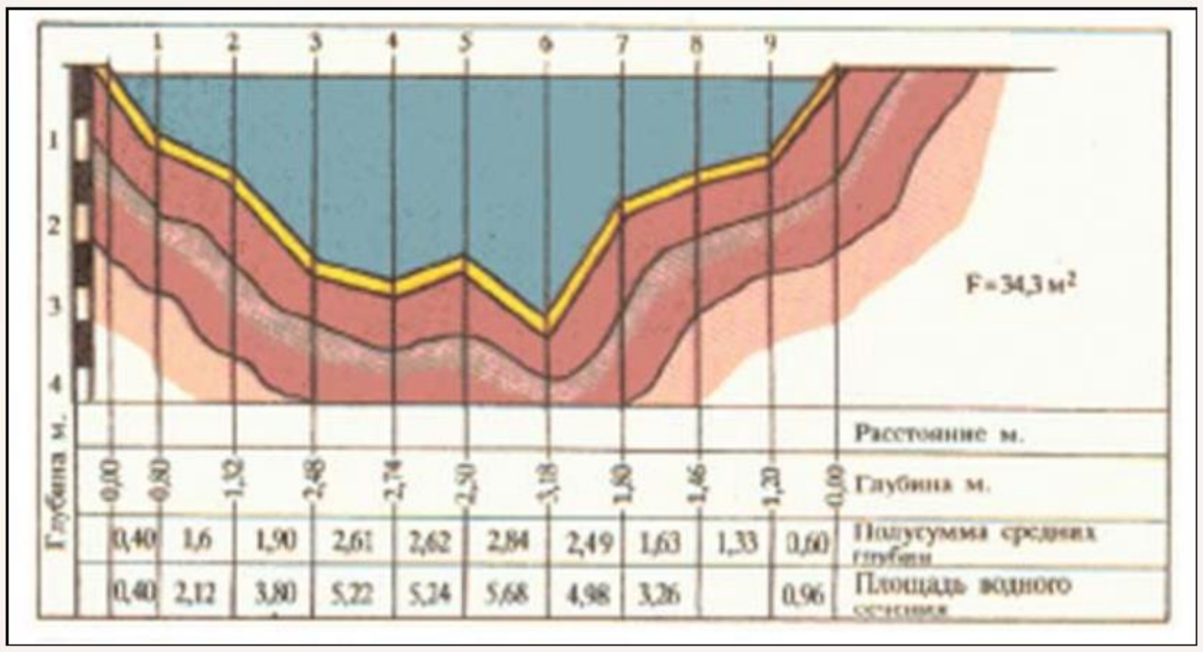


$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \Delta x_i = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2}$$

Погрешность равна $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$

Приближенное вычисление интегралов

Метод трапеций используется для вычисления расхода воды, т.е. количества воды, протекшее через поперечное сечение русла реки за единицу времени.



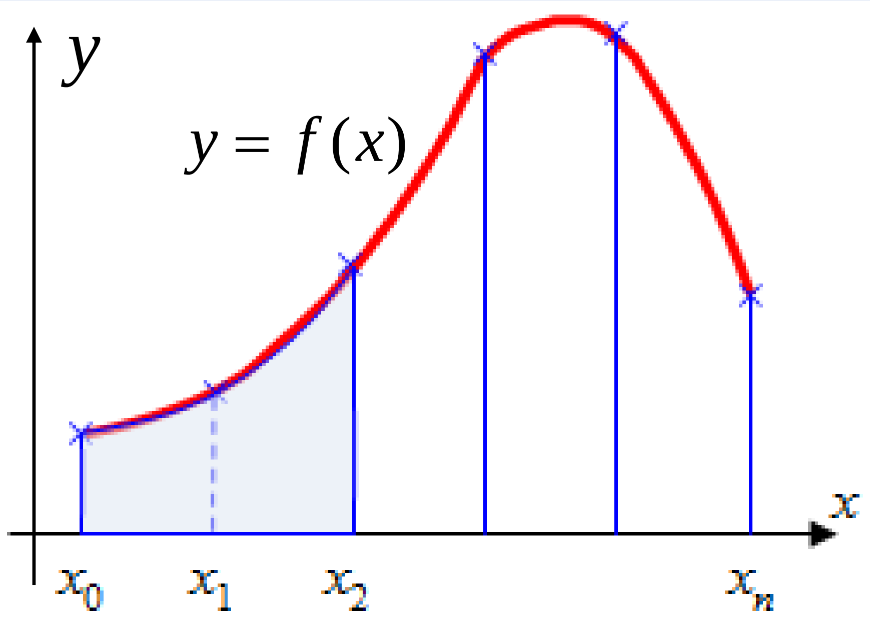
Изображение взято с [САЙТА]

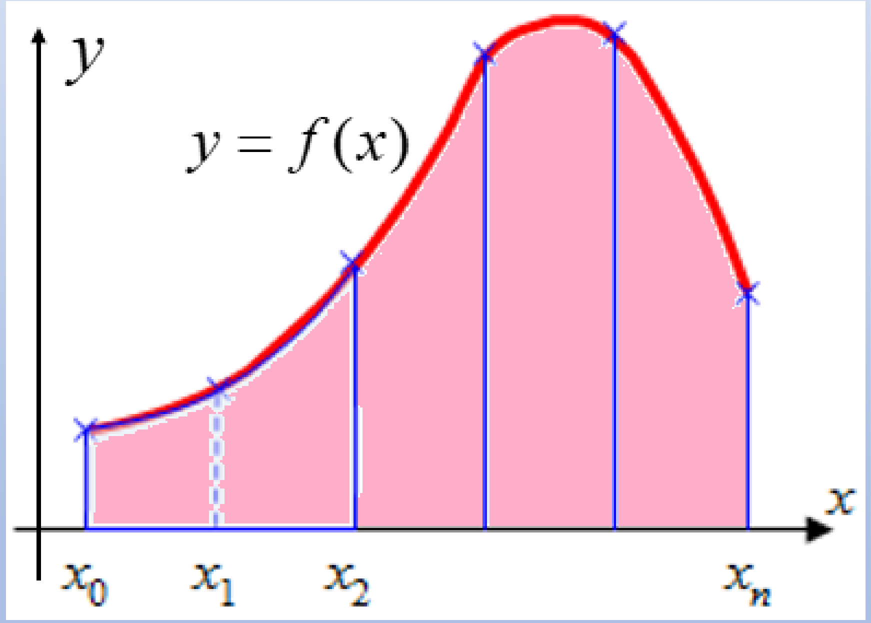
$$V = S \cdot v$$

Этот слайд можно не конспектировать

Приближенное вычисление интегралов

Метод парабол (метод Симпсона)





$$\int_a^b f(x)dx \approx ?\ (2\ \text{балла})$$

Погрешность равна $O\left(\dfrac{1}{n^4}\right)$

Лабораторная работа (на дополнительный балл)

- Вычислить интеграл $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$
- Точно.
- Методом правых прямоугольников для n=5, 10, 100 (1балл).
- Методом левых прямоугольников для n=5, 10, 100 (1балл).
- Методом средних прямоугольников для n=5, 10, 100 (1балл).
- Методом трапеций для n=5, 10, 100 (1балл).
- Методом парабол для n=5, 10, 100 (2балла).