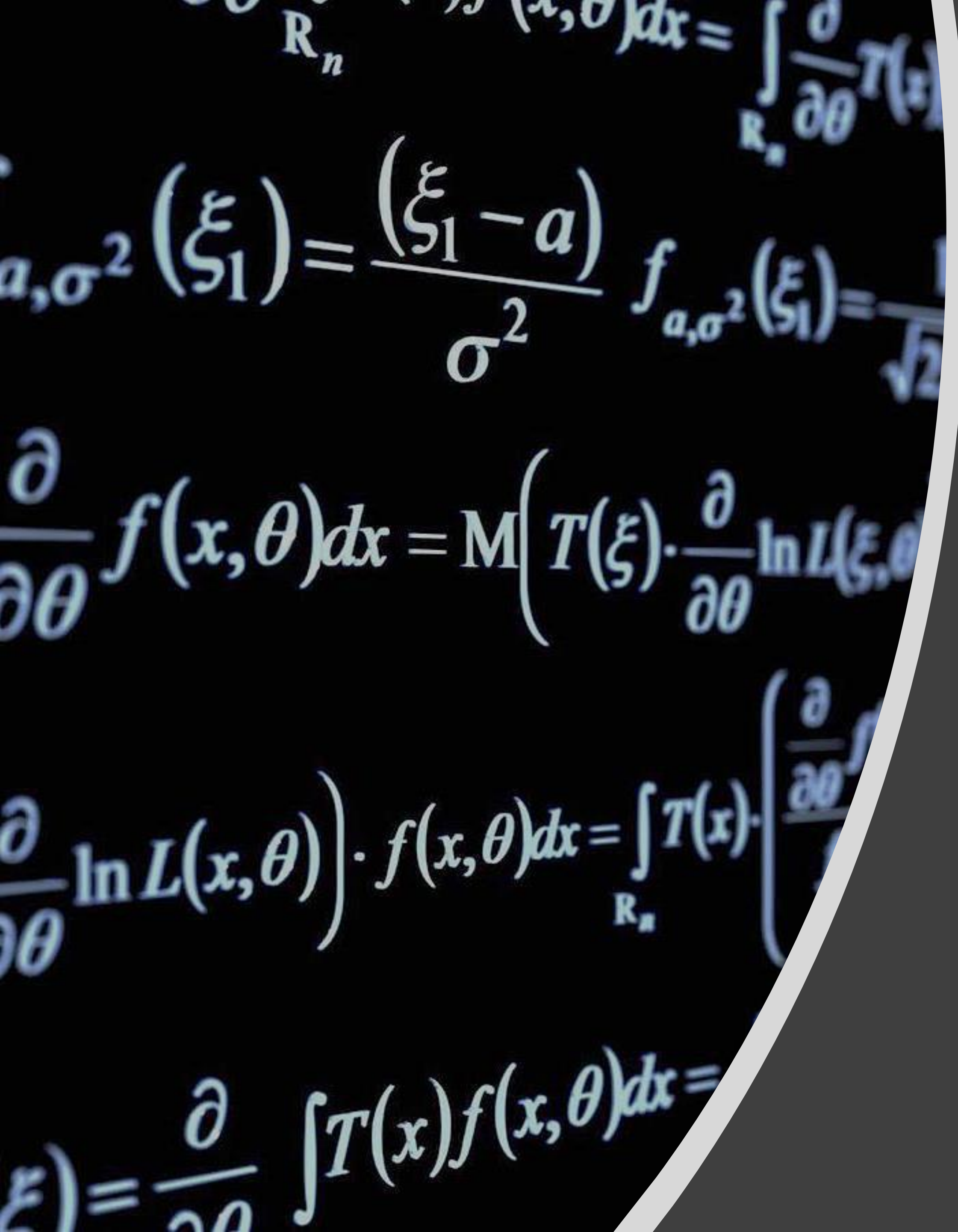


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 12
Математический анализ
Непрерывность на множестве. Точки разрыва

Определение точки разрыва функции

Опр. Точка, в которой функция не является непрерывной, называется точкой разрыва.

Для того, чтобы подробнее изучить (классифицировать) точки разрыва, введем понятие односторонних пределов функции в точке.

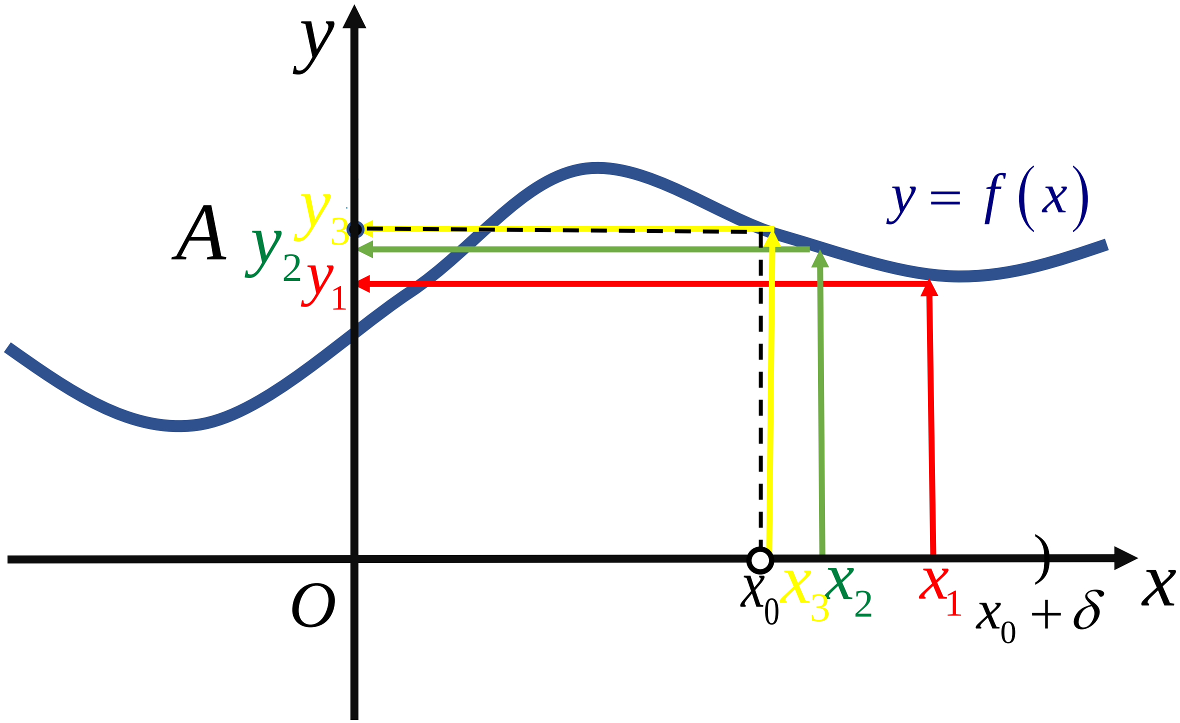
Определение односторонних пределов функции

Пусть функция $f(x)$ определена в правой выколотой δ-окрестности $(x_0; x_0 + \delta)$ точки $x = x_0$.

Опр. (по Гейне)

Пределом функции $f(x)$ в точке x_0 справа называется число A, такое, что для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_0 < x_n < x_0 + \delta$, предел которой равен x_0 (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

Определение односторонних пределов функции



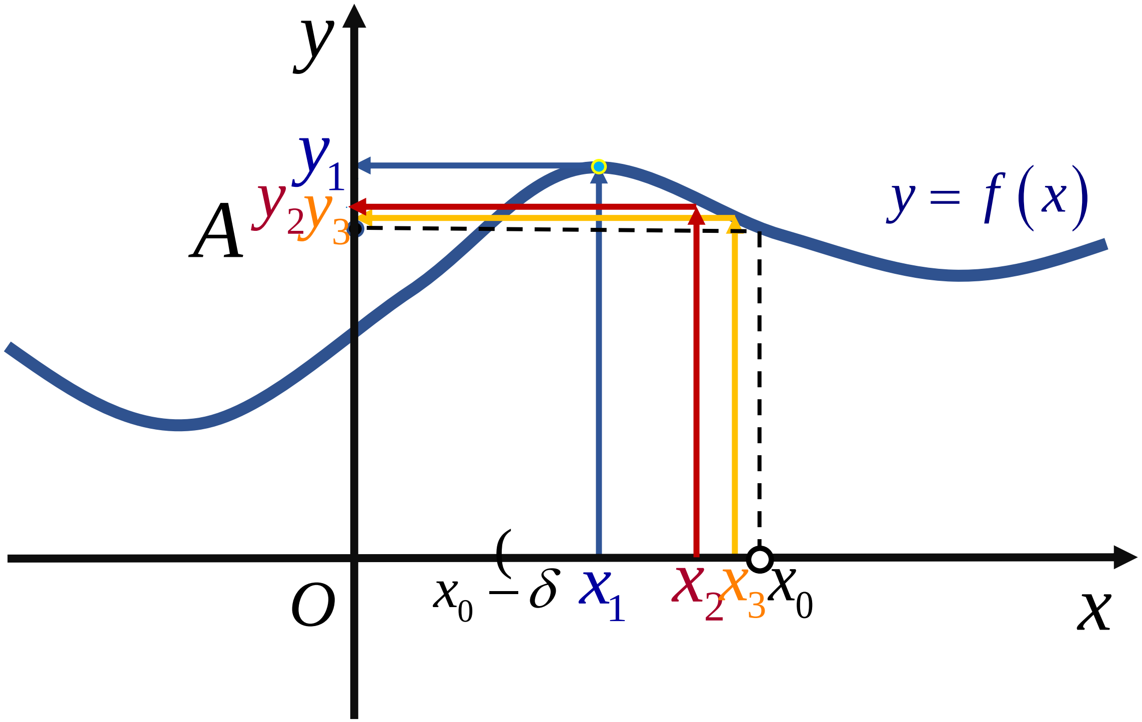
Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) = A, \quad \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$

Определение односторонних пределов функции

Опр. предела функции $f(x)$ в точке x_0 слева аналогично (самост.)

Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$.

Определение предела функции



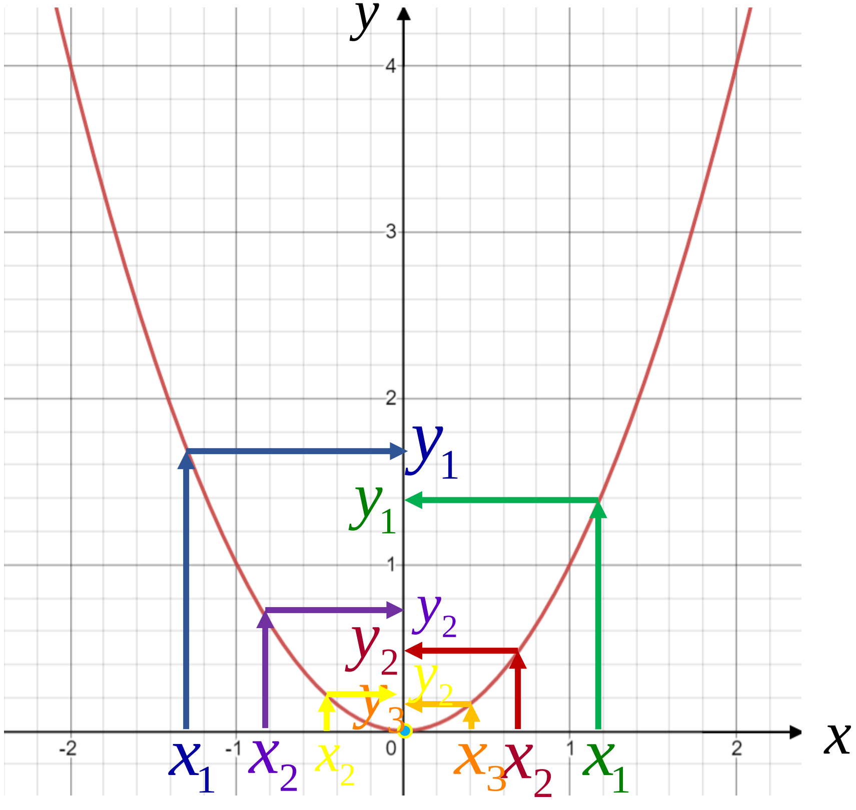
Обозначение: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x) = A, \quad \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A.$

Определение односторонних пределов функции

<u>Пример 1.</u> Пусть $f(x) = x^2$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2 = 0$$



Определение односторонних пределов функции

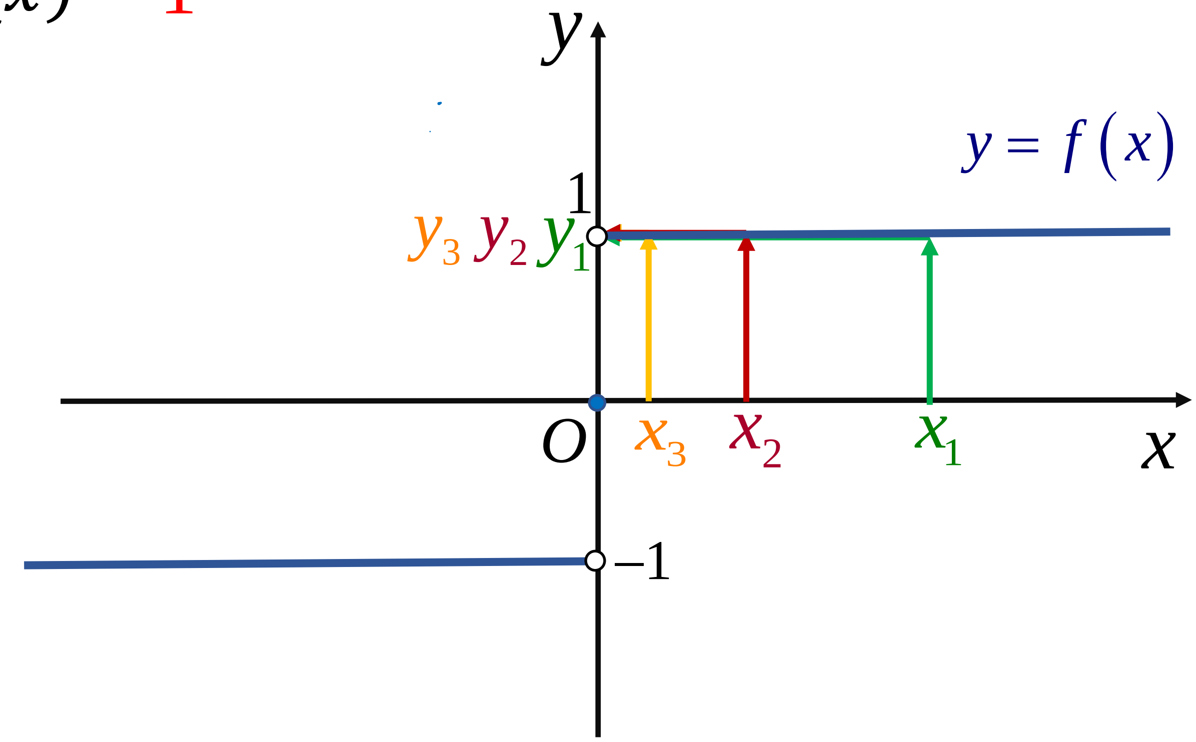
<u>Пример 2.</u> Пусть $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0. \end{cases}$

Тогда $f(x) = \begin{cases} 1, \ \text{если } x > 0, \\ -1, \ \text{если } x < 0, \\ 0, \ \text{если } x = 0 \end{cases}$ $\left[|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0, \\ -x, \text{если } x = 0 \end{cases} \right]$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 = 1$ $\quad \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} (-1) = -1$

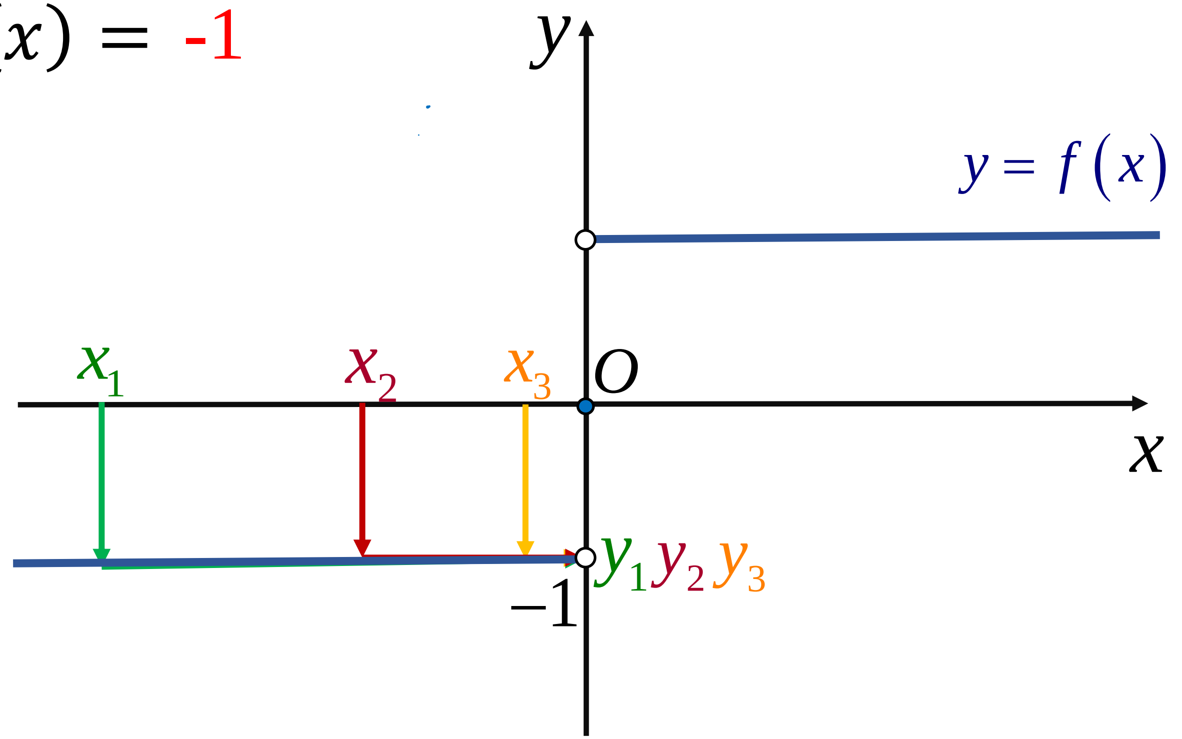
Определение односторонних пределов функции

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$$



Определение односторонних пределов функции

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = -1$$



Определение односторонних пределов функции

<u>Замечание</u>. Значение A может быть $\infty, +\infty, -\infty$.

<u>Пример 3.</u> Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0. \end{cases}$

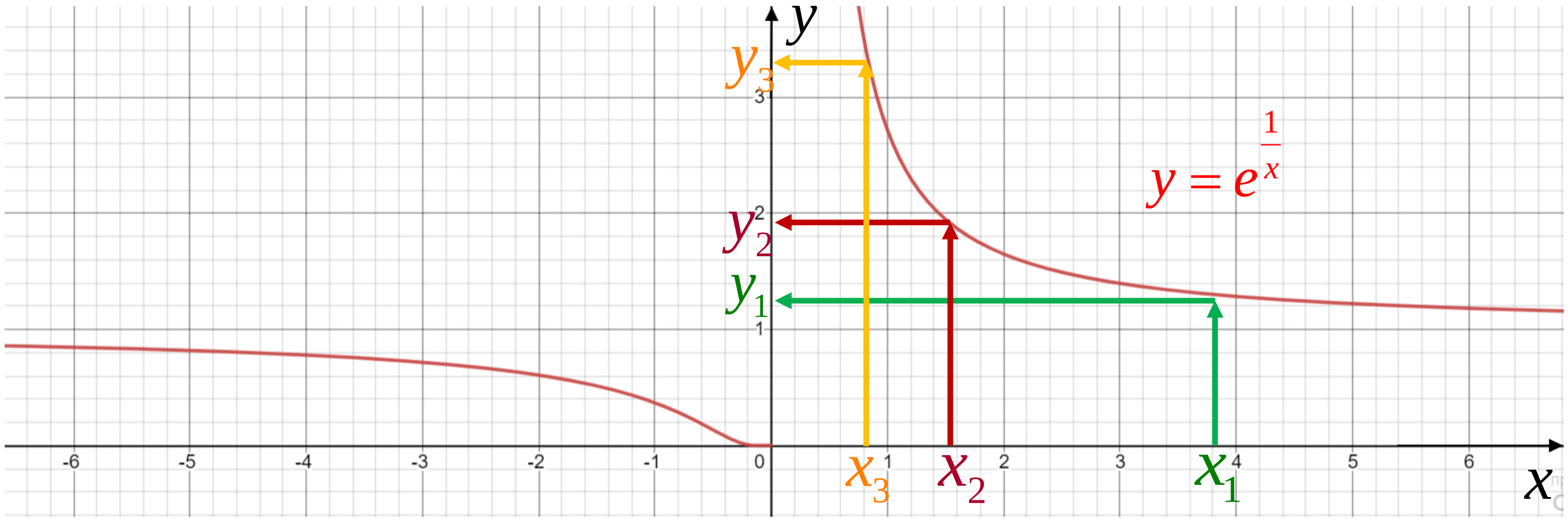
$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^{\frac{1}{+0}}\right] = \left[e^{+\infty}\right] = +\infty$$

Определение односторонних пределов функции

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^{\frac{1}{x}} = \left[e^{\frac{1}{-0}}\right] = \left[e^{-\infty}\right] =$$

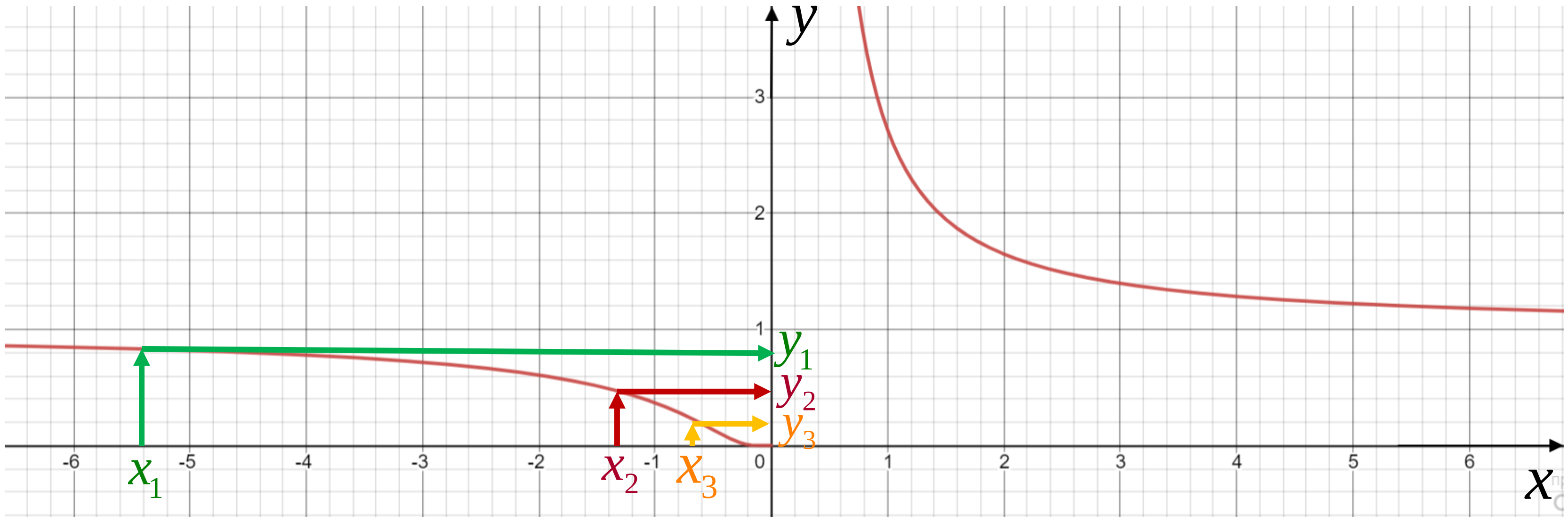
$$= \left[\frac{1}{e^{+\infty}}\right] = \left[\frac{1}{+\infty}\right] = 0$$

Определение односторонних пределов функции



$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} e^{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Определение односторонних пределов функции



$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} e^{\frac{1}{x}} = 0$$

Теорема о равенстве односторонних пределов

Теорема 1 (о равенстве левого и правого предела). Конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда существуют конечные односторонние пределы

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x)$ и $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$, и они равны.

При этом $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x)$

Теорема о равенстве односторонних пределов

Пример 5.

Для $f(x) = x^2$ существуют конечные

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = 0, \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2 = 0$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2 = 0 \Rightarrow \text{ существует конечный}$$

$$\lim_{x\to 0} x^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2 = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} x^2 = 0$$

Определение функции, непрерывной в точке (более подробно)

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.
Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

1) $f(x)$ определена в точке $x = x_0$;

2) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;

3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Точки разрыва функции классифицируются в зависимости от нарушения какого-либо условий (1)-(3).

Определение точки устранимого разрыва

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$, за исключением, возможно, самой точки $x = x_0$.

Точка $x = x_0$ называется точкой устранимого разрыва функции $f(x)$, если

- существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$,
- функция $f(x)$ либо не определена в точке $x = x_0$,
- либо определена, но $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

Определение точки устранимого разрыва

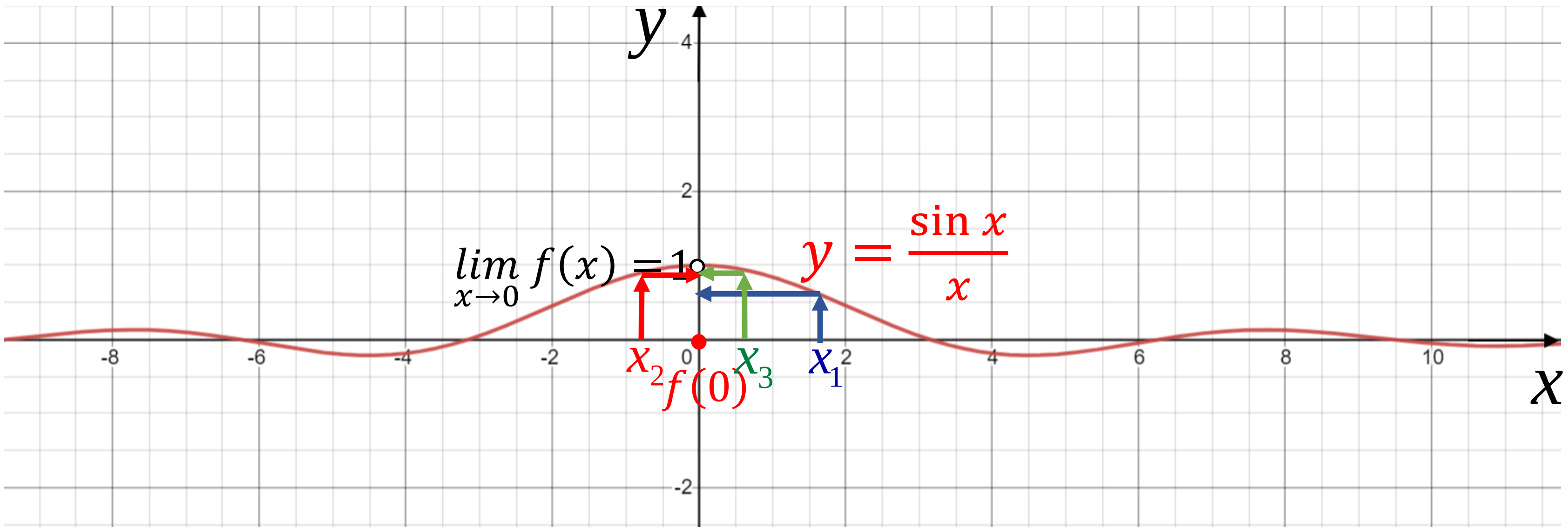
<u>Пример 6.</u> Исследовать на непрерывность в точке $x = 0$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0. \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad f(0) = 0$$

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) \neq f(0) \Rightarrow x = 0 -$ точка устранимого разрыва функции $f(x)$.

Теорема о равенстве односторонних пределов



Определение точки (неустранимого) разрыва I-го рода

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$, за исключением, возможно, самой точки $x = x_0$.

Точка $x = x_0$ называется точкой (неустранимого) разрыва I-го рода функции $f(x)$, если

· существуют конечные пределы

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x), \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x),$$

· но они не равны.

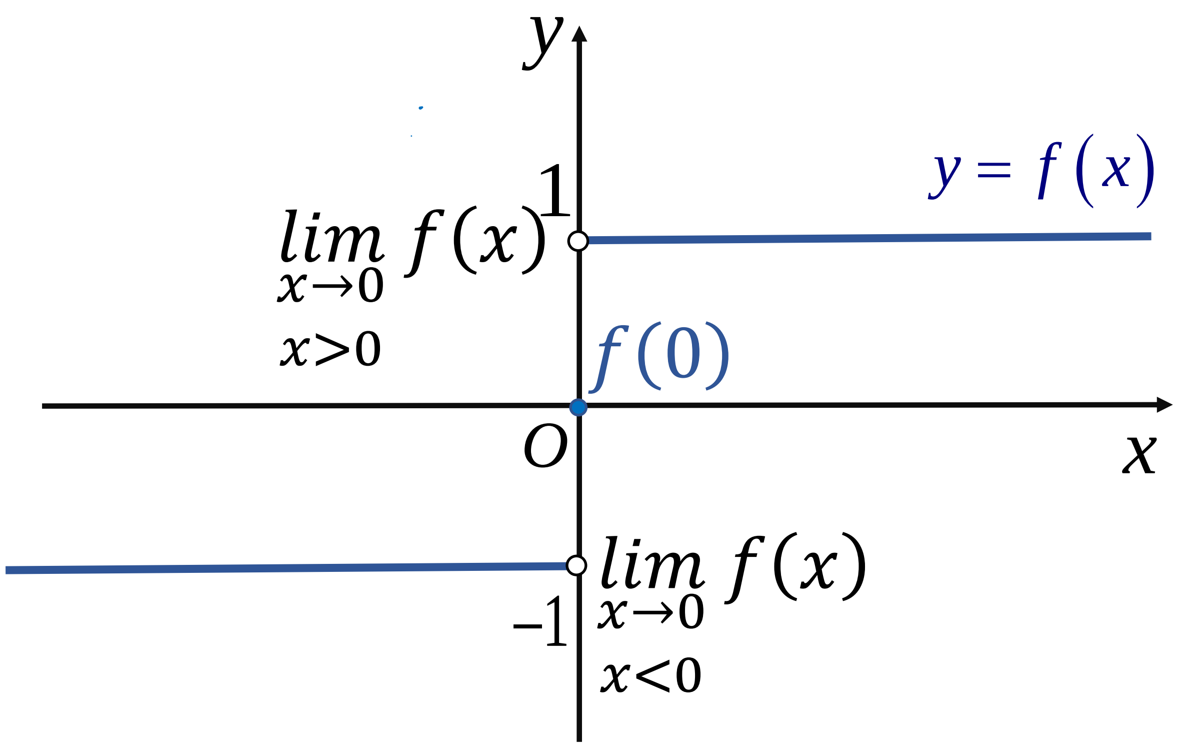
Определение точки (неустранимого) разрыва I-го рода

<u>Пример 7.</u> Пусть $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0. \end{cases}$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = 1 \qquad \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) = -1$$

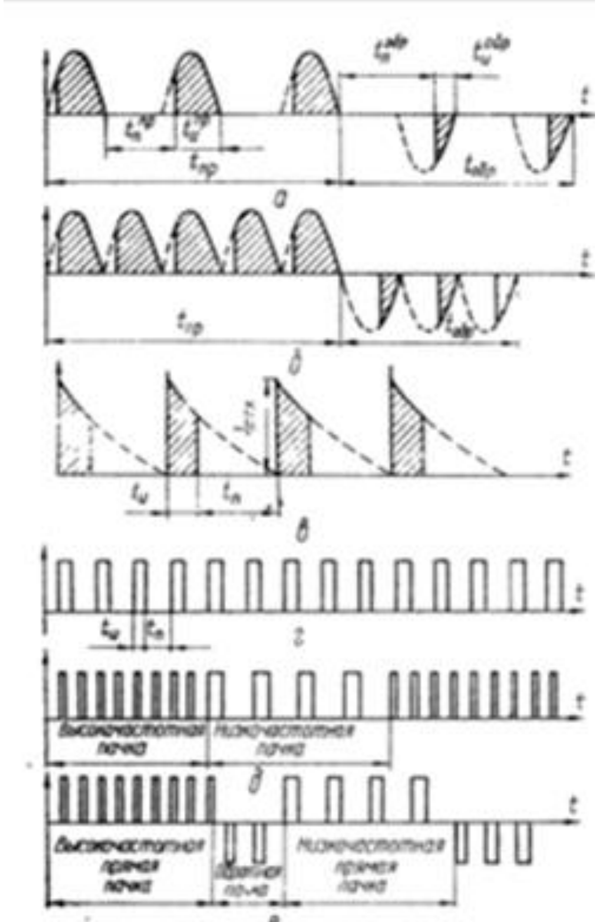
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} f(x) \Rightarrow x = 0 \,-\,$ точка разрыва I рода функции $f(x)$.

Определение точки (неустранимого) разрыва I-го рода



Пример из химии точки разрыва функции I рода

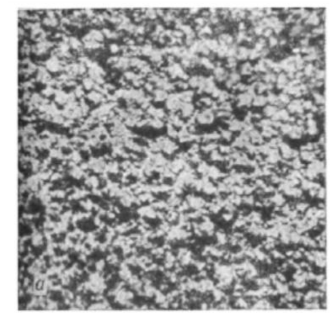
Импульсный электролиз / Костин Н. А., Кублановский В. С., Заблудовский А. В.; Отв. ред. А. В. Городыский; АН УССР. Ин-т общ. и неорган. химии.— Киев : Наук. думка, 1989.—168 с.— ISBN 5-12-000754-6.



Некоторые формы импульсного поляризующего тока $I(t)$

Функция $I(\mathbf{t})$ имеет бесконечное число точек разрывов I-го рода

Микрофотографии рельефа поверхности осадков, полученных при электролизе током



постоянным

импульсным

Этот слайд не конспектировать не надо

Определение точки (неустранимого) разрыва II-го рода

Опр. Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$, за исключением, возможно, самой точки $x = x_0$.

Точка $x = x_0$ называется точкой (неустранимого) разрыва II-го рода функции $f(x)$, если

· не существуют конечного предела $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} f(x)$;

· или не существует конечного предела $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}} f(x)$

Определение точки (неустранимого) разрыва II-го рода

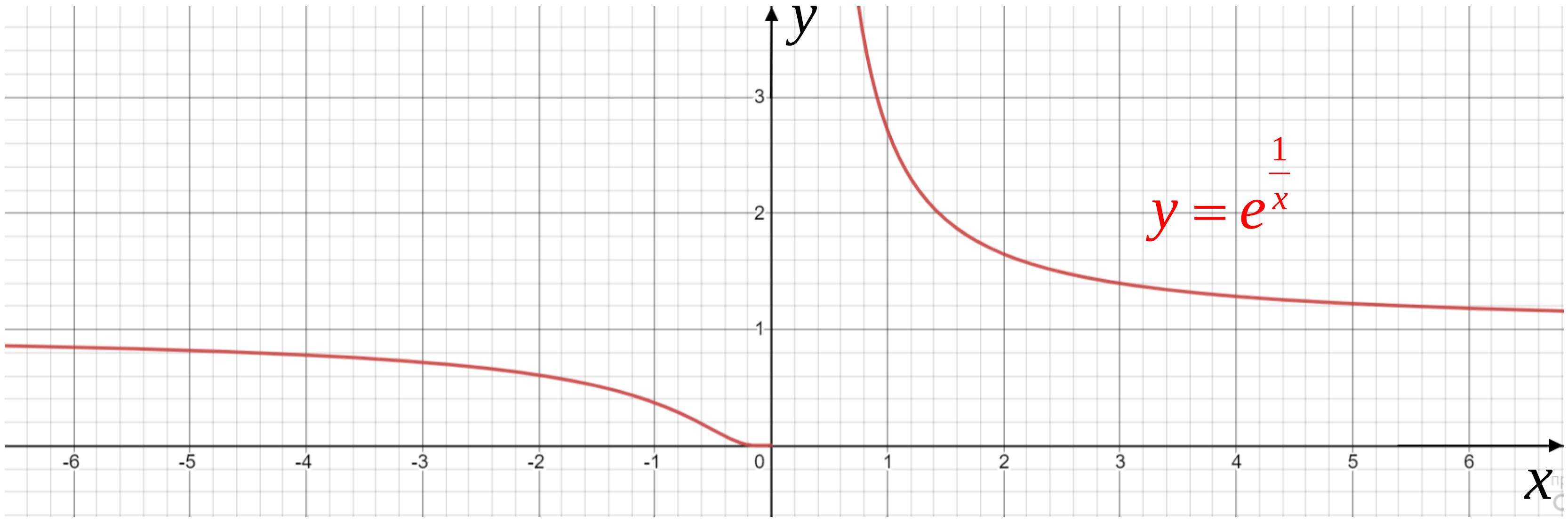
Пример 8. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, \text{если } x \neq 0, \\ 0, \text{если } x = 0. \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

Не существует конечного $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x)$.

$\Rightarrow x = 0 -$ точка ого разрыва II рода функции $f(x)$.

Определение точки (неустранимого) разрыва II-го рода



$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$$

Пример из химии точки разрыва функции II рода

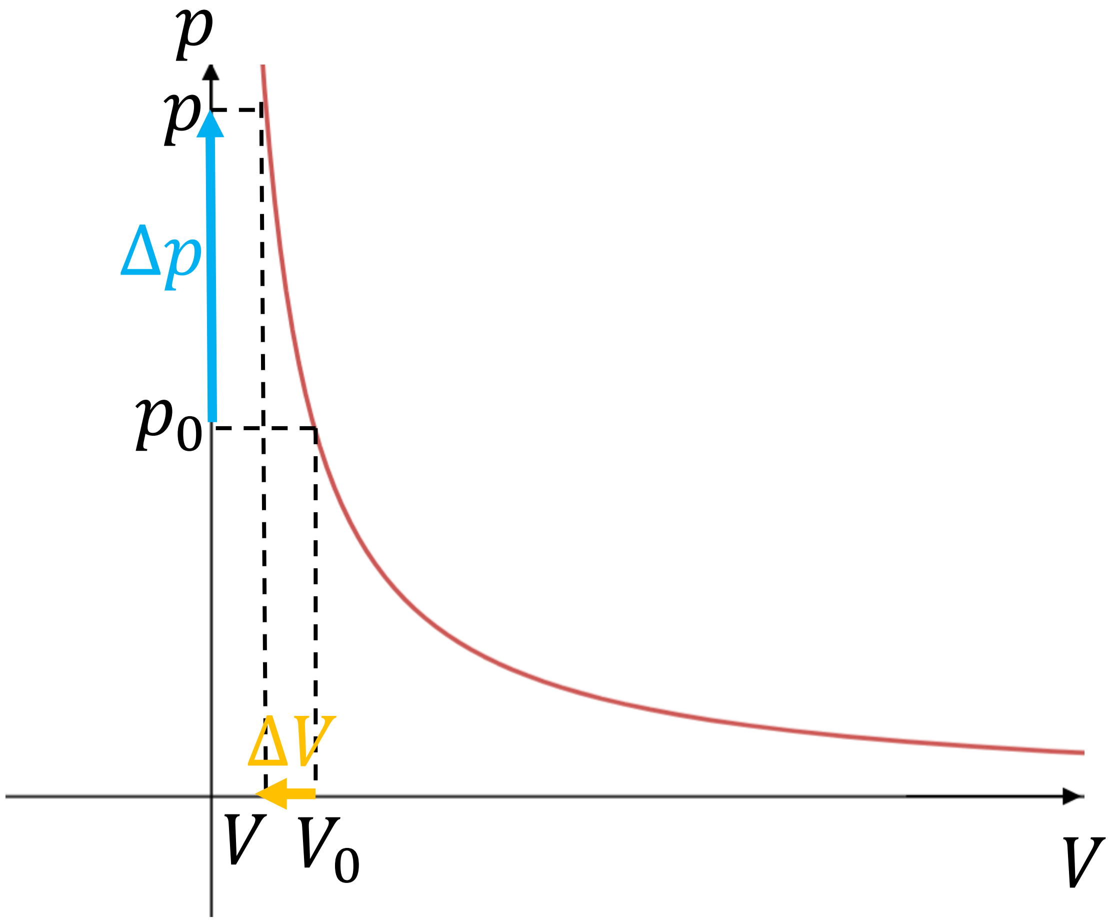
По закону Менделеева-Клапейрона давление идеального газа при const температуре равно

$p = p(V) = \frac{c}{V}$, где $c = \frac{m}{M} RT$

$$\lim_{\substack{V \to 0 \\ V > 0}} p(V) = \lim_{\substack{V \to 0 \\ V > 0}} \frac{c}{V} = +\infty$$

Это значит, что если объем очень маленький, то даже при небольшом уменьшении объема при постоянной температуре давление идеального газа на стенки сосуда резко увеличивается (взрыв).

Определение предела функции в точке через приращения



Исследовать на непрерывность функцию

Задача. Исследовать на непрерывность функцию $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{|x|}, \text{если } x \neq 0, \\ 1, \text{если } x = 0. \end{cases}$

$$\left[|x| = \begin{cases} x, \text{если } x \geq 0, \\ -x, \text{если } x = 0 \end{cases} \right]$$

Заметим, что $f(x) = \begin{cases} x, \ \text{если } x > 0, \\ -x, \ \text{если } x < 0, \\ 1, \ \text{если } x = 0 \end{cases}$

Исследовать на непрерывность функцию

Решение.

1) Пусть $x_0 > 0$.

Тогда существует $O(x_0) \subset (0; +\infty)$.

В $O(x_0)$ функция $f(x) = x$ и поэтому непрерывна

$$\Downarrow$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$.

2) Для случая $x_0 < 0$ аналогично.

$\Rightarrow$ функция $f(x)$ непрерывна для любого $x_0 \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Исследовать на непрерывность функцию

Решение. 3) Пусть $x_0 = 0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x = 0; \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} (-x) = 0$$

$\Rightarrow$ существует конечный

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 0$$

$f(0) = 1 \;\Rightarrow$ Функция $f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ устранимый разрыв.

Ответ: функция $f(x)$ непрерывна для любого $x_0 \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Исследование функции на непрерывность

Алгоритм исследования функции на непрерывность

Исследование функции $f(x)$ на непрерывность

1) Находим особые точки $x_0 \in D(f)$ функции $f(x)$

2) Пробуем найти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

- удалось найти конечный $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
  - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ $\Downarrow$ функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0
  - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ $\Downarrow$ x_0 – точка устранимого разрыва
- доказали, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ $\Downarrow$ x_0 – точка разрыва II рода
- 3) Пробуем найти $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

  см. след. слайд

3) Пробуем найти $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

Существуют конечные $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

Не существует конечного $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x)$ или $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

$\Downarrow$

x_0 – точка разрыва II рода

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$

$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \neq \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x)$ $\Rightarrow$ x_0 – точка разрыва I рода

$\Downarrow$

существует конечный $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

$\Downarrow$

x_0 – точка устранимого разрыва

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\Downarrow$

функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0

во всех других (не *особых*) точках $x \in D(f)$ функция $f(x)$ непрерывна