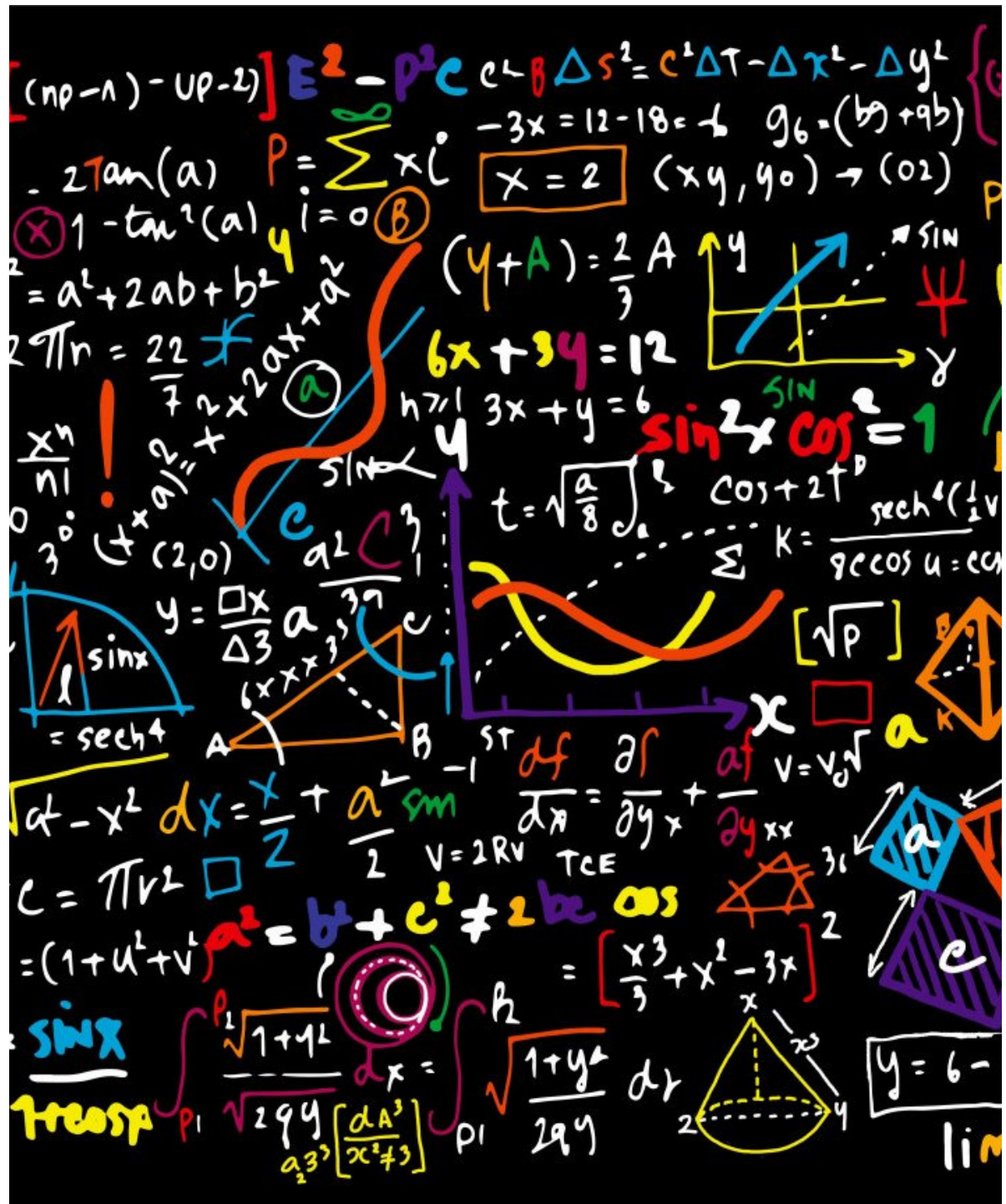




Лекция 11

Знакопеременные ряды

1. Знакочередующиеся ряды.
2. Признак Лейбница.
3. Приближенное вычисление суммы знакочередующегося ряда.
4. Абсолютная и условная сходимость знакочередующихся рядов.
5. Алгоритм исследования ряда на абсолютную и условную сходимость.

Определение знакопеременных рядов

Опр. Ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \dots + (-1)^{n+1} b_n + \dots$$

$$b_n > 0$$

называется **знакопеременным**.

Признак Лейбница

Теорема 1 (признак Лейбница).

Пусть

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \dots + (-1)^{n+1} b_n + \dots$$

- знакочередующийся ряд и

1) $b_n > 0$;

2) $b_1 > b_2 > b_3 > \dots > b_n > \dots (b_n \downarrow)$;

3) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 (b_n \rightarrow 0)$.

Признак Лейбница

Тогда

а) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ **сходится**;

б) сумма ряда $S > 0$;

в) $S < b_1$.

Признак Лейбница. Доказательство

Доказательство.

Обозначим через $\{S_n\}$ последовательность частичных сумм ряда (1). Тогда

$$S_{2m} = b_1 - b_2 + b_3 - \dots + b_{2m-1} - b_{2m}$$

$$S_{2m} = \underbrace{(b_1 - b_2)}_{> 0} + \underbrace{(b_3 - b_4)}_{> 0} \dots + \underbrace{(b_{2m-1} - b_{2m})}_{> 0}$$

$\Downarrow$

$$S_{2m} > 0$$

Признак Лейбница. Доказательство

$$S_{2m} = \underbrace{(b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) \dots + (b_{2m-1} - b_{2m})}_{S_{2m-2}} > 0$$

$\Downarrow$

$$S_{2m} > S_{2m-2}$$

т.е. подпоследовательность $\{S_{2m}\}$

последовательности $\{S_n\}$ возрастает

$$\boxed{S_{2m} \uparrow}$$

Признак Лейбница. Доказательство

$$S_{2m+1} = b_1 - b_2 + b_3 - \dots + b_{2m-1} - b_{2m} + b_{2m+1}$$


$$S_{2m}$$

$\Downarrow$

$$S_{2m+1} = S_{2m} + b_{2m+1}$$

$$0 < S_{2m} < S_{2m+1}$$

Признак Лейбница. Доказательство

$$S_{2m+1} = b_1 - \underset{>0}{(b_2 - b_3)} - \dots - \underset{>0}{(b_{2m} - b_{2m+1})};$$



$$S_{2m+1} < b_1$$

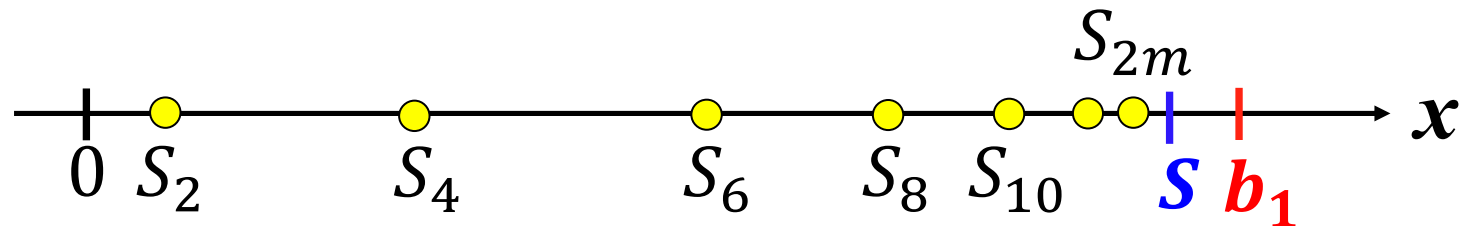


$$0 < S_{2m} < S_{2m+1} < b_1$$

Признак Лейбница. Доказательство

$S_{2m} \uparrow$
 $0 < S_{2m} < b_1 \Big| \Rightarrow$ Последовательность $\{S_{2m}\} \Rightarrow$
возрастает и ограничена

существует конечный предел $S = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m}$
и $0 < S < b_1$



Признак Лейбница. Доказательство

$$S_{2m+1} = S_{2m} + b_{2m+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} + \lim_{m \rightarrow \infty} b_{2m+1} = S + 0 = S$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = \lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m+1} = S \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \text{ и } 0 < S < b_1 \blacksquare$$

Признак Лейбница. Задача 1

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

Решение.

Ряд является знакочередующимся.

Поэтому применим **признак Лейбница**.

Признак Лейбница. Задача 1

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow b_n = |u_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n, \quad b_n = \frac{1}{n}, \quad b_n > 0;$$

$$2) b_n \downarrow$$

$$3) b_n \rightarrow 0$$

Ответ: ряд **сходится** по признаку Лейбница.

Признак Лейбница

Замечание 1: Теорема 1 справедлива и в случае, когда условие (2) выполняется, начиная с некоторого номера n .

Замечание 2: Утверждение (в) теоремы 1 используется для **оценки остатка** знакочередующегося ряда,

т.е. **оценки погрешности приближения суммы ряда** **частичной суммой** этого ряда.

Приближенное вычисление суммы знакопередающего ряда

Сумма знакопередающего ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \dots + (-1)^{n+1} b_n \dots$$

$$(b_n > 0)$$

равна

$$S = S_n + R_n$$

Приближенное вычисление суммы знакопередающегося ряда

$$S_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} b_k = b_1 - b_2 + b_3 - \dots + (-1)^{n+1} b_n$$

- частичная сумма;

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^{k+1} b_k = (-1)^{n+2} (b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+3} - \dots)$$

- остаток ряда, т.е. погрешность приближения

$$S \approx S_n$$

Оценка остатка знакочередующегося ряда

Теорема 2. Если R_n — остаток
знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n = b_1 - b_2 + b_3 - \dots + (-1)^{n+1} b_n + \\ + (-1)^{n+2} b_{n+1} + \dots, \quad (b_n > 0),$$

то

$$|R_n| < b_{n+1}$$

(модуль остатка знакочередующегося ряда
меньше модуля **первого отбрасываемого члена**).

Оценка остатка знакочередующегося ряда

Доказательство

Будем для простоты считать, что n – четное.

Тогда $R_n = b_{n+1} - b_{n+2} + b_{n+3} - \dots$ –
знакочередующийся ряд;

Его сумма R_n по утвержд. (в) теоремы 1 меньше
первого члена b_{n+1} .

Т.о. $|R_n| < b_{n+1}$.

Для нечетного n – упр. ■

Приближенное вычисление суммы знакочередующегося ряда. Задача 2

Задача 2. Вычислить сумму ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \dots$$

с точностью $\varepsilon = 0,1$.

Решение. Это знакочередующийся ряд.

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \Rightarrow b_n = |u_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

Приближенное вычисление суммы знакочередующегося ряда. Задача 2

Выполняются условия (1)-(3) теоремы 1.

$\Rightarrow$ ряд сходится по признаку Лейбница.

$$b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} \Rightarrow |R_n| < b_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < \varepsilon \leq 0,1$$

$$\Rightarrow (n+1)^2 > 10 \Rightarrow n > \sqrt{10} - 1 \Rightarrow n > 2$$

$$S = S_3 + R_3, \quad S \approx S_3, \quad R_3 < 0.1 \Rightarrow$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} \approx 0,9 \quad \underline{\text{Ответ:}} \quad S \approx 0,9 \pm 0,1.$$

Приближенное вычисление суммы знакопередающего ряда Лабораторная работа (упр.)

1. Вычислить сумму S ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

с точностью $\varepsilon_1 = 0,1$; $\varepsilon_2 = 0,01$.

2. Соотнести с точным значением $S = \ln 2$.

Абсолютная и условная сходимость

Опр. Если для **знакопеременного** ряда

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

ряд из модулей

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

сходится, то говорят, исходный ряд (1)
абсолютно сходится.

Абсолютная и условная сходимость

Теорема 3. Если ряд (2) сходится, то ряд (1) тоже сходится.

Т.е. если ряд **сходится абсолютно**, то он просто **сходится**.

Без док-ва.

Абсолютная и условная сходимость

Опр. Если знакопеременный ряд

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

сходится, а ряд из модулей

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = |u_1| + |u_2| + \dots + |u_n| + \dots$$

расходится, то говорят, что исходный ряд (1)
сходится условно.

Абсолютная и условная сходимость

Задача 3

Задача 3. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} + \dots$$

Решение.

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \Rightarrow |u_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2}$$

Абсолютная и условная сходимость

Задача 4

Ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

сходится как гармонический ряд $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha = 2\right)$.

Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Ответ: **абсолютно сходится.**

Абсолютная и условная сходимость

Задача 4

Задача 4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \dots$$

Решение.

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \Rightarrow |u_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

Абсолютная и условная сходимость

Задача 4

Ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

расходится, а исходный ряд сходится по признаку Лейбница (см. задачу 1).

Значит, исходный ряд сходится условно.

Ответ: **сходится условно.**

Алгоритм исследования на абсолютную и условную сходимость

Для решения задач удобно использовать

Алгоритм исследования знакопеременного
ряда на абсолютную и условную сходимость

(см. след. слайд; его можно не конспектировать)

Знакопередающий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

1) Находим $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0 \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0 \right)$$

↓

2) Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится
↓

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится
абсолютно

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ расходится

3) Исследуем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится
↓

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится
условно

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится
↓

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится

Абсолютная и условная сходимость

Задача 5

Задача 5. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{2n+1}}$$

Решение.

$$u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{2n+1}} \Rightarrow |u_n| = \left| \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt[3]{2n+1}} \right| = \frac{1}{n\sqrt[3]{2n+1}}$$

Абсолютная и условная сходимость

Задача 5

1) Найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{2n+1}} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0 \Rightarrow \text{сходимость возможна}$$

2) Исследуем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{2n+1}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{2n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \sqrt[3]{n}}$$

Абсолютная и условная сходимость

Задача 5

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[3]{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$ – сходится как гармонический ряд ($\alpha = \frac{4}{3}$)

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится

Ответ: **сходится абсолютно.**

Абсолютная и условная сходимость

Задача 6

Задача 6. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2}$$

Решение.

$$u_n = (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2} \Rightarrow |u_n| = \left| (-1)^{n+1} \frac{n}{n+2} \right| = \frac{n}{n+2}$$

Абсолютная и условная сходимость

Задача 6

1) Найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+2} = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n} \right] = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| \neq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ряд } \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ расходится.}$$

Ответ: ряд **расходится**.

Абсолютная и условная сходимость

Задача 7

Задача 7. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Решение.

$$u_n = (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \Rightarrow |u_n| = \left| (-1)^n \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \right| = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Абсолютная и условная сходимость

Задача 7

1) Найдем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} = \left[\frac{1}{\infty} \right] = 0 \Rightarrow \text{сходимость возможна}$$

2) Исследуем ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Абсолютная и условная сходимость

Задача 7

Применим интегральный признак Коши.
Проверим его условия.

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \Rightarrow$$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0; 2) u_n \downarrow; 3) f(n) = u_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}};$$

$$4) f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \text{ непрерывна, } f(x) > 0, f(x) \downarrow \\ \text{на } [2, +\infty];$$

Абсолютная и условная сходимость

Задача 7

Интеграл $\int_2^{+\infty} f(x) dx = \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx =$

$$= \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ x = 2 \rightarrow t = \ln 2 \\ x = +\infty \rightarrow t = +\infty \end{array} \right] =$$

Абсолютная и условная сходимость

Задача 7

$$= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = [\sqrt{+\infty} - \ln 2] = +\infty$$

Интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$ расходится $\Rightarrow$

ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$ расходится.

исходный ряд не сходится абсолютно.

Абсолютная и условная сходимость

Задача 7

3) Исследуем ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}}$$

3) Он знакочередующийся и поэтому применим **признак Лейбница**.

$$b_n = |u_n| = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Абсолютная и условная сходимость

Задача 7

Проверим условия признака Лейбница:

1) $b_n > 0$; 2) $b_n \downarrow$; 3) $b_n \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} u_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{\ln n}} \text{ сходится.}$$

Ответ: ряд **сходится условно**.