Лекция 11
Определенный интеграл (продолжение)

Курс **«Математика», I курс, II семестр**

ИЕНиМ, Департамент фундаментальной и прикладной химии

Лектор: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В., 2022г.

Использовались следующее учебные пособия

Высшая математика : учебное пособие / В. И. Белоусова, Г. М. Ермакова, М. М. Михалева, Н. В. Чуксина, И. А. Шестакова. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2017. — Ч. II. — 300 с.

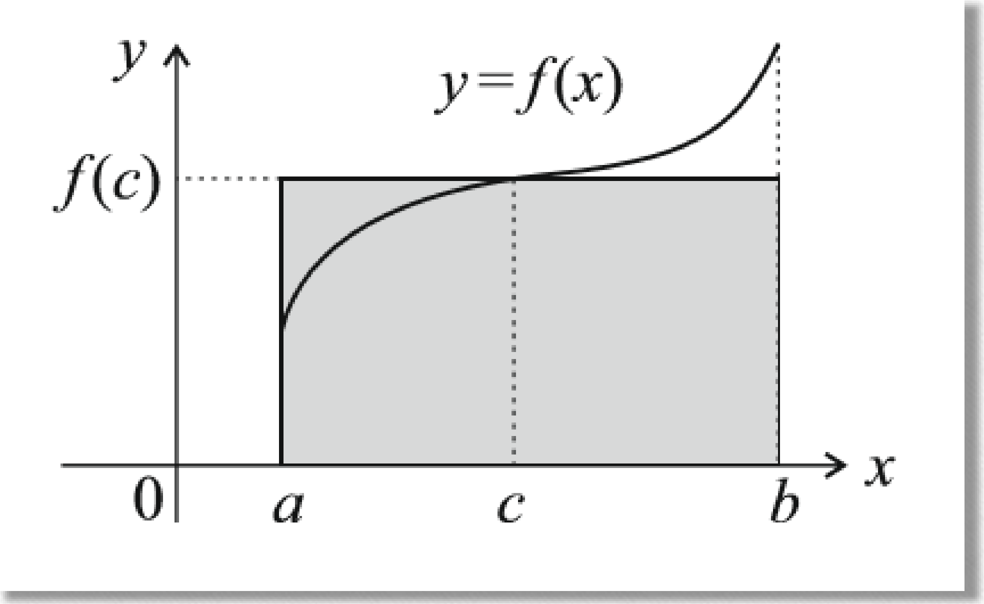
Трофимова, Е. А.
Математические методы анализа : [учеб. пособие] / Е. А. Трофимова, С. В. Плотников, Д. В. Гилёв ; [под общ. ред. Е. А. Трофимовой] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. — 272 с.

Теорема о среднем

Теорема 3. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует такая точка $c \in [a,b]$ что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

Геометрический смысл теоремы о среднем



Площадь под графиком функции $y = f(x)$ равна площади прямоугольника с основанием $b - a$ и высотой $f(c)$.

Теорема о среднем

Доказательство.

Пусть m и M – ее наименьшее и наибольшее значения на $[a,b]$.

Из оценки (3) имеем

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

Теорема о среднем

Пусть $C = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$

По условию функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$

и $m \le f(x) \le M$ для любого $x \in [a, b]$.

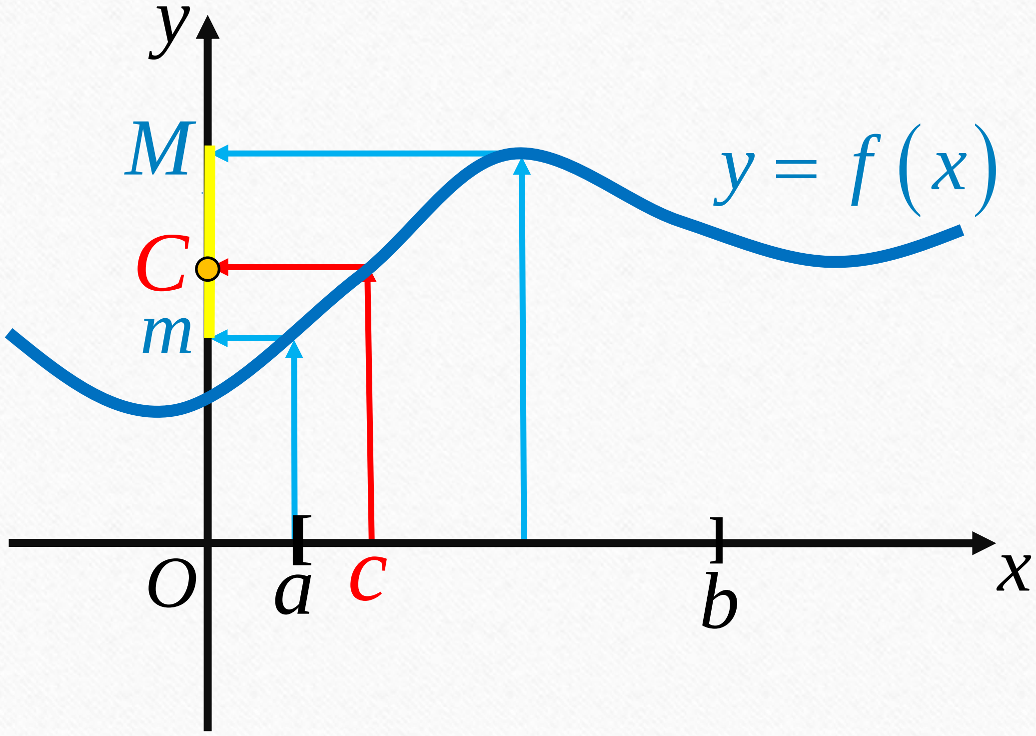
Кроме того, $m \le C \le M$

Теорема о среднем

По теореме Больцано-Коши о промежуточном значении непрерывной функции существует такая точка $c \in [a, b]$, что $C = f(c)$

$$\Rightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c) \quad \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a) \ \blacksquare$$

Теорема о среднем



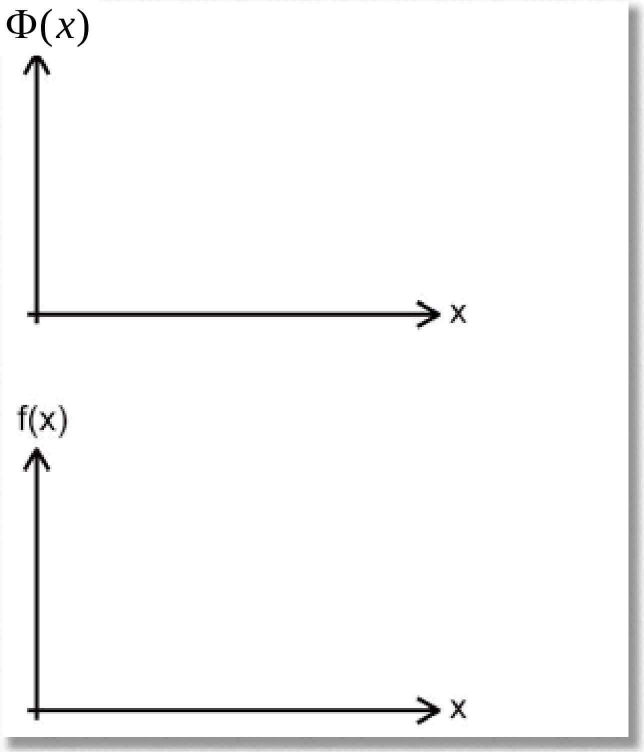
Интеграл с переменным верхним пределом

Опр. Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то она интегрируема и на $[a, x]$, где $x \in [a, b]$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Она называется **интегралом с переменным верхним пределом**.

Геометрическая иллюстрация интеграла с переменным верхним пределом



Она называется **интегралом с переменным верхним пределом**

$$\Phi(x) = \int_{a}^{x} f(t)dt.$$

Анимационный файл взят на [САЙТЕ]

Теорема об интеграле с переменным верхним пределом

Теорема. Непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ имеет на этом отрезке первообразную. Одной из первообразных является интеграл с переменным верхним пределом $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Теорема об интеграле с переменным верхним пределом

Доказательство.

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_x^a f(t)dt = \int_x^a f(t)dt + \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \ \blacksquare$$

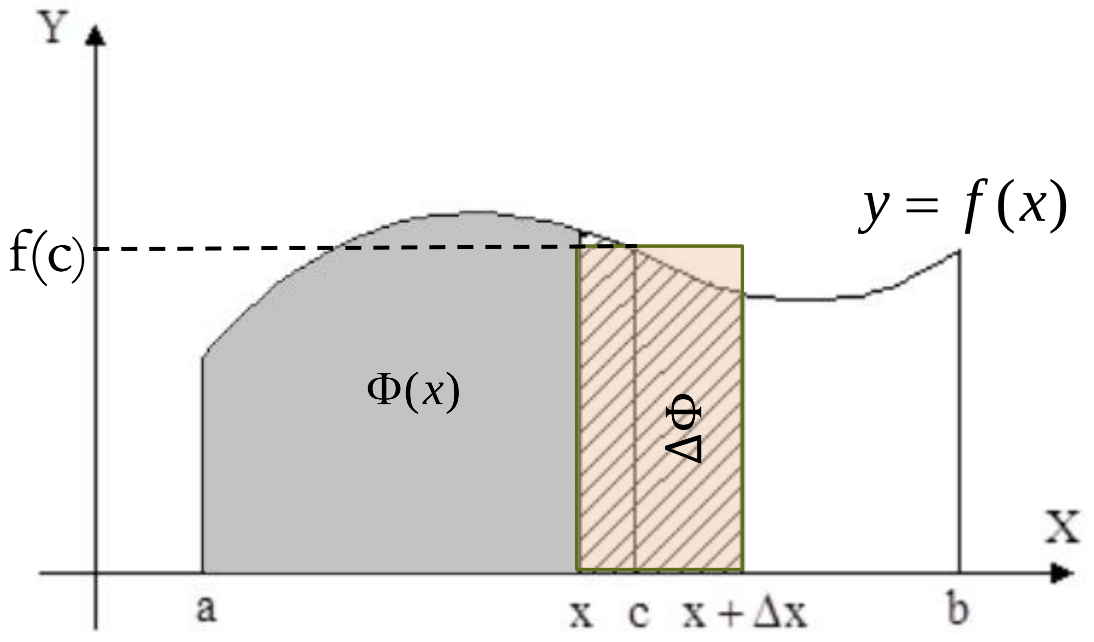
Теорема об интеграле с переменным верхним пределом

Используем теорему о среднем:

$$\Delta\Phi = \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)((x+\Delta x)-x) = f(c)\Delta x$$

для некоторого $c \in [x, x+\Delta x]$.

Геометрическая иллюстрация доказательства теоремы об интеграле с переменным верхним пределом



$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x)$$

$$\Delta\Phi = f(c)\Delta x$$

Теорема об интеграле с переменным верхним пределом

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c) =$$

$[c \in [x, x+\Delta x] \Rightarrow$ при $\Delta x \to 0$ точка $c \to x \ \Rightarrow \ f(c) \to f(x)]$

[из-за того, что функция $f(x)$ непрерывна]

$$= \lim_{c \to x} f(c) = f(x) \ \Rightarrow \Phi(x) \text{ – первообразная для } f(x) \, \blacksquare$$

Формула Ньютона-Лебница

Теорема (формула Ньютона-Лейбница). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

И $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$.

Тогда

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \left(\int f(x)dx\right)\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Формула Ньютона-Лейбница

Доказательство.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt + \int_a^a f(t)dt =$$

$$= \int_a^b f(t)dt - \int_a^a f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a)$$

Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$.

Но по теореме $\Phi(x)$ – тоже первообразная для функции $f(x)$.

Следовательно, по теореме 2 $\Phi(x) = F(x) + C$.

Формула Ньютона-Лейбница

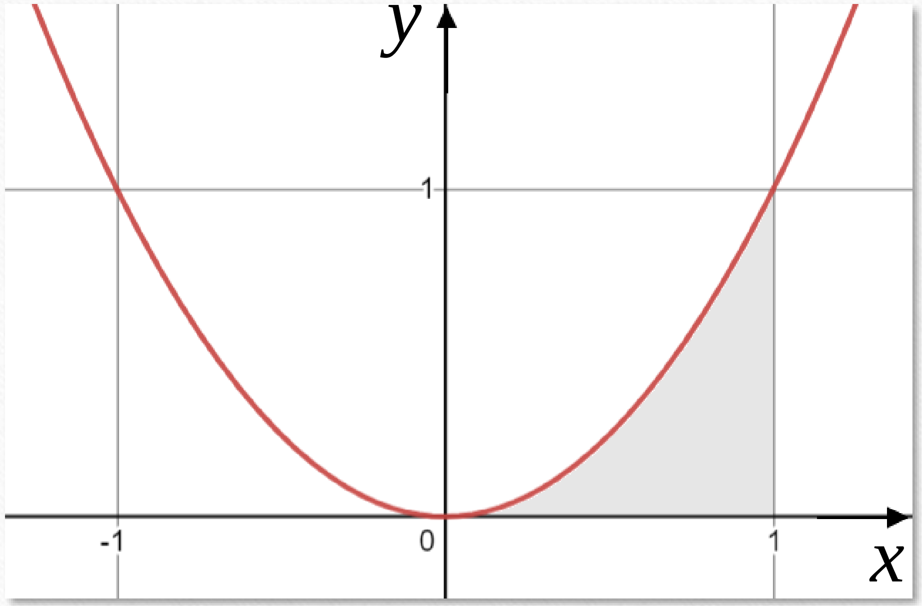
$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = \Phi(b) - \Phi(a) =$$

$$= (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a) \;\blacksquare$$

Формула Ньютона-Лейбница
Пример 1

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$S = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$$



Формула замены переменной в определенном интеграле

- Теорема. Пусть 1) функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) функция $x=\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha,\beta]$;

3) функция $x=\varphi(t)$ отображает отрезок $[\alpha,\beta]$ на отрезок $[a,b]$;

4) $\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b.$

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx=\left[\begin{array}{l} x=\varphi(t),\, dx=\varphi'(t)dt \\ x=a\to t=\alpha \\ x=b\to t=\beta \end{array}\right]=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

Формула замены переменной в определенном интеграле

Пример 2

$$\int_0^1 e^{2x}\sqrt{e^{2x}+1}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{2x}+1 \Rightarrow du = u'dx = \left(e^{2x}+1\right)'dx = 2e^{2x}dx \\ du = 2e^{2x}dx \Rightarrow e^{2x}dx = \dfrac{du}{2} \end{array}\right] =$$

$x = 0 \to u = e^{2\cdot 0}+1 = 2$

$x = 1 \to u = e^{2\cdot 1}+1 = e^2+1$

К старой переменной не возвращаемся!

$$= \int_2^{e^2+1}\sqrt{u}\cdot\left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int_2^{e^2+1}\sqrt{u}\cdot du = \frac{1}{2}\int_2^{e^2+1}u^{\frac{1}{2}}du = \frac{1}{\cancel{2}}\left.\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{\cancel{2}}}\right|_2^{e^2+1} = \left.\frac{1}{3}u\sqrt{u}\right|_2^{e^2+1} = \frac{1}{3}\left(\left(e^2+1\right)\sqrt{e^2+1}-2\sqrt{2}\right)$$

Формула замены переменной в определенном интеграле

Пример 3

$$\int_0^{\pi/9}\frac{\sin 3x}{\cos 3x}dx=\left[\begin{array}{l} u=\cos 3x \Rightarrow du=u'dx=(\cos 3x)'\,dx=-3\sin 3x\,dx \\ du=-3\sin 3xdx \Rightarrow \sin 3xdx=-\dfrac{du}{3} \end{array}\right]=$$

$$x=0\to u=\cos(3\cdot 0)=1$$

$$x=\tfrac{\pi}{9}\to u=\cos\left(3\cdot\tfrac{\pi}{9}\right)=\tfrac{1}{2}$$

$$\int_1^{1/2}\frac{1}{u}\cdot\left(-\frac{1}{3}du\right)=-\frac{1}{3}\int_1^{1/2}\frac{du}{u}=-\frac{1}{3}\ln|u|\Big|_1^{1/2}=-\frac{1}{3}\left(\ln\left|\tfrac{1}{2}\right|-\ln|1|\right)=-\frac{1}{3}\left(\ln\tfrac{1}{2}-\ln 1\right)=-\frac{1}{3}(-\ln 2-0)=\frac{\ln 2}{3}$$

Формула интегрирования по частям

- Теорема. Пусть функции $u = u(x), v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a,b]$. Тогда

$$\int_a^b u\,dv = u\,v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

Формула интегрирования по частям

Пример 4

$$\int_0^1 \underbrace{x}_{u}\underbrace{e^{2x}dx}_{dv} = \left[\begin{array}{c} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x}\,dx \Rightarrow v = \int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right] = \underbrace{x}_{u}\underbrace{\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)}_{v}\Bigg|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2}e^{2x}}_{v}\underbrace{dx}_{du} =$$

$$= 1\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 1}\right) - 0\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2\cdot 0}\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^{2x}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}e^2 - \left(\frac{1}{4}e^{2\cdot 1} - \frac{1}{4}e^{2\cdot 0}\right) = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}e^2 + \frac{1}{4}$$

Формула интегрирования по частям
Пример 5

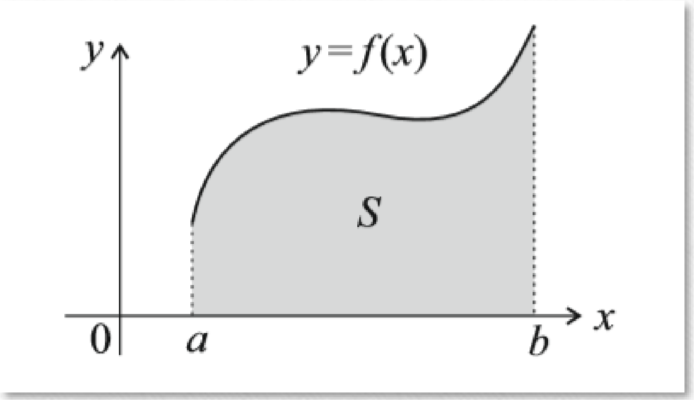
$$\int_1^e \underbrace{\ln x}_{u}\,\underbrace{dx}_{dv} = \left[\begin{array}{c} u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{1}{x}dx \\ dv=dx \Rightarrow v=\int dx = x \end{array}\right] = \underbrace{(\ln x)}_{u}\cdot\underbrace{x}_{v}\Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{x}_{v}\underbrace{\left(\frac{1}{x}dx\right)}_{du} =$$

$$= (\ln e)\cdot e - (\ln 1)\cdot 1 - \int_1^e dx = 1\cdot e - 0\cdot 1 - x\Big|_1^e = e-(e-1) = 1$$

Формула вычисления площади

Если $f(x)$ — неотрицательная непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция, S — площадь криволинейной трапеции под графиком этой функции, то

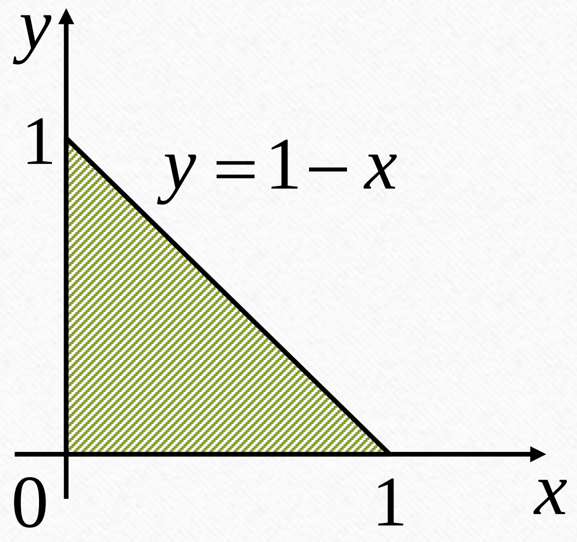
$$S=\int_a^b f(x)\,dx.$$



Формула вычисления площади

Пример 6

Найти площадь криволинейной трапеции под графиком $y = 1 - x$, если $x \in [0, 1]$.



$$S = \int_0^1 (1 - x)\, dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x dx = x\Big|_0^1 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 =$$

$$= (1 - 0) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$