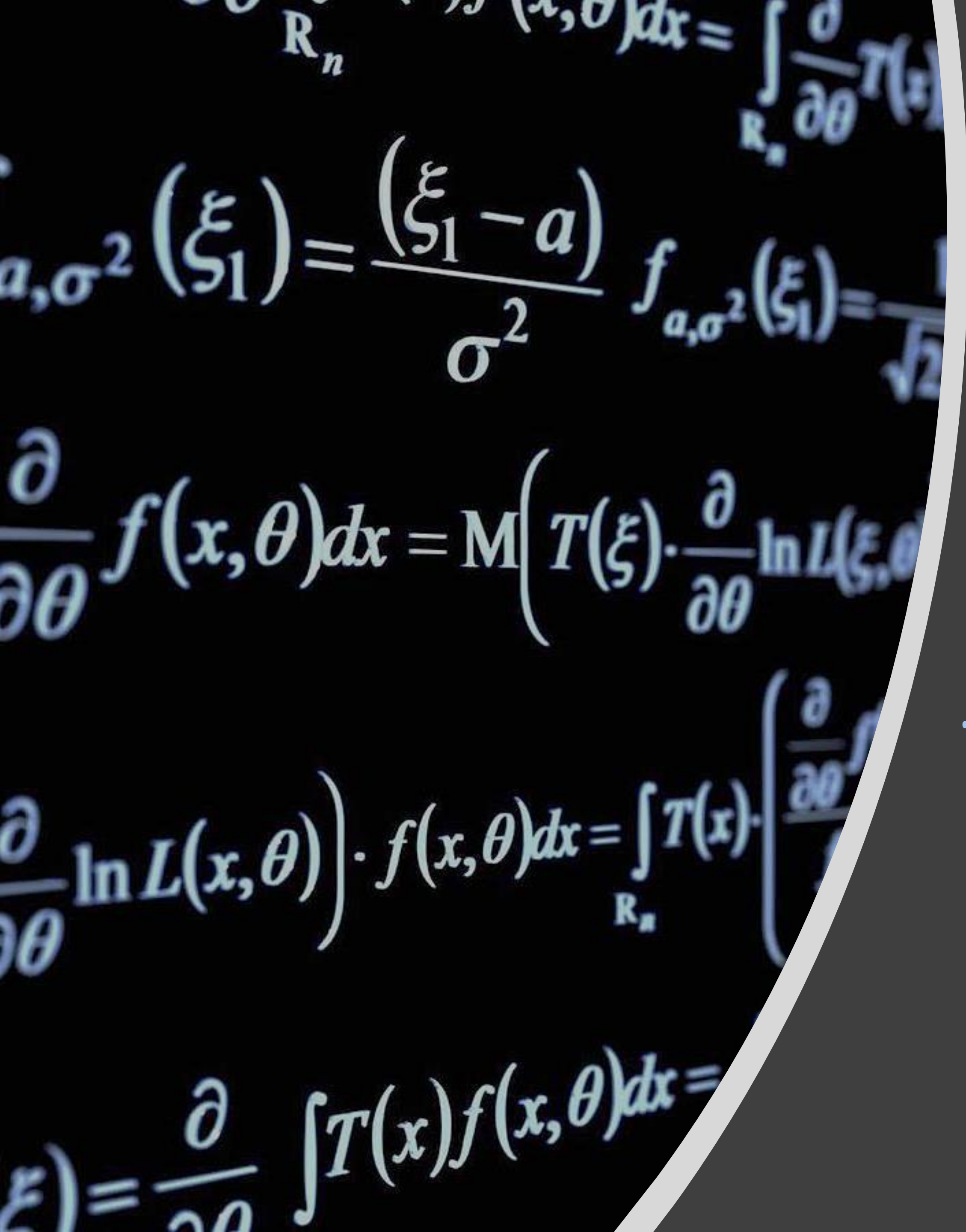


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 11
Математический анализ
Непрерывность функции в точке

Определение функции, непрерывной в точке

<u>Опр.</u> Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.
Говорят, что функции $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

1) существует конечный предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение функции, непрерывной в точке

Второе равенство можно переписать так

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right)$$

То есть операции взятия предела и операция взятия функции для непрерывной функции в точке **перестановочны.**

Определение функции, непрерывной в точке

Опр. (по Гейне)

Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.

Говорят, что функции $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in O(x_0)$, предел которой равен x_0 (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$ (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0)$).

Определение функции, непрерывной в точке

<u>Пример 1.</u> Пусть $f(x) = x^2$

$$\lim_{x\to 0} f(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

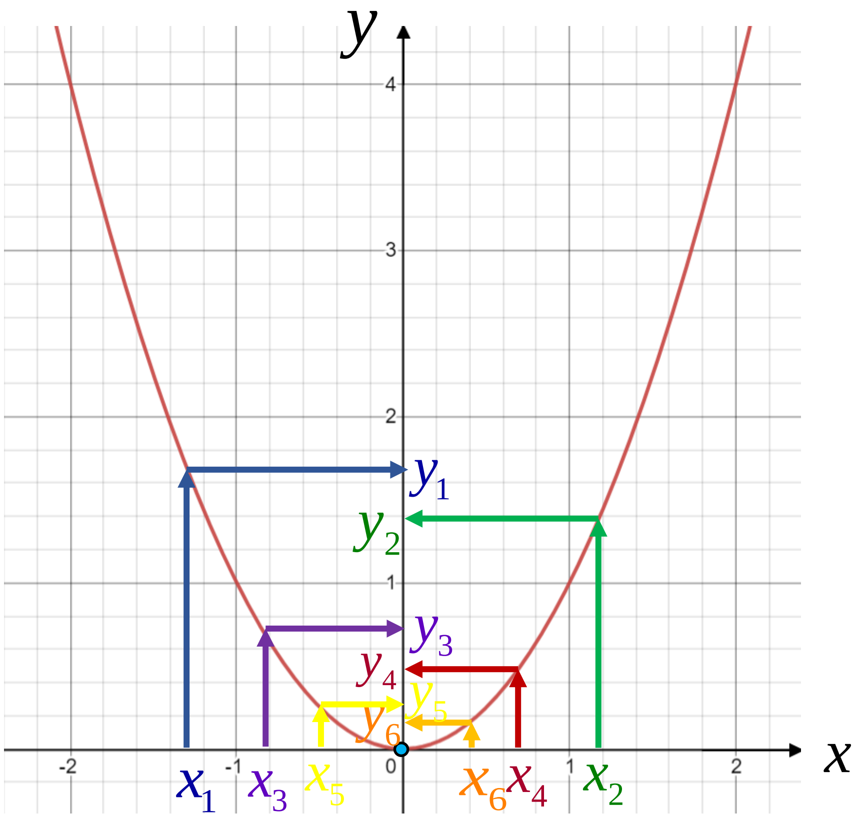
$$f(0) = 0^2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

$$\Downarrow$$

$f(x)$ непрерывна в точке $x = 0$



Определение функции, непрерывной в точке

Пример 2. Пусть $f(x) = x^2$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} x^2$$

$$= \left(\lim_{x \to x_0} x\right)^2 = x_0^2$$

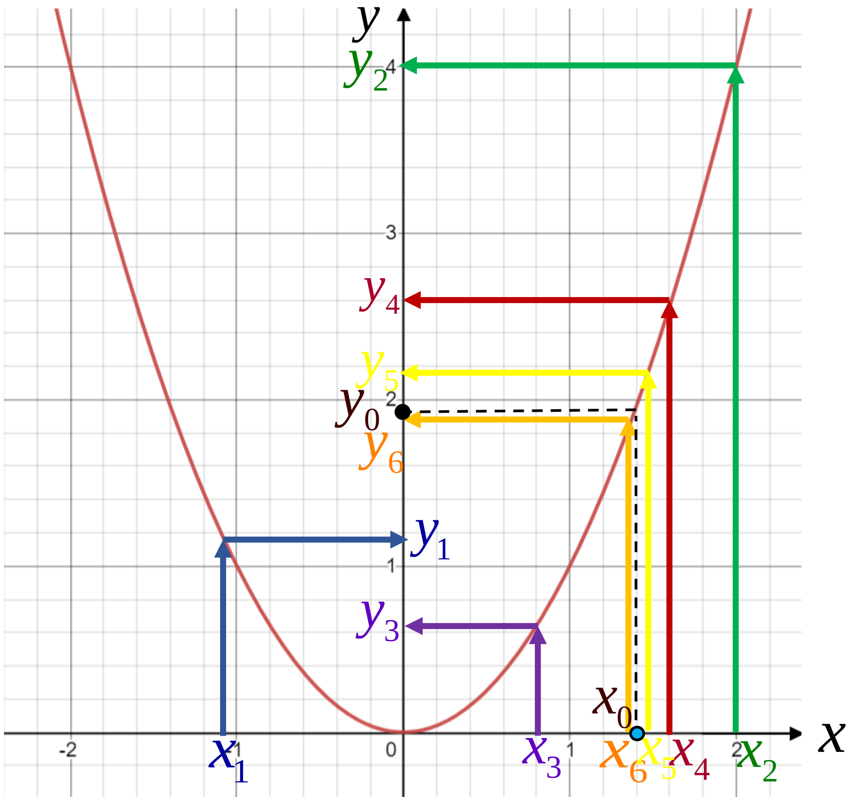
$$f(x_0) = x_0^2 = y_0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

$$\Downarrow$$

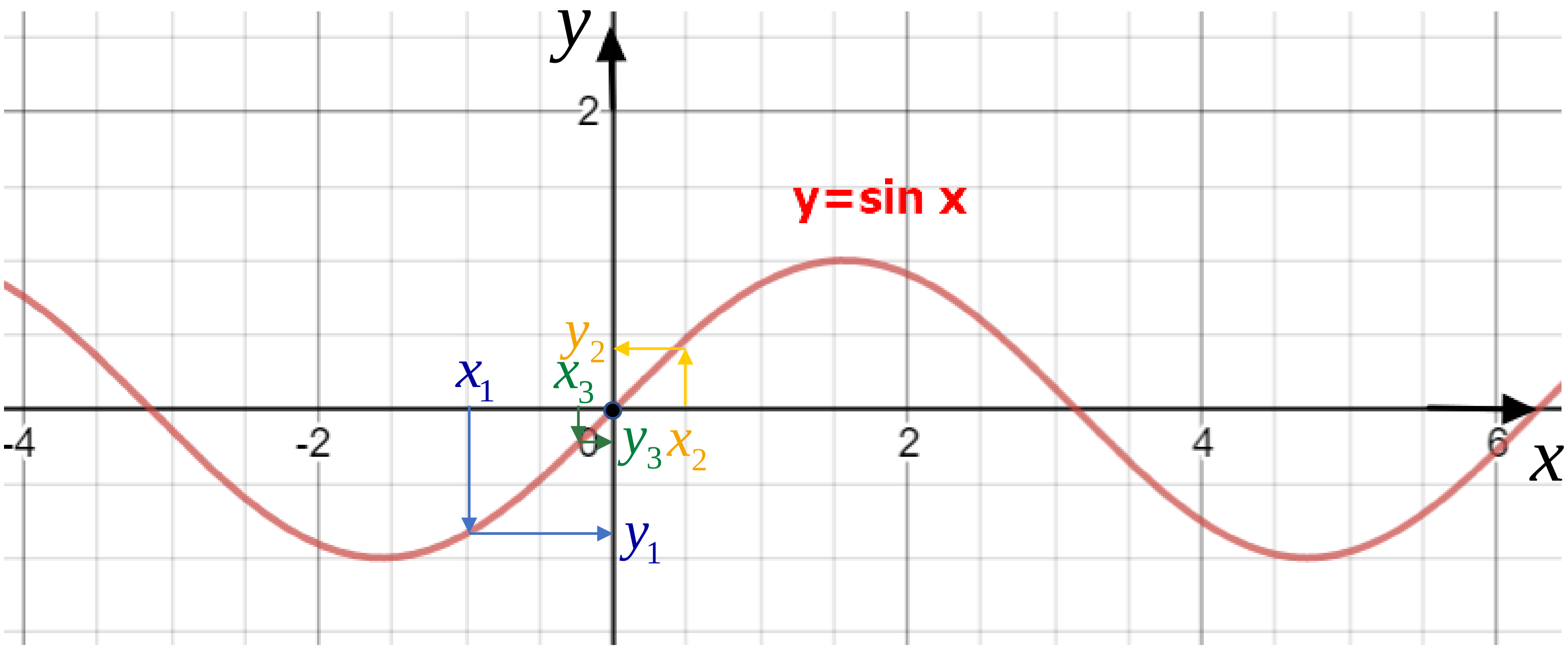
$f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$



Определение функции, непрерывной в точке

<u>Пример 3.</u> Пусть $f(x) = \sin x$; $\lim\limits_{x\to 0} f(x) =$

$$\lim_{x\to 0} \sin x = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} x = 0 = f(0) = \sin 0 = 0$$



$f(x) = \sin x$ непрерывна в точке $x = 0$

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 1 (арифметические свойства функций, непрерывных в точке)

(1) Сумма, разность, произведение двух функций, непрерывных в точке, непрерывны в этой точке.

(2) Степень функции, непрерывной в точке, непрерывна в этой точке.

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 1 (арифметические свойства функций, непрерывных в точке)

(3) Частное двух функций, непрерывных в точке, непрерывно в этой точке, при условии, что знаменатель не равен нулю в этой точке.

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке

<u>Доказательство (для суммы функций).</u>

Пусть $f(x), g(x)$ непрерывны в точке x_0.

Тогда

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0),$$

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке

Следовательно, по арифметическим свойствам пределов

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=$$

$$=f(x_0)+g(x_0)$$

$\Rightarrow$ функция $f(x)+g(x)$ непрерывна в точке x_0.

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке

Следовательно, функция $f(x) + g(x)$ непрерывна в точке x_0.

Непрерывность разности и произведения из (1), а также свойств (2), (3) доказывается аналогично (упр.)

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке

Пример 4. Функция $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x^3 - 1}$ непрерывна в любой точке $x = x_0$ для $x_0 \neq 1$.

Решение.

1) Функция $y = x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$ (упр.: доказать по опред.)

2) Функция $y = C$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$ (упр.: доказать по опред.)

Арифметические свойства функций, непрерывных в точке

$\Rightarrow$ функции $y = 1, y = 2, y = 3$ непрерывны в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

$\Rightarrow$ функция $y = 3x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$ по (1).

$\Rightarrow$ функции $y = x^2 + 3x - 2, y = x^3 - 1$ непрерывны в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$ по (1).

$\Rightarrow$ функции $y = f(x)$ непрерывна в любой точке $x_0 \neq 1$ по (3).

Непрерывность сложной функции в точке

Теорема 2 (непрерывность сложной функции в точке) (Без док-ва.)

1) $y = f(x)$ опред. в $O(x_0)$ и непрер. в точке x_0.

2) Пусть $z = g(y)$ определена в $O(y_0)$ и непрерывна в точке y_0.

3) Причем $y_0 = f(x_0)$ и $f(O(x_0)) \subseteq O(y_0)$

4) Тогда $z = g\big(f(x)\big)$ определена в $O(x_0)$ и непрерывна в точке x_0.

Непрерывность сложной функции в точке

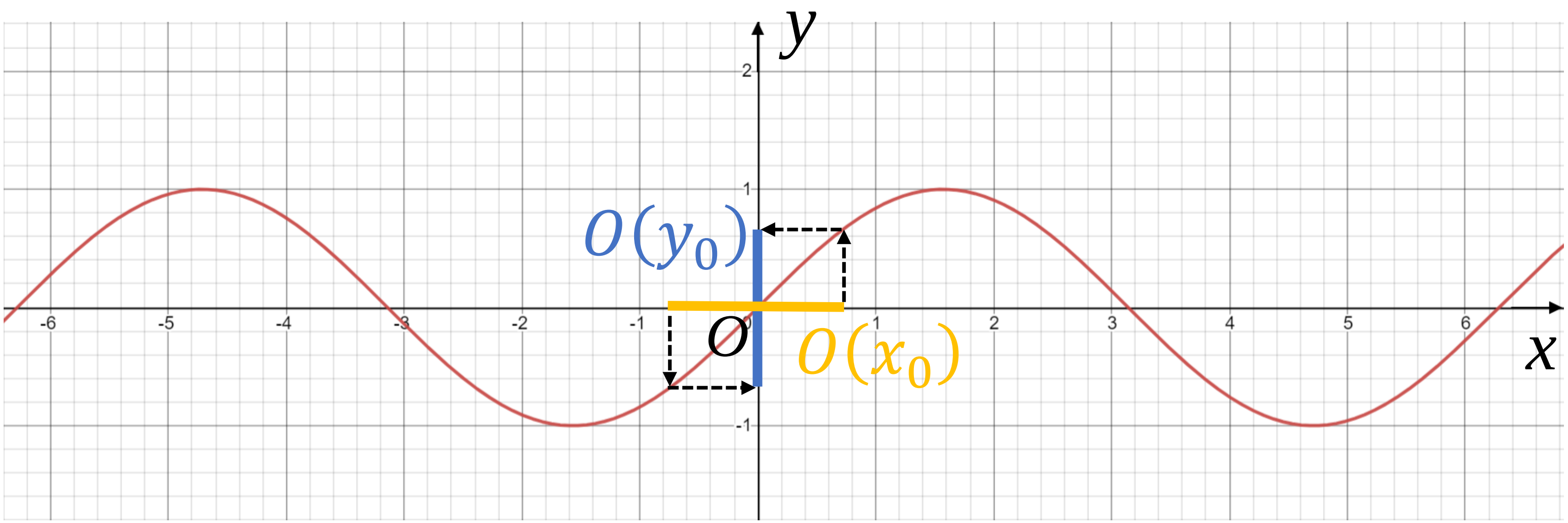
<u>Пример 5.</u>

1) Функция $z = g(y) = y^2$ определена и непрерывна точке $y_0 = 0$ (доказано на слайде 5)

2) Функция $y = f(x) = \sin x$ опред. в $O(x_0)$ и непрерывна в точке $x_0 = 0$ (слайд 7, строго докажем позже)

Непрерывность сложной функции в точке

3) $y_0 = f(x_0)\ \big(0 = f(0)\big)$ и $f(O(0)) \subset O(0)$



Непрерывность сложной функции в точке

4) Тогда
$z = g\big(f(x)\big) = (\sin x)^2$ определена в $O(0)$ и непрерывна в точке $x = 0$

Определение функции, непрерывной в точке через приращения

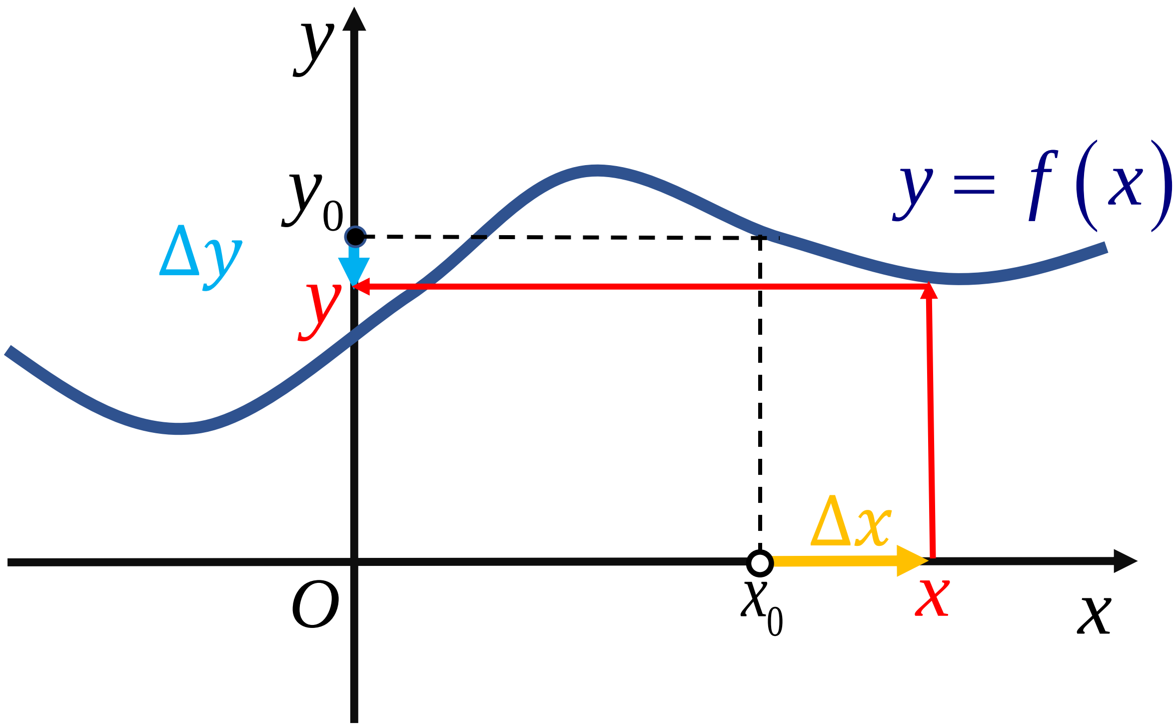
<u>Опр. (через приращения)</u>

Приращением аргумента называется значение $\Delta x = x - x_0$.

Приращением функции в точке $x = x_0$ называется значение $\Delta f = \Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$

$$\Delta y = y - y_0,\ y_0 = f(x_0)$$

Определение функции, непрерывной в точке через приращения



Определение функции, непрерывной в точке через приращения

Задача (упр.) Земной шар стянули обручем по экватору. Затем увеличили длину обруча на 1 м. Пролезет ли кошка в образовавшийся зазор?

Указание. Рассмотреть приращения ΔR и Δl радиуса окружности и длины окружности.

Этот слайд конспектировать не надо

Определение функции, непрерывной в точке через приращения

<u>Опр.</u>

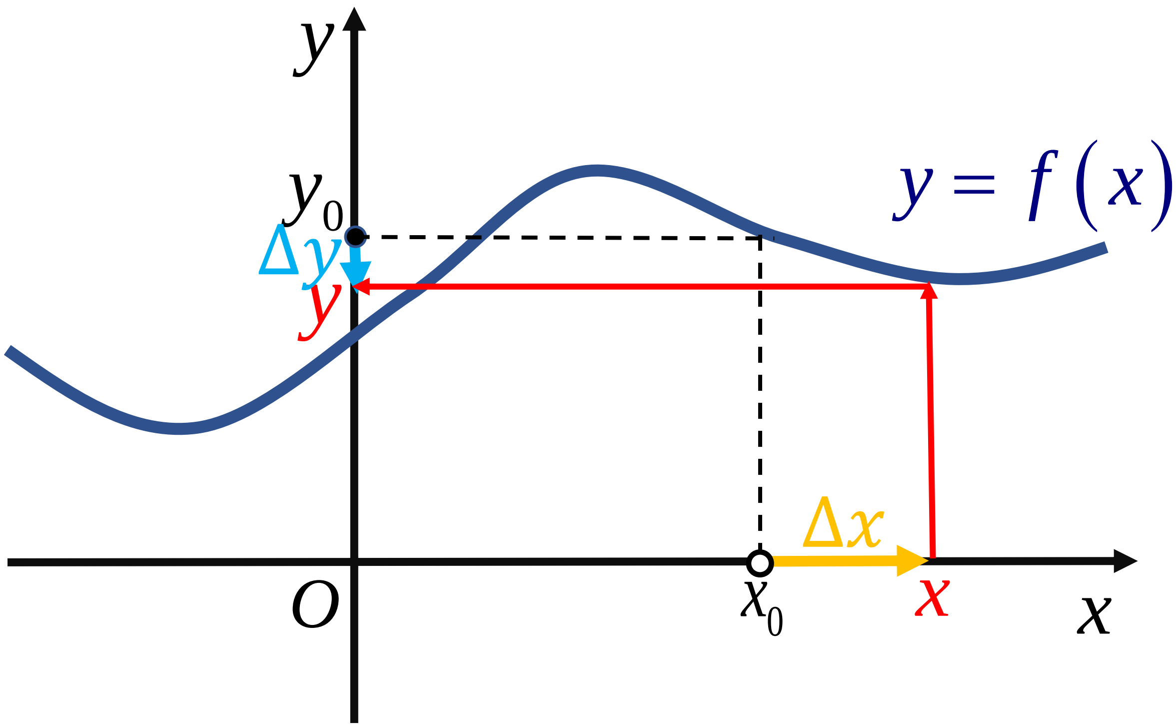
Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.

Говорят, что функции $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если

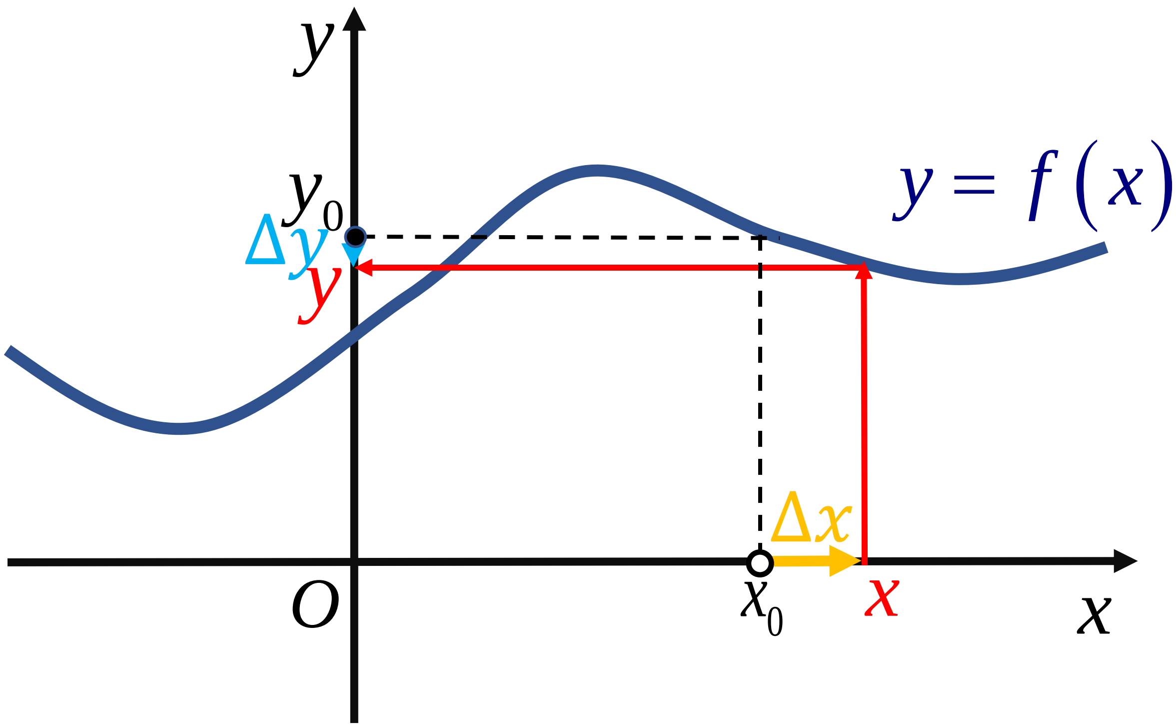
1) существует конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0)$ и

2) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$.

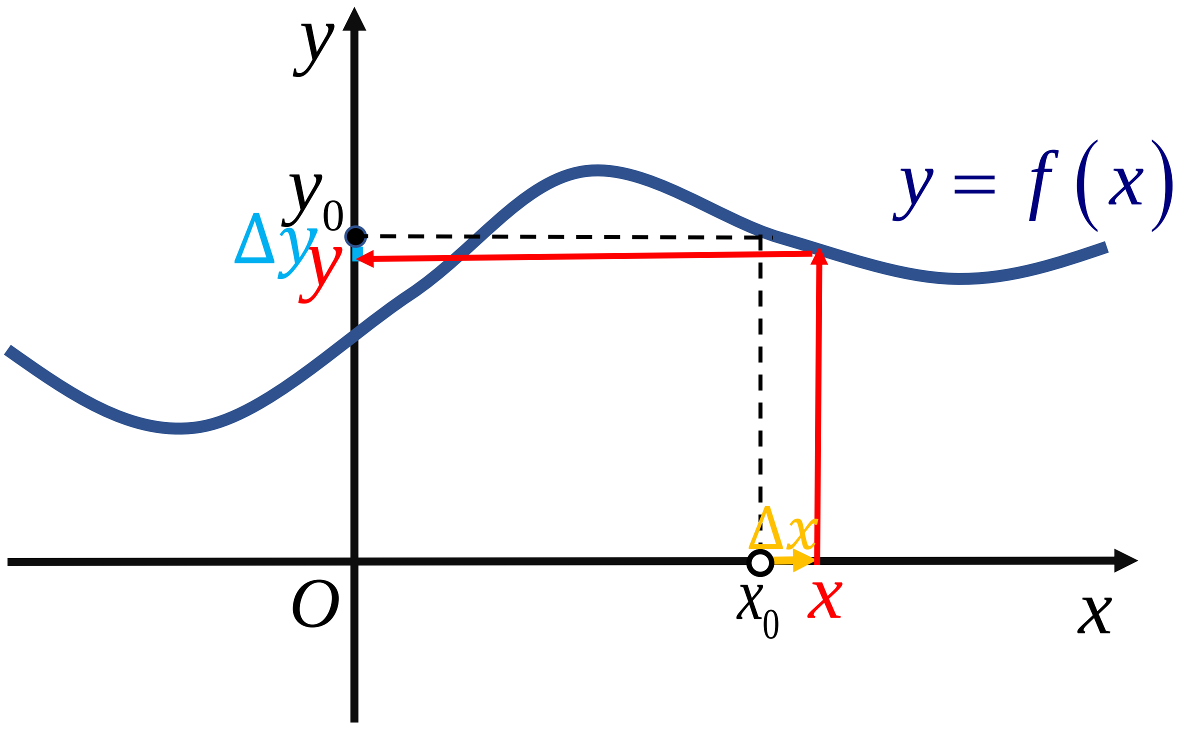
Определение функции, непрерывной в точке через приращения



Определение функции, непрерывной в точке через приращения



Определение функции, непрерывной в точке через приращения



Определение функции, непрерывной в точке через приращения

<u>Пример 6.</u> Пусть $f(x) = \sin x$

$$\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = x_0 + \Delta x$$

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

$$\Delta f(x_0) = \sin x - \sin x_0 = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0 =$$

$$= 2\sin\left(\frac{(x_0 + \Delta x) - x_0}{2}\right)\cos\left(\frac{(x_0 + \Delta x) + x_0}{2}\right) =$$

$$= 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Определение функции, непрерывной в точке через приращения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \cancel{2}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\cancel{2}} \cdot \underbrace{\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}}_{\xrightarrow{\Delta x \to 0} 1} \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

Определение функции, непрерывной в точке через приращения

Функция $y = x$ непрерывна точке $x = 0$ (слайд 13), т.е. $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$

$$\Downarrow$$

$y = x$ −б.м.ф при $x \to 0$, или, что то же самое

$y = \Delta x$ −б.м.ф при $\Delta x \to 0$, а

$y = \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ − ограниченная функция (?)

$$\Downarrow$$

По свойствам б.м.ф. функция

$y = \Delta x \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)$ − б.м.ф.

Определение предела функции в точке через приращения

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$$

$\Rightarrow$ функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Определение функции, непрерывной в точке через приращения

Следствие 1. Функция $y = \cos x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Доказательство. Функцию $y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ можно рассмотреть как сложную функцию от неперывных функций $z = \sin y$, $y = \frac{\pi}{2} - x$.

Следствие 2. Функции $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ непрерывны в любой точке определения (упр).

Определение функции, непрерывной в точке через приращения

<u>Пример 7.</u> Пусть $f(x) = e^x$

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$$

$$\Delta f(x_0) = e^x - e^{x_0} = e^{x_0+\Delta x} - e^{x_0} =$$

$$= e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1)$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} e^{x_0}(e^{\Delta x} - 1) =$$

Определение функции, непрерывной в точке через приращения

$$= \lim_{x \to x_0} e^{x_0} \cdot \underbrace{\Delta x}_{\xrightarrow{\Delta x \to 0} 0} \cdot \underbrace{\frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x}}_{\xrightarrow[\text{II ЗП}]{\Delta x \to 0} 1} = \lim_{x \to x_0} e^{x_0} =$$

$$[e^{x_0} = const] = e^{x_0} \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ функция $f(x) = e^{x}$ непрерывна в любой точке $x_0 \in R$ по (1).

Определение функции, непрерывной в точке через приращения

Пример 8. Показательная функция $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$ (упр.)

Определение функции, непрерывной в точке через приращения

Пример 9. Рассмотрим закон Менделеева-Клайперона $pV = kT$ $\left(k = R\frac{m}{M}\right)$

Тогда $p = \frac{kT}{V}$.

Если $T = const,$ то $p = p(V) = \frac{c}{V}$ $(c = kT)$

График $p = p(V) = \frac{c}{V}$ (изотерма) $-$ гипербола

Определение функции, непрерывной в точке через приращения

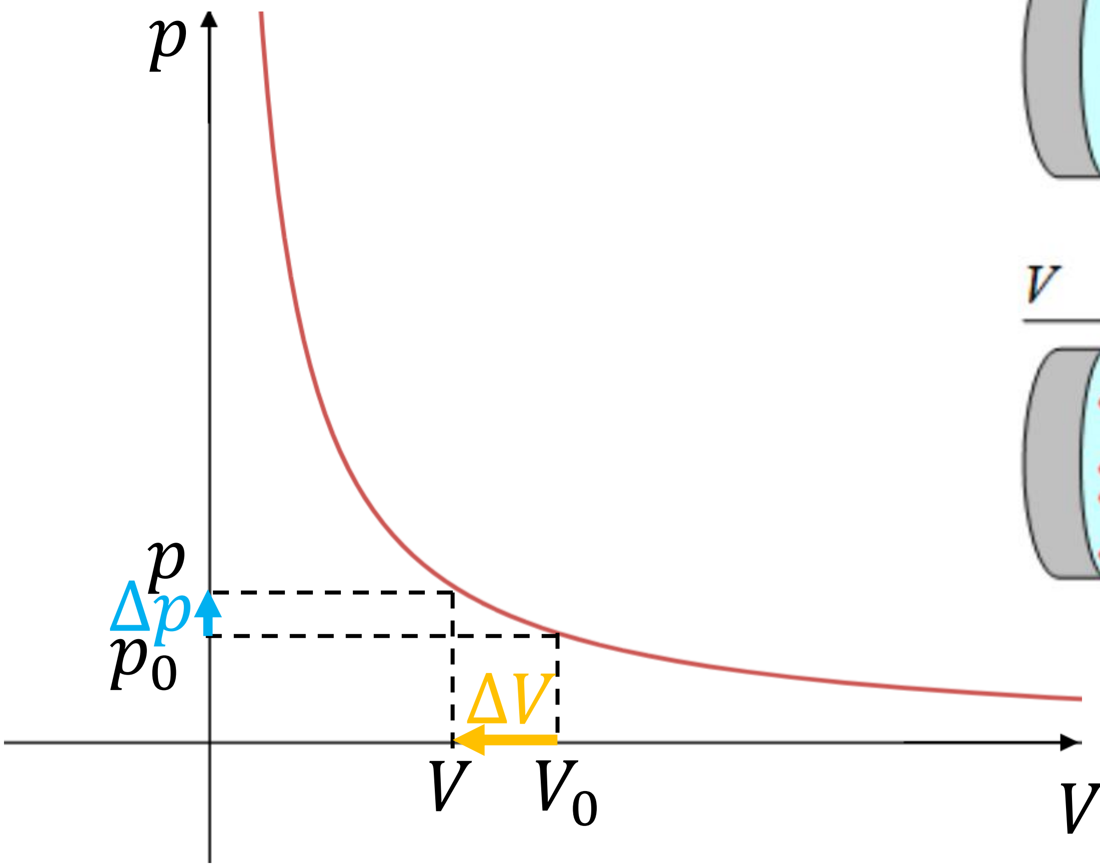
Функция $p = p(V) = \frac{c}{V}$ – непрерывна в любой точке $V = V_0, V_0 \neq 0.$

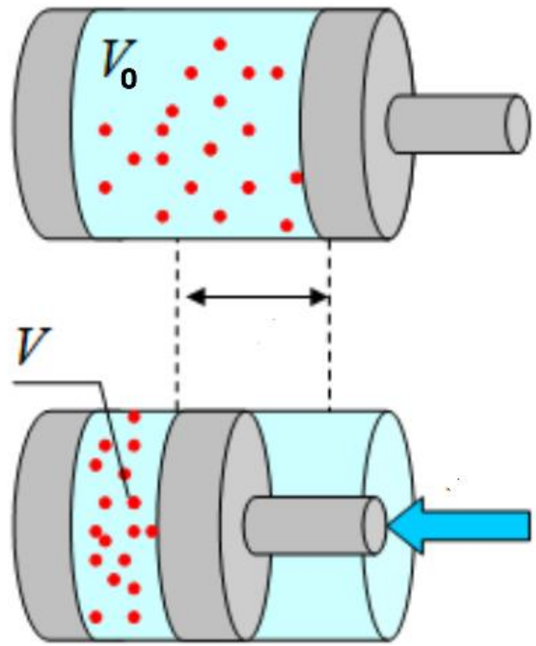
$$\Downarrow$$

$$\lim_{\Delta V \to 0} \Delta p = 0$$

Это значит, что при небольшом изменении (н-р, уменьшении) объема при постоянной температуре давление идеального газа на стенки сосуда изменится (увеличится) ненамного.

Определение функции, непрерывной в точке через приращения





Изображение взято с [САЙТА]

Непрерывность в точке и неравенства

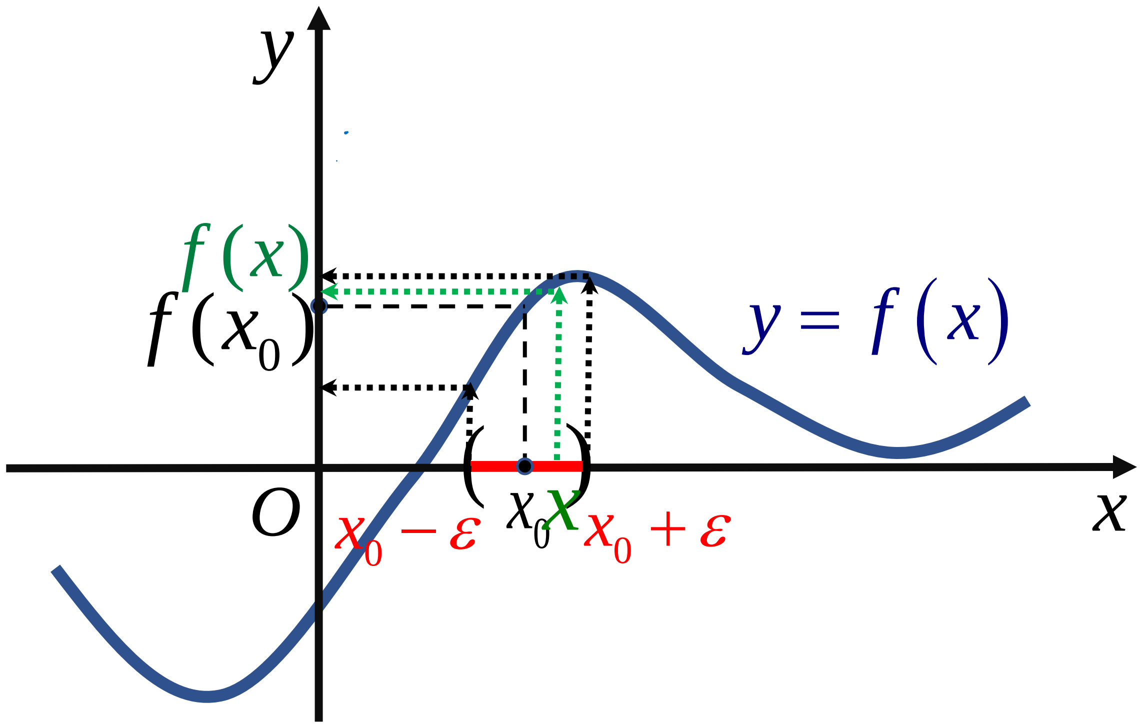
Теорема 3. Пусть $y = f(x)$ определена в некоторой $O(x_0)$ и непрерывна в точке x_0.

Если $f(x_0) > 0$ ($f(x_0) < 0$),
то $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) в некоторой ε-окрестности $O_\varepsilon(x_0)$ точки x_0.

Доказательство следует из аналогичной теоремы о пределах (упр.)

Непрерывность в точке и неравенства

$$f\left(x_0\right) > 0$$



Понятие обратной функции

<u>Опр.</u> Функция $y = f(x)$ с областью определения X и областью значений
Y называется взаимно однозначной (обратимой), если для любого $y \in Y$ найдется единственное такое $x \in X$, что $y = f(x)$.

<u>Опр.</u> Функция $x = x(y) = f^{-1}(y)$ с областью определения Y называется обратной к $y = f(x)$.

Понятие обратной функции

Обычно в записи $x = f^{-1}(y)$ меняют x и y местами и говорят, что $y = f^{-1}(x)$ – обратная к $y = f(x)$.

Замечание. Графики функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$ симметричны относительно прямой $y = x$ (почему?)

Понятие обратной функции

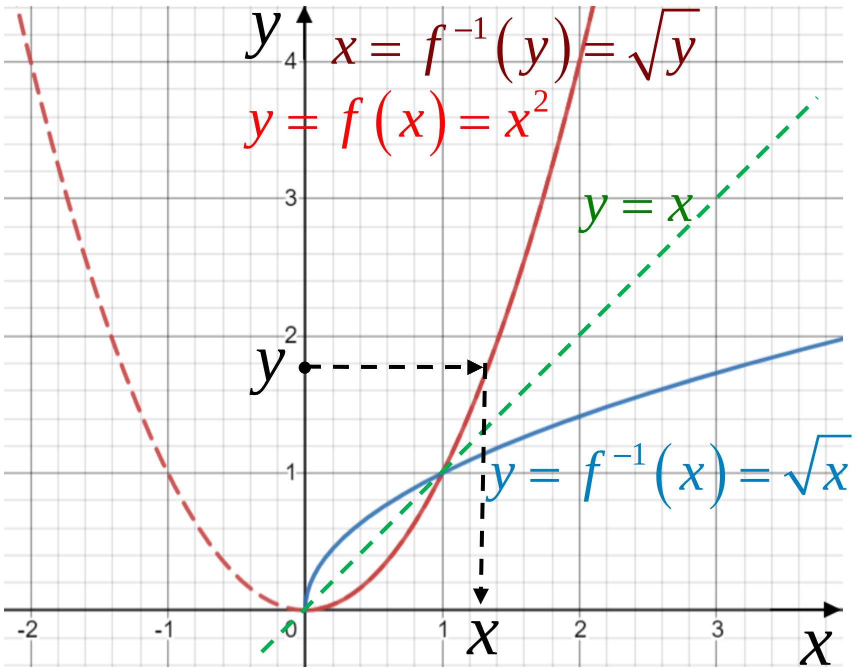
<u>Пример 10.</u>

Функция $y = f(x) = x^2$ обратима на $X = [0; +\infty)$ (но не на $(-\infty; +\infty)$).

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt{x} -$$

обратная к $y = f(x) = x^2$

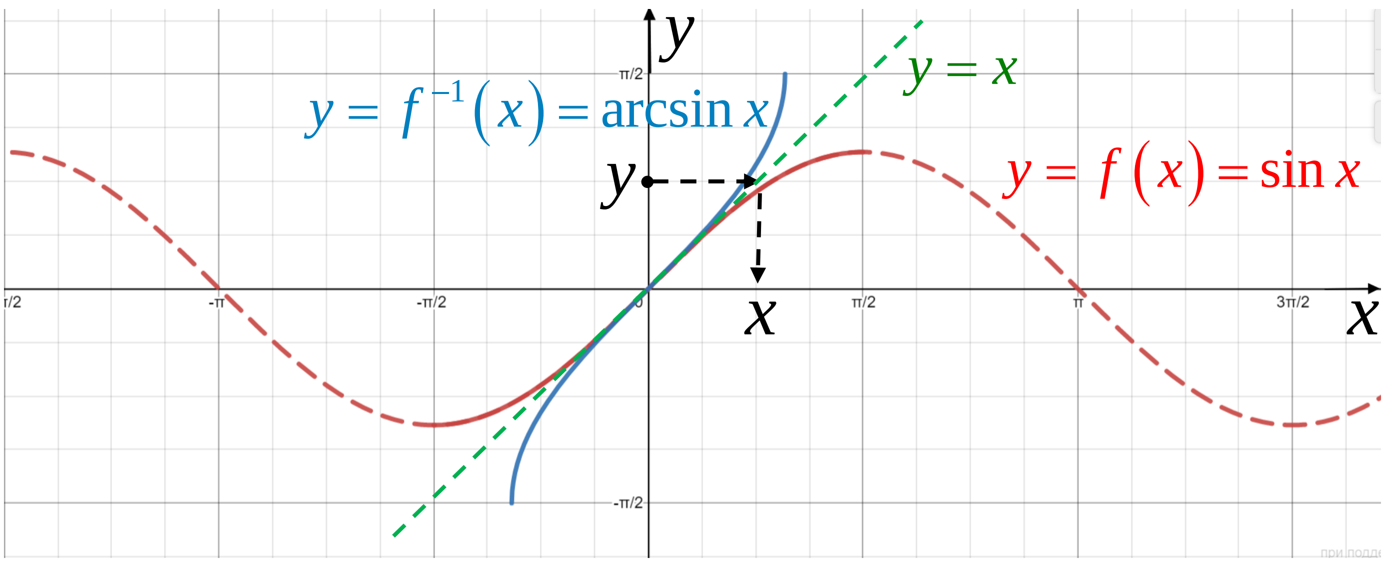


Понятие обратной функции

Функция $y = f(x) = \sin x$ обратима на $X = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ (но не на $(-\infty; +\infty)$).

Тогда $x = f^{-1}(y) = \arcsin y$.

$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \arcsin x$ – обратная к $y = f(x) = \sin x$



Непрерывность в точке обратной функции

Теорема 4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке $x_0 \in (a; b)$ области своего определения. И пусть $y = f(x)$ обратима на $(a; b)$.

Тогда обратная функция $y = f^{-1}(x)$ непрерывна в любой точке $y_0 \in (c; d)$, где $(c; d) = f(a; b)$, $y_0 = f(x_0)$.

Без док-ва.

Непрерывность в точке обратной функции

Пример 11. Докажем, что функция $y = \ln x$ непрерывна в любой точке области своего определения.

Рассмотрим функцию $f(x) = e^x$.

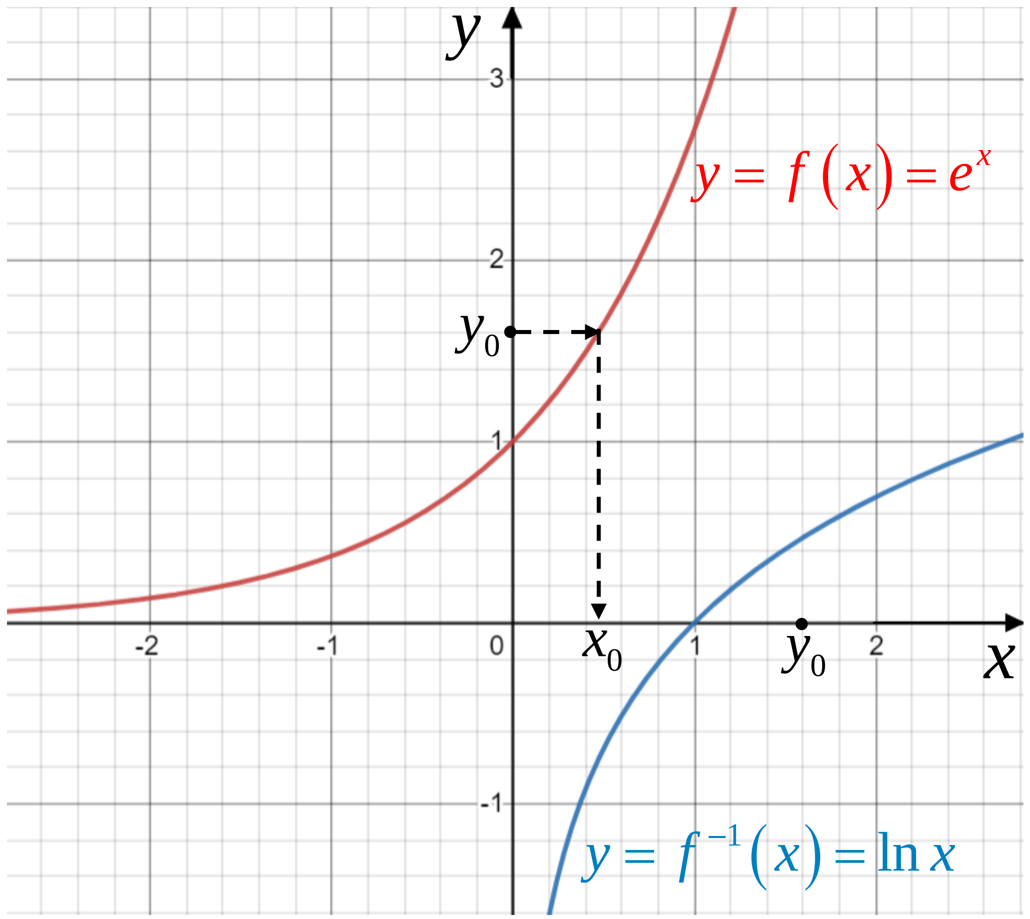
Функция $y = e^x$ – обратима на $\boldsymbol{R}$ $\Rightarrow x = \ln y$

Тогда $y = f^{-1}(x) = \ln x$ – обратная к функции $f(x) = e^x$.

Возьмем $y_0 > 0$. И пусть x_0 т.ч. $y_0 = f(x_0) = e^{x_0}$,

т.е. $x_0 = f^{-1}(y_0) = \ln y_0$.

Непрерывность в точке обратной функции



$(a; b) = \boldsymbol{R}$

$(c; d) =$
$(0; +\infty)$

Непрерывность в точке обратной функции

Функция $f(x) = e^x$ непрерывна в любой точке $x = x_0$

$$\Downarrow$$

Функция $f^{-1}(x) = \ln x$ непрерывна в любой точке $y = y_0, y_0 > 0$.

Непрерывность в точке обратной функции

Пример 12. Функции
$y = \log_a x$,
$y = \arcsin x, y = \arccos x$,
$y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$,
непрерывны в любой точке области своего определения (упр).

Непрерывность элементарной функции

Опр. Функция
$y = f(x)$ называется элементарной, если ее можно получить при помощи в виде суммы (разности), произведения, частного, сложной, обратной функции от школьных элементарных функций: степенной, показательной, логарифма, тригонометрических и их обратных.

Непрерывность элементарной функции

Теорема 5 (о непрерывности элементарн. функции) Элементарная функция непрерывна для любой точки из своей области определения (непрерывна на области определения).

Доказательство следует из теорем (самост-но).