Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, III семестр (II курс)

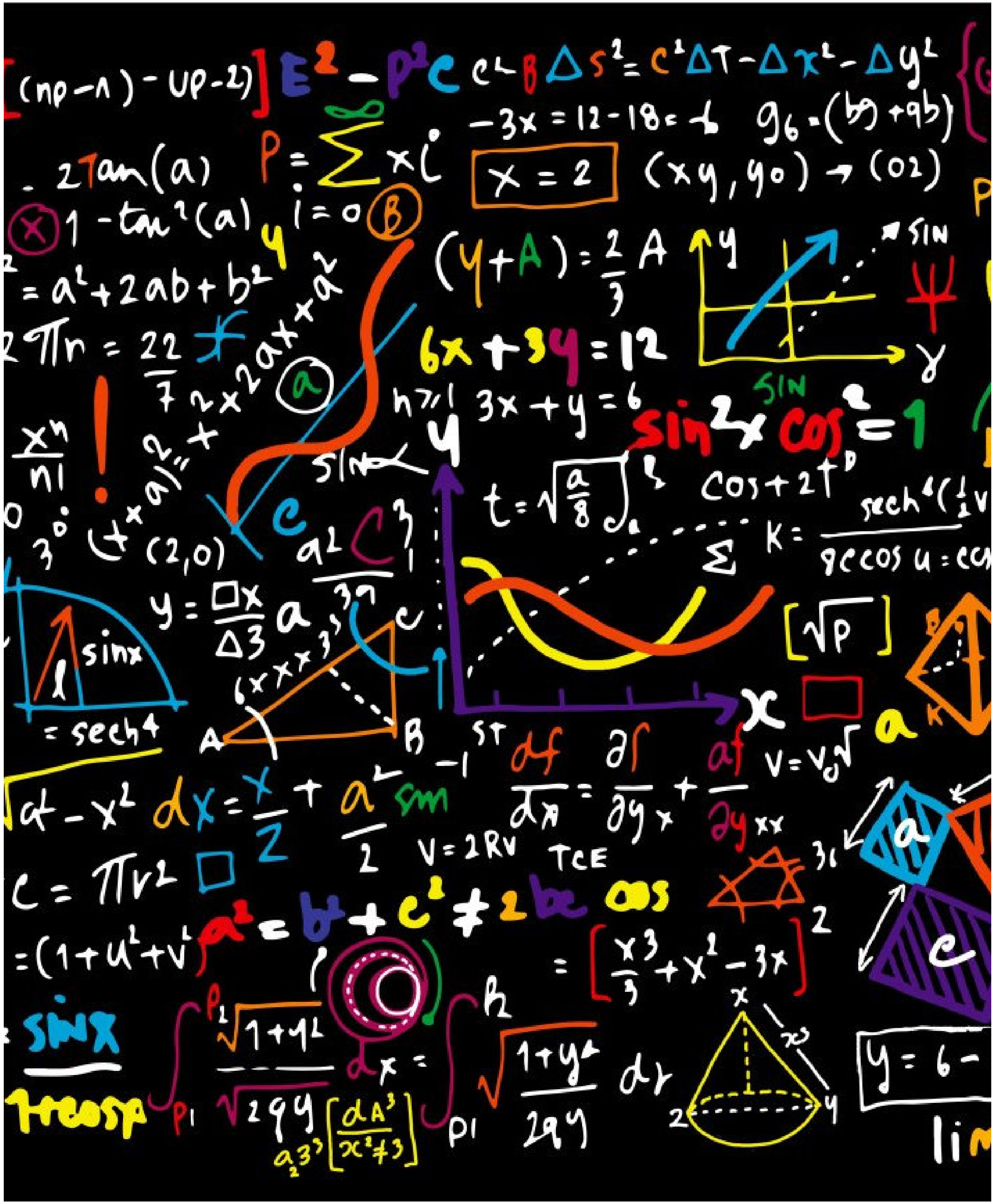
Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 10

Признаки сходимости рядов с положительн. членами



Лекция 10
Признаки сходимости рядов с положительными членами

1. Признак Даламбера.
2. Радикальный признак Коши.
3. Интегральный признак Коши.
4. Предельные признаки сравнения.

Все признаки сравнения приводятся без доказательства.

Признак Даламбера

Теорема 1 (признак Даламбера). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами, $u_n > 0$ существует конечный предел

$$\boxed{d = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}}$$

Тогда

1) если $\boldsymbol{0 \le d < 1}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **сходится**;

2) если $\boldsymbol{d > 1}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **расходится**;

3) если $\boldsymbol{d = 1}$, то вопрос о сходимости остается **открытым**.

Признак Даламбера. Задача 1

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

Решение.

1) Заметим, что применение признака сравнения затруднительно.

2) Применим **признак Даламбера**:

$$u_n = \frac{n}{2^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$$

Признак Даламбера. Задача 1

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{n+1}{2^{n+1}}}{\dfrac{n}{2^n}} = \frac{(n+1)2^n}{n2^{n+1}} = \frac{n+1}{2n}$$

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n}\right] = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow$$

<u>Ответ</u>: ряд сходится по признаку Даламбера.

Признак Даламбера. Задача 2

<u>Задача 2</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$.

<u>Решение</u>.

Применим **признак Даламбера**:

$$u_n = \frac{n!}{3^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{(n+1)!\,3^n}{n!\,3^{n+1}} = \frac{1}{3}\frac{(n+1)!}{n!} =$$

Признак Даламбера. Задача 2

$$= \frac{\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \dots \cdot \cancel{n} \cdot (n+1)}{3(\cancel{1} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \dots \cdot \cancel{n})} = \frac{n+1}{3}$$

$$d = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{3} = \infty > 1$$

<u>Ответ</u>: ряд расходится по признаку Даламбера.

Признак Даламбера. Задача 3

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Решение.

Применим **признак Даламбера**:

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

Признак Даламбера. Задача 3

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}}{\dfrac{1}{n(n+1)}} = \frac{n\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} =$$

$$= \frac{n}{n+2}; \qquad d = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+2} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\right] = 1 \Rightarrow$$ Признак Даламбера ответа не дает.

Признак Даламбера. Задача 3

Заметим, что

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots$$

Признак Даламбера. Задача 3

Значит, частичная сумма ряда равна

$$S_n = \left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$= 1-\frac{1}{n+1} \Rightarrow$$ сумма ряда равна

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\left[1-\frac{1}{\infty}\right]=1$$

<u>Ответ</u>: ряд сходится **по определению** (более простой способ рассмотрим в задаче 8).

Радикальный признак Коши

<u>Теорема 2 (радикальный признак Коши).</u> Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами существует конечный предел

$$\boxed{q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}}$$

Тогда

1) если $\boldsymbol{0 \le q < 1}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **сходится**;

2) если $\boldsymbol{q > 1}$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **расходится**;

3) если $\boldsymbol{q = 1}$, то вопрос о сходимости остается **открытым**.

Радикальный признак Коши

<u>Замечание.</u> При применении радикального признака Коши часто используют формулу

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$$

<u>Доказательство</u>.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln n^{\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}}$$

Радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=\begin{bmatrix}\text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{x'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}}=\lim_{n\to\infty} e^{0}=1 \blacksquare$$

Радикальный признак Коши. Задача 4

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Решение.

Применим **радикальный признак Коши**:

$$u_n = \frac{n}{2^n} \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2^n}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{2}$$

Радикальный признак Коши. Задача 4

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}}{2} =$$

$$= \underline{[\text{Замечание}]} = \frac{1}{2} < 1$$

<u>Ответ</u>: ряд **сходится** по радикальному признаку Коши.

Радикальный признак Коши. Задача 5

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\ldots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\ldots$$

т.е. ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$

Радикальный признак Коши. Задача 5

Решение.

Применим **радикальный признак Коши**:

$$u_n = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1}$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n+1} = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n}\right] = \frac{1}{2} < 1$$

Ответ: ряд сходится по радикальному признаку Коши.

Интегральный признак Коши

Теорема 3 (интегральный признак Коши). Пусть для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с положительными членами выполняются условия

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;

2) $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \ldots (u_n \downarrow)$;

3)$f(n) = u_n$;

4) $f(x)$ определена и непрерывнана на $[1, +\infty)$, $f(x) > 0, f(x) \downarrow$ на$[1, +\infty)$.

Интегральный признак Коши

Тогда

ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$

либо одновременно сходятся,
либо одновременно расходятся.

Интегральный признак Коши. Задача 6

Задача 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Решение.

1. Применить признак сравнения невозможно (не с чем сравнивать).

2. Применим **признак Даламбера**:

$$u_n = \frac{1}{n} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

Интегральный признак Коши. Задача 6

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} = \frac{n}{n+1}$$

$$d = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} =$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n}\right] = 1 \quad \Rightarrow$$ Признак Даламбера ответа не дает.

Интегральный признак Коши. Задача 6

3. Применим **радикальный признак Коши**.

$$u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \sqrt[n]{u_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$$

$$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} =$$

=[Замечание 1]= $\frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ Радикальный признак Коши тоже не дает ответа

Интегральный признак Коши. Задача 6

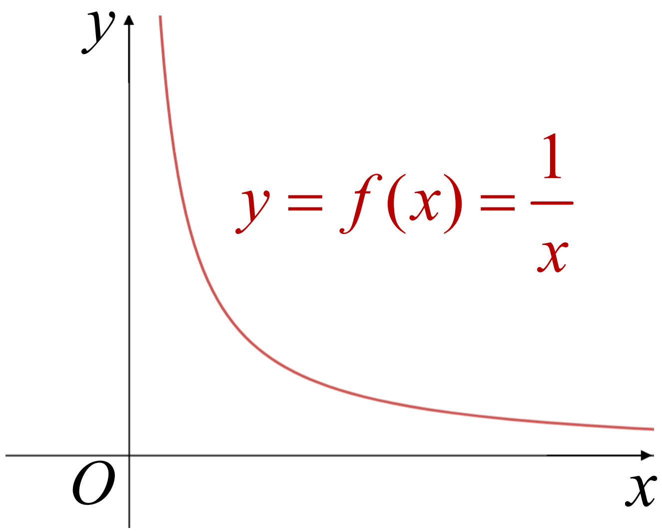
4. Применим **интегральный признак Коши**.
Проверим его условия.

$$u_n = \frac{1}{n} \Rightarrow$$

1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0;$

2) $u_n = \frac{1}{n} \downarrow;$

3) $f(n) = u_n = \frac{1}{n}$



4) $f(x) = \frac{1}{x}$ непрерывна, $f(x) > 0, f(x) \downarrow$ на $[1; +\infty)$.

Интегральный признак Коши. Задача 6

Интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = \ln|x|\Big|_1^{+\infty} =$

$= [\ln(+\infty) - \ln 1] = +\infty$ расходится.

$\Rightarrow$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Ответ: ряд расходится по интегральному признаку Коши.

Сходимость гармонического ряда

Следствие.

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится $\Leftrightarrow \alpha > 1$

Док-во: упр.

Указание: рассмотреть два случая:
1) $\alpha \leq 0$ – тогда ряд расходится по необходимому признаку;
2) $\alpha > 0$ – аналогично задаче 6.

Интегральный признак Коши. Задача 7

Задача 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

Решение.

- Применение других признаков не приводит к результату.
- Применим **интегральный признак Коши**.
- Условия проверить сам-но: см. задачу 6 (упр.)

Интегральный признак Коши. Задача 7

Интеграл $\int_{2}^{+\infty} f(x)dx = \int_{2}^{+\infty} \frac{1}{x\,\ln x}dx =$

$$= \begin{bmatrix} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}dx \\ x = 2 \to t = \ln 2 \\ x = +\infty \to t = +\infty \end{bmatrix} =$$

Интегральный признак Коши. Задача 7

$$= \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t} = \ln|t|\Big|_{ln\,2}^{+\infty} = [\ln(+\infty) - \ln(\ln 2)] = +\infty$$

Интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ \ln x} dx$ расходится $\Rightarrow$

Ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ \ln n}$ расходится.

<u>Ответ</u>: ряд расходится по интегральному признаку Коши.

Предельный признак сравнения

Теорема 4 (предельный признак сравнения).
Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, с положительными членами существует конечный предел

$$\boxed{K = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}}$$

Причем $0 < K < +\infty$.

Предельный признак сравнения

Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

либо одновременно сходятся,
либо одновременно расходятся.

В этом случае ряды называются
эквивалентными и обозначаются

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \sim \sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

Предельный признак сравнения (K=0)

<u>Теорема 5 (предельный признак сравнения, K=0).</u> Пусть для рядов $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, с положительными членами предел

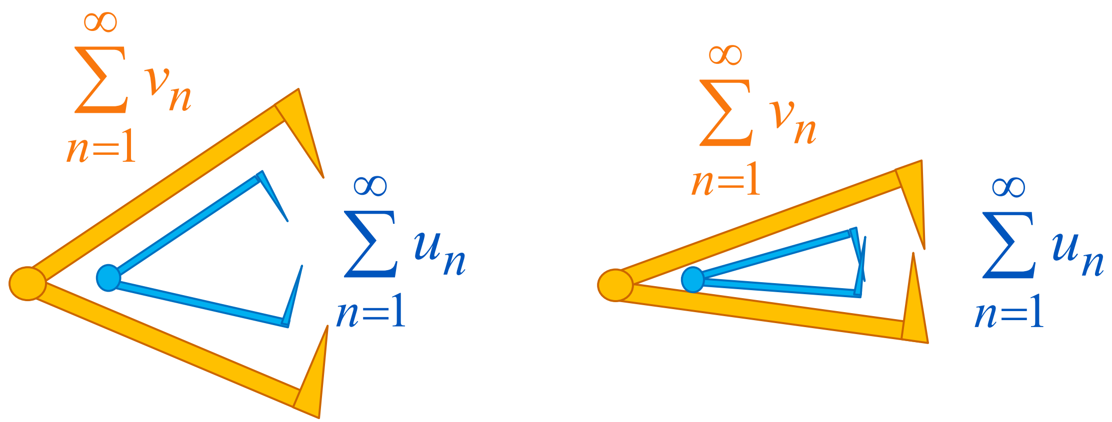
$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0}$$

$$\boxed{\left(\lim_{n\to\infty} \frac{v_n}{u_n} = +\infty \right)}$$

Предельный признак сравнения (K=0)

Тогда из сходимости «большего» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$

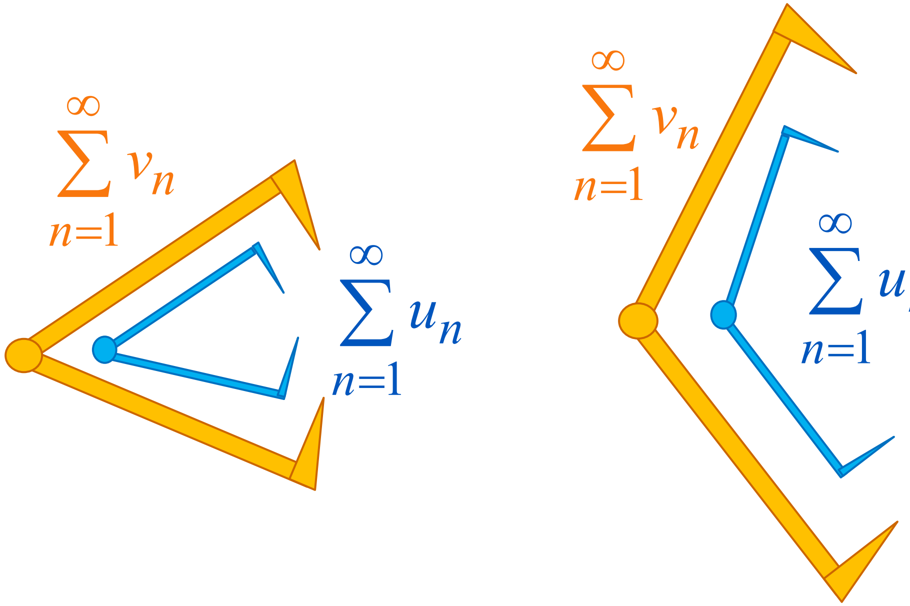
следует сходимость «меньшего» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$



Предельный признак сравнения (K=0)

А из расходимости «меньшего» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

следует расходимость «большего» ряда $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$



Предельный признак сравнения
Задача 8

<u>Задача 8</u>. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

Применим **предельный признак сравнения**.

<u>«Нестрогое» решение</u>.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ - сходится } (\alpha = 2 > 1)$$

Предельный признак сравнения
Задача 8

<u>«Строгое» решение</u>.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}; \quad u_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \quad v_n = \frac{1}{n^2}$$

Предельный признак сравнения
Задача 8

<u>«Строгое» решение</u>.

$$K=\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n(n+1)}}{\dfrac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{n}{n}}{\dfrac{n+1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{n}}=\left[\frac{1}{1+0}\right]=1$$

Предельный признак сравнения
Задача 8

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$ - сходится как гармонический ряд

$\Rightarrow$ исходный ряд сходится

Ответ: ряд сходится по предельному признаку сравнения.

Предельный признак сравнения Задача 9

Задача 9. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$$

Решение. Применим **предельный признак сравнения**.

Хотя можно использовать просто признак сравнения или интегральный признак Коши.

Предельный признак сравнения
Задача 9

<u>Решение</u>.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}; \quad u_n = \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}; \quad v_n = \frac{\ln n}{n}$$

Предельный признак сравнения
Задача 9

$$K = \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{\ln n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln n} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0$$

«Меньший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится

$$\Downarrow$$

«Больший» ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ расходится

<u>Ответ</u>: ряд расходится по предельному признаку сравнения.

Алгоритм исследования на сходимость знакоположительного ряда

Для решения задач удобно использовать

[Алгоритм исследования на сходимость знакоположительного ряда]()

(см. следующие слайды; их можно не конспектировать)

Алгоритм исследования на сходимость знакоположительного ряда

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n, u_n > 0$

1) Вычислим $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$

$\Downarrow$

сходимость возможна

$\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$ или не сущ.

$\Downarrow$

ряд расходится

2) можно применить **предельный признак сравнения?**

да

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \sim \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$

2.1) $0 < \alpha \leq 1$

$\Downarrow$

ряд расходится

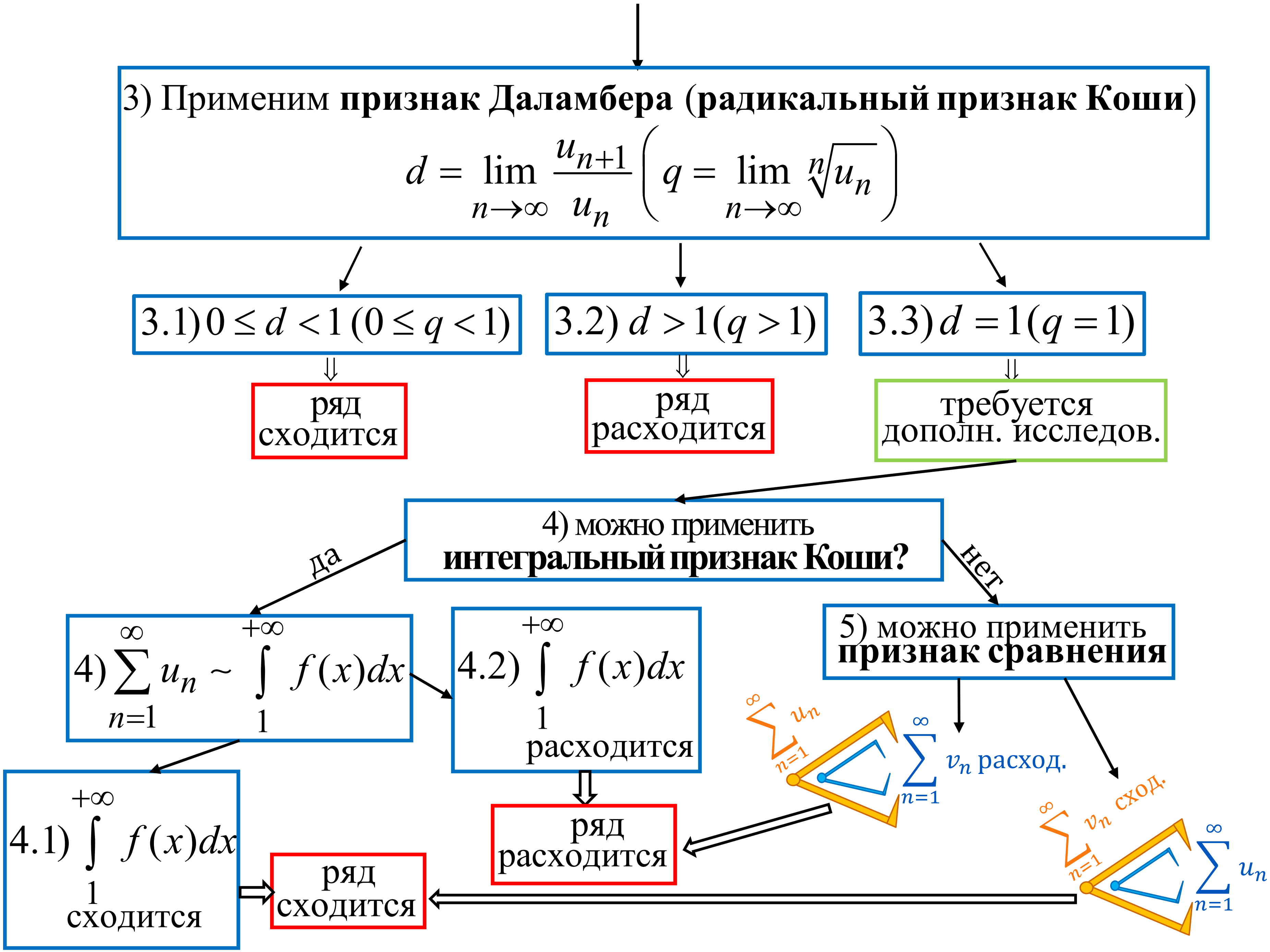
2.2) $\alpha > 1$

$\Downarrow$

ряд сходится

нет

требуется дополн. исследов.


3) Применим **признак Даламбера** (**радикальный признак Коши**)
$d = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \left(q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} \right)$
3.1) $0 \le d < 1 \; (0 \le q < 1)$
ряд сходится
3.2) $d > 1 \; (q > 1)$
ряд расходится
3.3) $d = 1 \; (q = 1)$
требуется дополн. исследов.
4) можно применить
интегральный признак Коши?
да
нет
4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \sim \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$
4.1) $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ сходится
ряд сходится
4.2) $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ расходится
ряд расходится
5) можно применить
признак сравнения
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ расход.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ сход.
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$