Лекция 10
Определенный интеграл

Курс **«Математика», I курс, II семестр**

ИЕНиМ, Департамент фундаментальной и прикладной химии

Лектор: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В., 2022г.

Понятие интегральной суммы

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n произвольных частей точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b.$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Точки x_i называются **точками разбиения**.

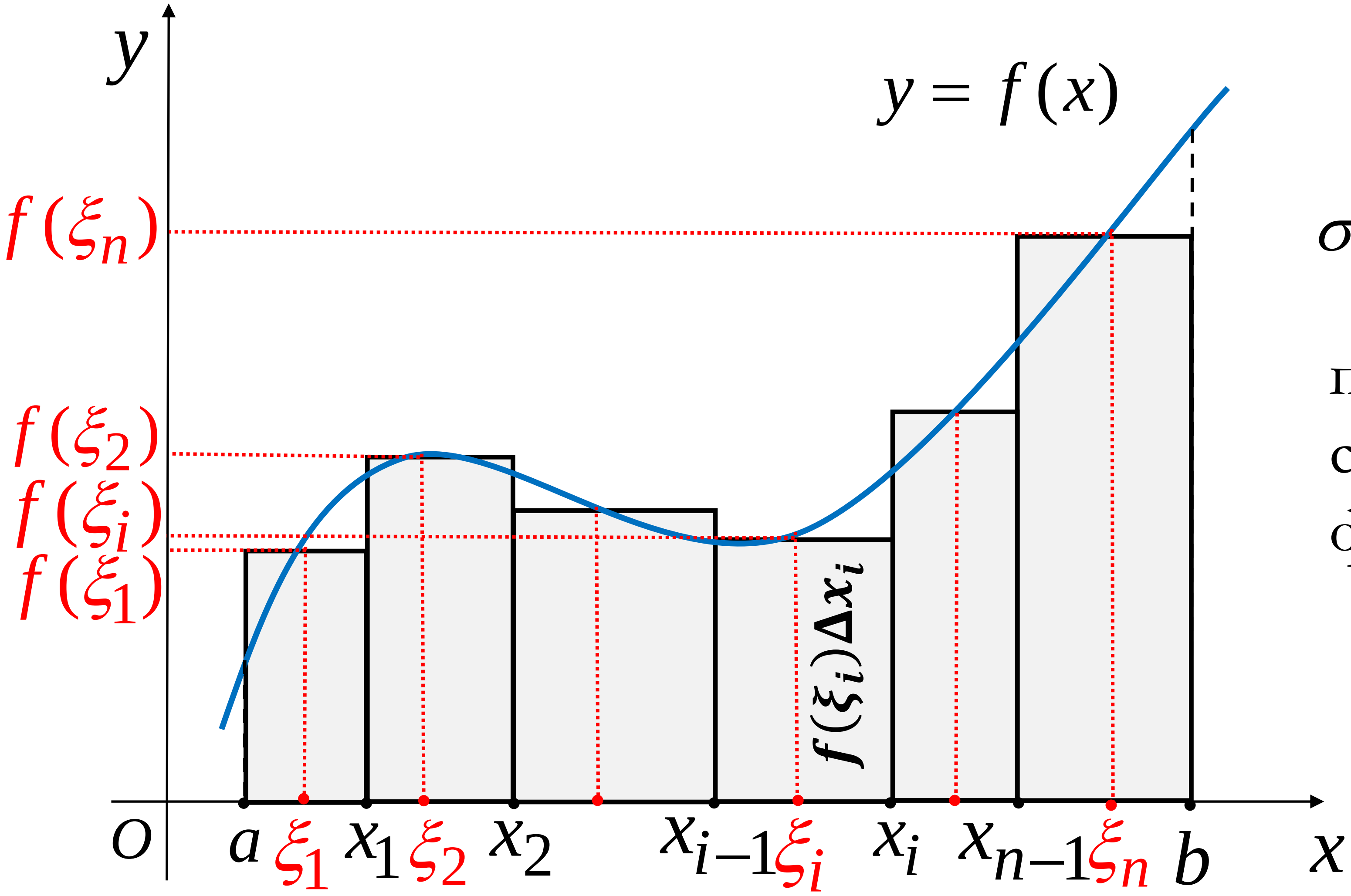
Понятие интегральной суммы

Выберем на каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i

$$x_{i-1} \le \xi_i \le x_i\,,\ \ 0 \le i \le n.$$

Составим **интегральную сумму**

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$



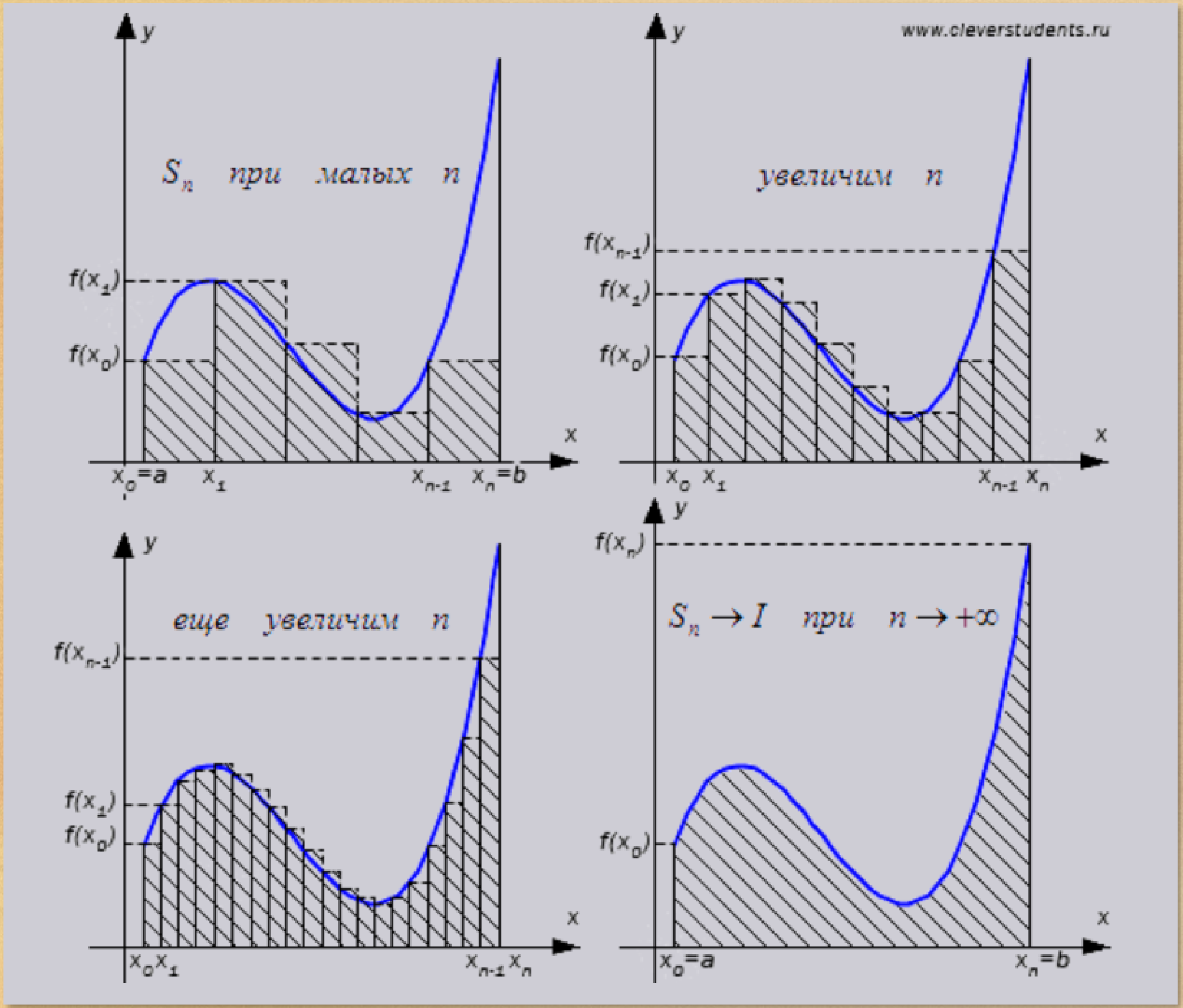
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i -$$

площадь ступенчатой фигуры

Понятие определенного интеграла

Обозначим через $d = \max\limits_i \Delta x_i$ – **диаметр** разбиения.

<u>Опр.</u> Пусть существует конечный предел интегральных сумм σ при $d \to 0$, и он не зависит от способа выбора точек $x_1, x_2, \ldots$ и точек $\xi_1, \xi_2, \ldots$ Тогда этот предел называется определенным интегралом от функции $y = f(x)$ на $[a, b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.



Понятие определенного интеграла

Если $f(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой **площадь криволинейной трапеции**, ограниченной линиями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$.

Понятие определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{d \to 0 \\ \forall x_i, \forall \xi_i}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Если этот конечный предел существует, то функция $y = f(x)$ называется **интегрируемой на отрезке** $[a, b]$.

Понятие определенного интеграла

Число *a* называется **нижним пределом**, *b* – *верхним пределом*, *f*(*x*) – **подынтегральной функцией**.

Какой переменной обозначается переменная интегрирования не имеет значения:

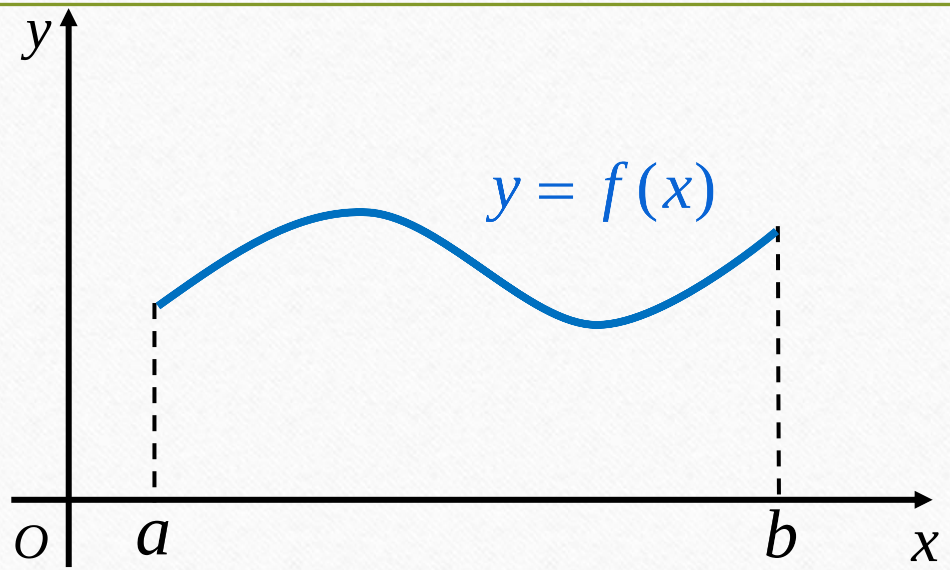
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

Теоремы об интегрируемости функции

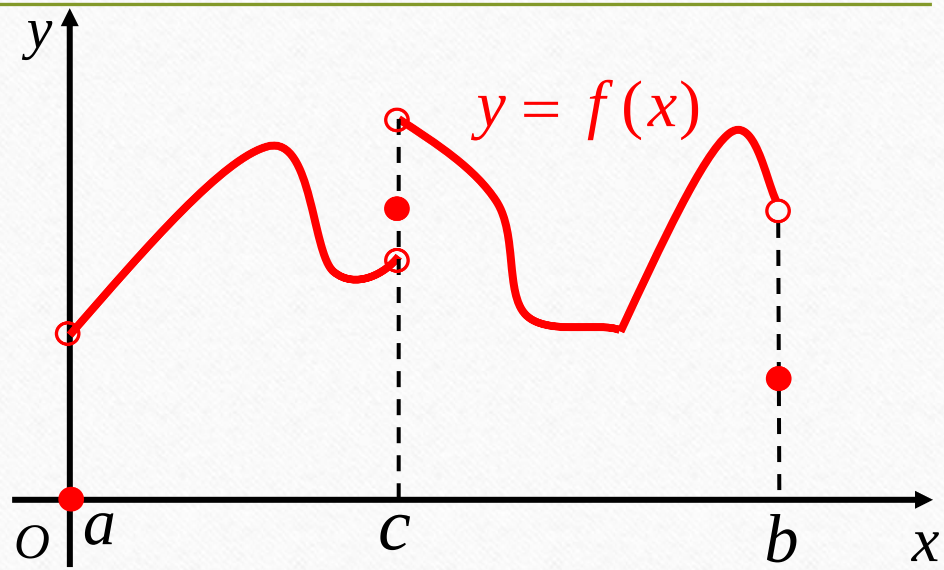
Теорема 1. Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на нем.

Теорема 2. Если функция $f(x)$ определена, ограничена и имеет конечное число точек разрыва на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теоремы об интегрируемости функции



T1: функция непрерывна на отрезке



T2: функция огранич. и имеет конечн. число точек разрыва I рода на отрезке.

Свойства определенного интеграла

$$1)\ \int_a^a f(x)dx = 0 \qquad 2)\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$3)\ \int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

Константу можно вынести за знак определенного интеграла

Свойства определенного интеграла

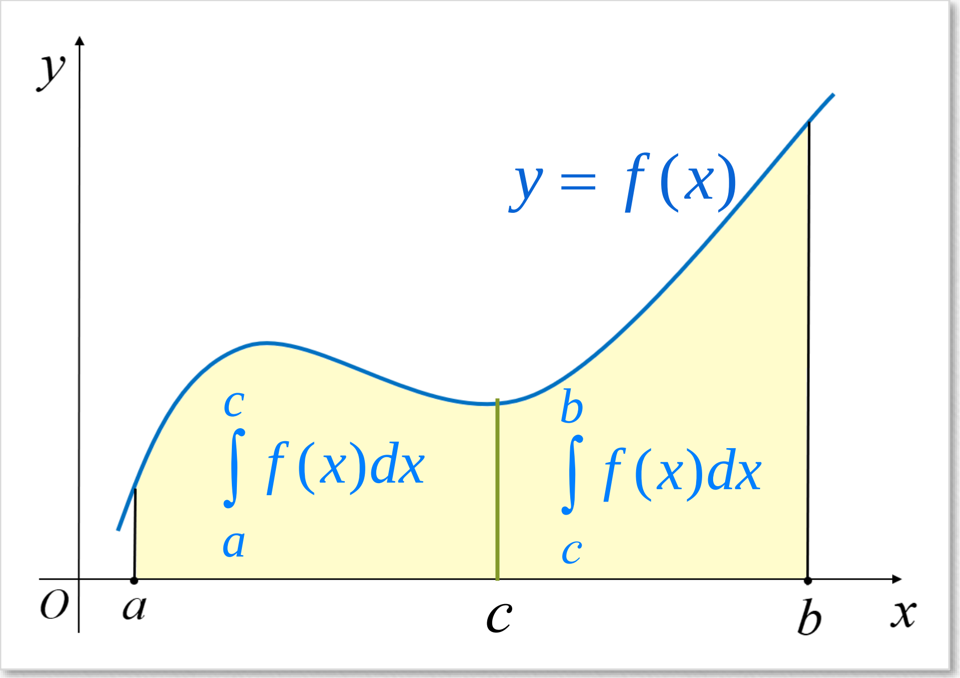
$$4)\ \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

Определенный интеграл от суммы/разности функций равен сумме/разности определенных интегралов.

Свойства определенного интеграла

$$5)\ \int_a^b f(x)dx =$$

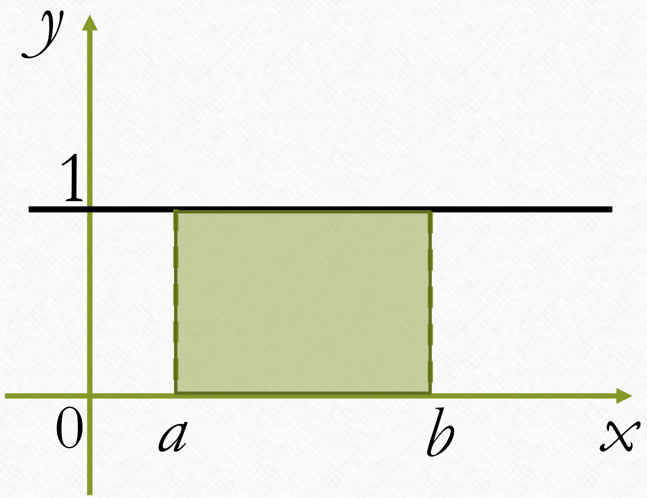
$$= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



Свойства определенного интеграла

6) $\int\limits_a^b dx = b - a$

Если подынтегральная функция равна 1, то определенный интеграл равен длине отрезка.



Свойства определенного интеграла

<u>Доказательство</u>.

(1), (2) – по соглашению. (3) $\int_a^b cf(x)dx =$ [по определению]=

$$= \lim_{\substack{d\to 0 \\ \forall x_i, \forall \xi_i}} \sum_{i=1}^{n} cf(\xi_i)\Delta x_i = \lim_{\substack{d\to 0 \\ \forall x_i, \forall \xi_i}} c\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

Свойства определенного интеграла

$$= \lim_{\substack{d \to 0 \\ \forall x_i, \forall \xi_i}} c \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = c \lim_{\substack{d \to 0 \\ \forall x_i, \forall \xi_i}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = c \int_a^b f(x) dx \,\blacksquare$$

(4) упр. (5) без док-ва

Свойства определенного интеграла

$$(6)\ \int_a^b dx = \lim_{\substack{d\to 0\\ \forall x_i,\forall \xi_i}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(\xi_i)=1 \end{array}\right] =$$

$$= \lim_{\substack{d\to 0\\ \forall x_i,\forall \xi_i}} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \lim_{\substack{d\to 0\\ \forall x_i,\forall \xi_i}} \big(\underbrace{\Delta x_1 + \Delta x_2 + \ldots + \Delta x_n}_{b-a}\big) = b - a\ \blacksquare$$

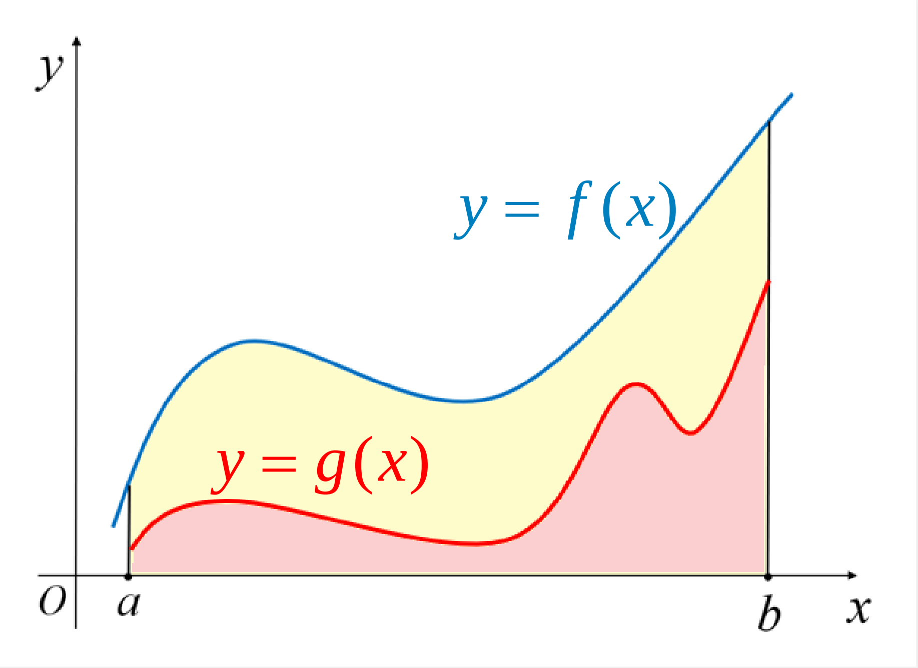
Формулы оценки определенных интегралов

(1) Если $f(x) \geq 0$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq 0$

(2) Если $f(x) \geq g(x)$ на $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx \geq \int\limits_a^b g(x)dx.$

Формулы сохранения неравенства при переходе к определенному интегралу

Геометрический смысл формулы (2) оценки определенных интегралов



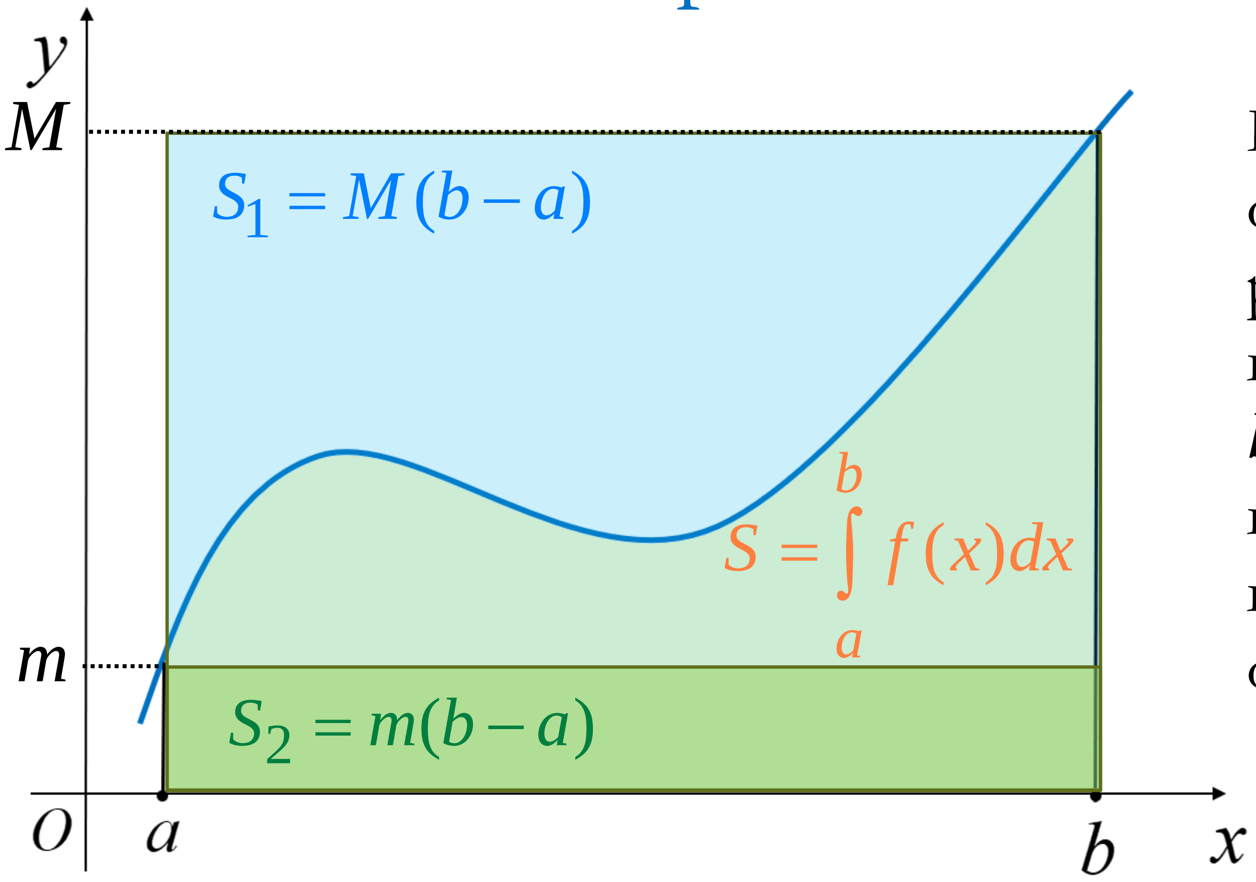
Площадь под графиком функции $y = f(x)$ больше или равна площади под графиком функции $y = g(x)$.
(Здесь $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$ на $[a, b]$).

Формулы оценки определенных интегралов

(3) Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$ и m и M – ее наименьшее и наибольшее значения на $[a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Геометрический смысл оценки (3)



Площадь S под графиком функции $y = f(x)$ меньше или равна площади S_1 прямоугольника с основанием $b - a$ и высотой M, но больше или равна площади прямоугольника S_2 с основанием $b - a$ и высотой m.

Формулы оценки определенных интегралов

Доказательство (1),(2) - упр.

Указание воспользоваться определением опред. интеграла и свойством сохранения неравенства при переходе к пределу.

Формулы оценки определенных интегралов

Доказательство (3). По условию $m \le f(x) \le M$ для любого $x \in [a, b]$.

Применяя оценку (2), имеем $\int_a^b m\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b M\,dx$

По свойствам (3), (6), имеем $m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$