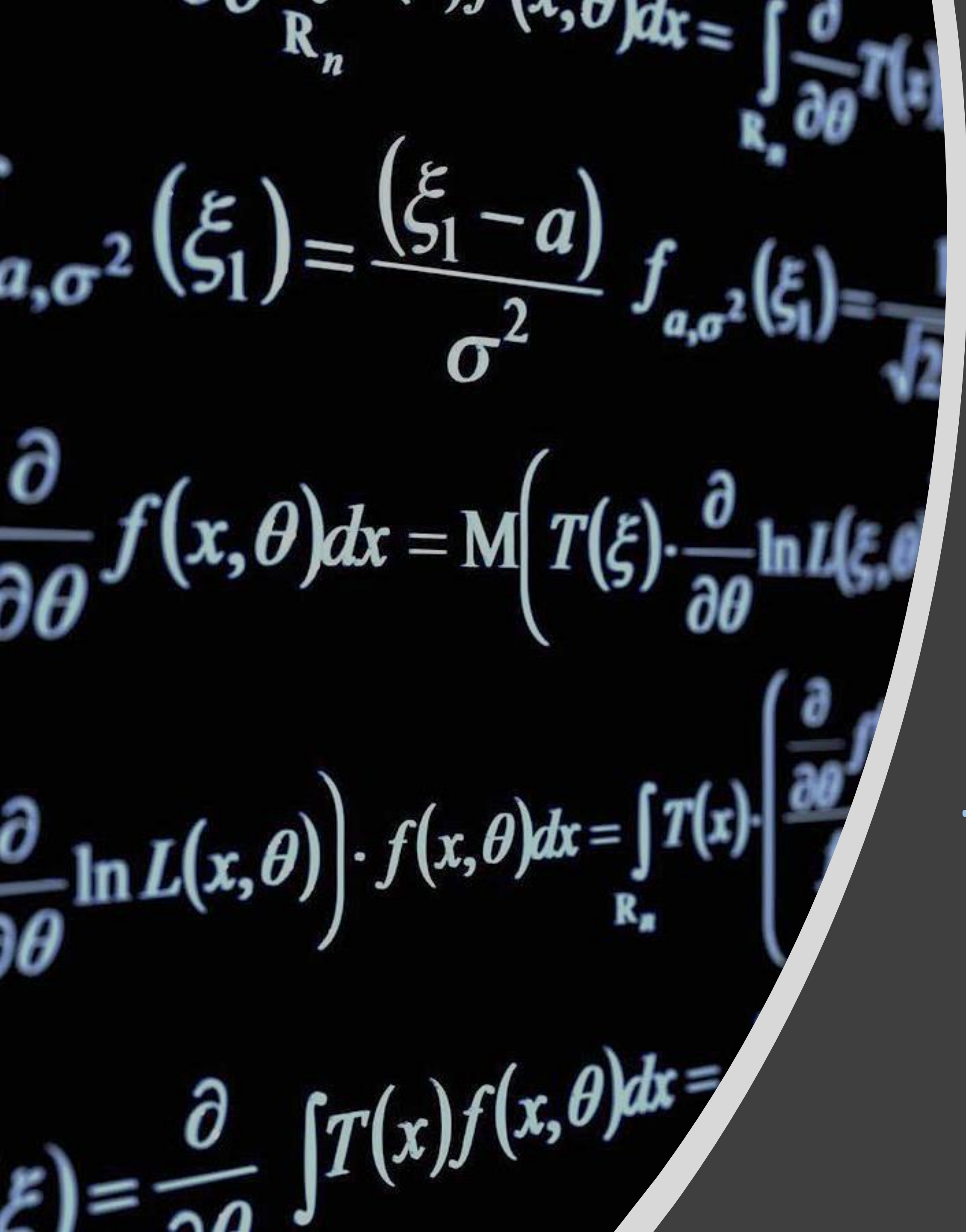


Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Презентации сделана на основе лекций

к.ф.-м.н., доцента Щербаковой В.А.

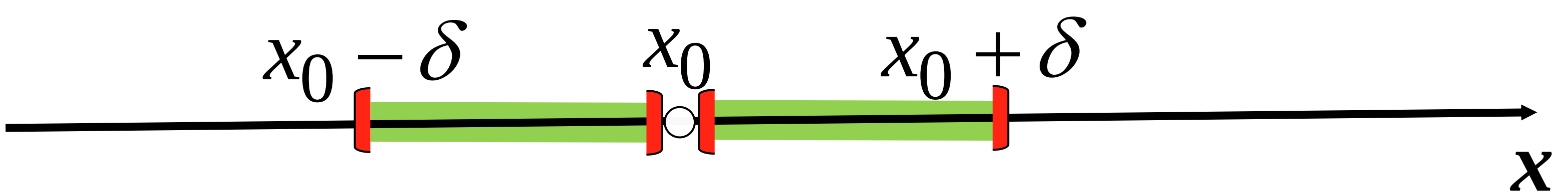
Лекция 10 Математический анализ Предел функции

Определение выколотой δ-окрестности

<u>Опр.</u> Выколотой δ-окрестностью точки x_0 называется множество

$$\{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \delta\}$$

т.е., объединен. интервалов $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$

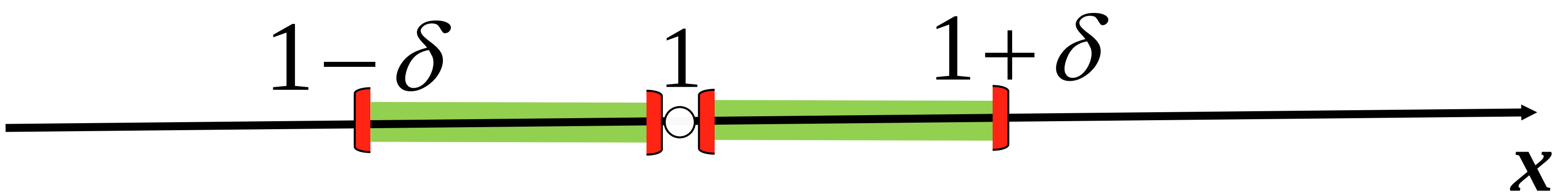


Обозначение: $\breve{O}_\delta(x_0)$

Определение выколотой δ-окрестности

<u>Пример 1.</u>

$$\breve{O}_{\delta}(1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x-1| < \varepsilon\} =$$
$$= (1-\delta;1) \cup (1;1+\delta)$$



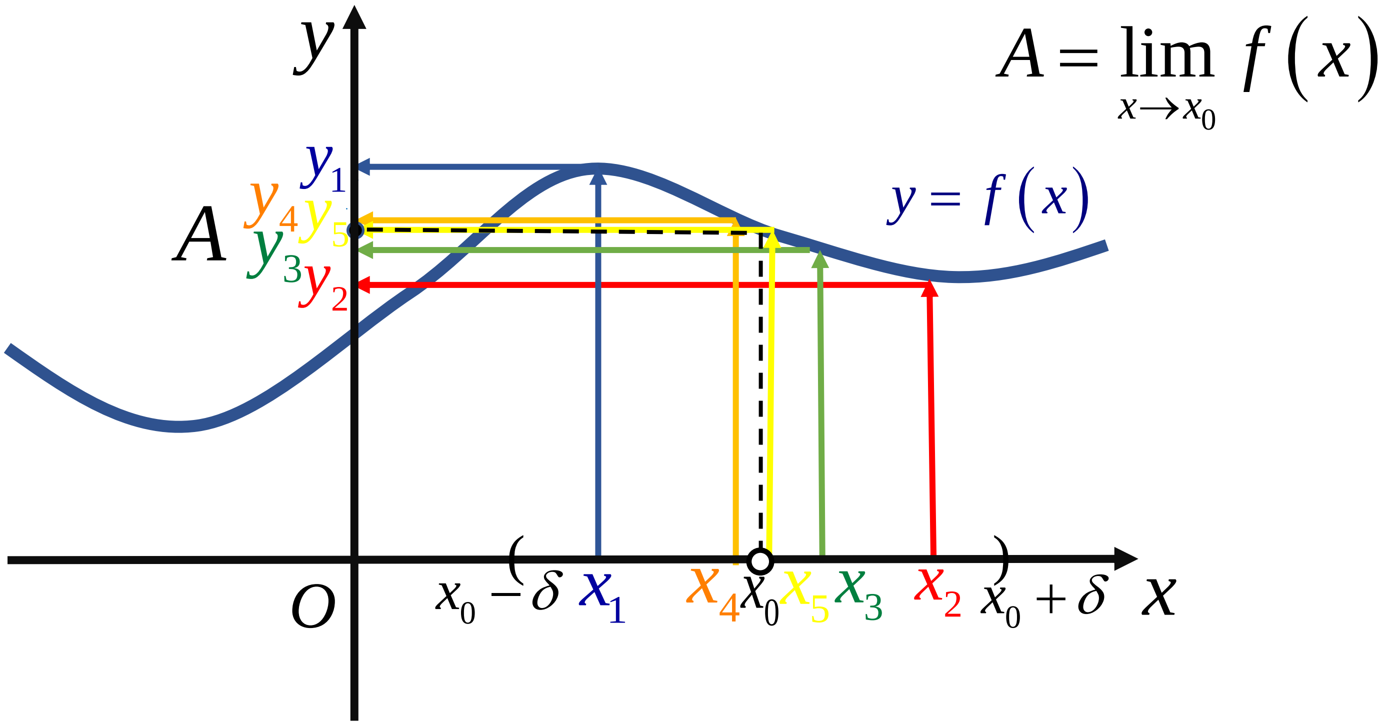
Определение предела функции

Пусть функция $f(x)$ определена в выколотой δ-окрестности $\breve{O}_\delta(x_0)$.

<u>Опр. (по Гейне)</u> Пределом функции $f(x)$ в точке x_0 называется число A, такое, что для любой последовательности $\{x_n\}$, $x_n \in \breve{O}_\delta(x_0)$, предел которой равен x_0 (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Определение предела функции



Для вычисления предела функции, необходимо знать, что происходит в окрестности точки x_0, за исключением самой точки x_0

Определение предела функции

<u>Пример 1.</u> Докажем, что $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

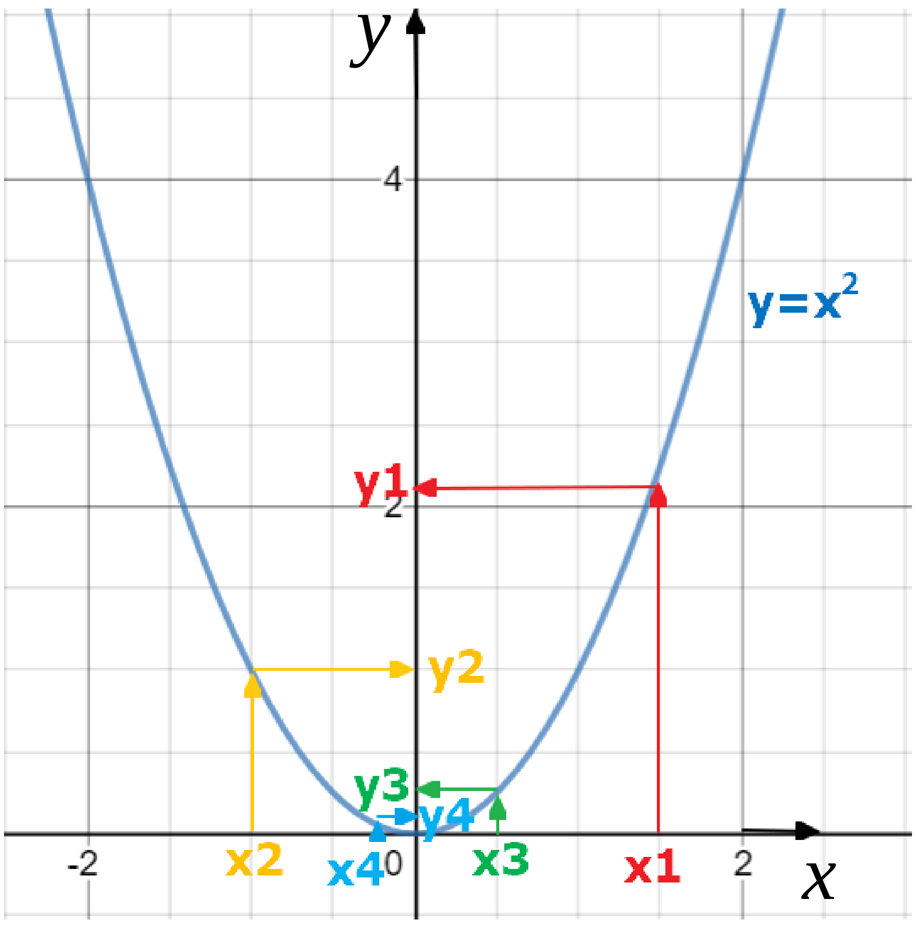
Здесь $f(x) = x^2$, $x_0 = 0$, $A = 0$.

Пусть $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, $x_n \neq 0$.

Тогда для $y_n = f(x_n) = (x_n)^2$

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} (x_n)^2 = \left(\lim_{n \to \infty} x_n\right)^2 = 0 \blacksquare$$

Определение предела функции



$$\lim_{x \to 0} x^2 = 0$$

Единственность предела функции

Теорема 1. Если существует предел функции в точке, то он единственный.

Док-во по опред.

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = B.$

Возьмем послед-ть $\{x_n\}, x_n \neq x_0,$ сходящуюся к x_0.

Тогда $\{f(x_n)\}$ сходится к A и к B.

Но послед-ть может иметь только один предел. Значит $A = B$.

Арифметические свойства предела функции

<u>Теорема 2</u> (арифметические свойства предела)
Пусть существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B,$

тогда существует

$$(1) \lim_{x\to x_0}\big(f(x) \pm g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = A \pm B;$$

$$(2) \lim_{x\to x_0}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = A \cdot B;$$

Арифметические свойства предела функции

$$(3)\ \lim_{x\to x_0}\left(\text{c}\cdot f(x)\right)=\text{c}\cdot\lim_{x\to x_0}f(x)=\text{c}\cdot A;$$

$$(4)\ \lim_{x\to x_0}(f(x))^m=\left(\lim_{x\to x_0}f(x)\right)^m=A^m;$$

$$(5)\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B},\ \text{если } B\neq 0.$$

Арифметические свойства предела функции

<u>Доказательство.</u>

(1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0,\ x_n \neq x_0.$

Тогда по опр. предела функции

для $y_n = f(x_n),\ z_n = g(x_n)$

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$$

Арифметические свойства предела функции

По арифметич. свойствам предела последов-ти

$$\lim_{n\to\infty}(y_n+z_n) = \underline{\lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)+g(x_n)\big)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \underline{A+B}$$

По опр. предела функции

$$\Rightarrow \underline{\lim_{x\to x_0}\big(f(x)+g(x)\big) = A+B}$$

Арифметические свойства предела функции

<u>Примеры.</u>

$$1)\ \lim_{x\to 0} x^2 = \left(\lim_{x\to 0} x\right)^2 = 0^2;\quad 2)\ \lim_{x\to 0}(\sin x) = \sin 0 = 0;$$

$$3)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \left[\frac{0}{0} - \text{неопределенность}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 1+1 = 2$$

Арифметические свойства предела функции

$$4)\ \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\left[\frac{0}{0}-\text{неопределенность}\right]=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+3}\right)^2-4}{\left(x-1\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

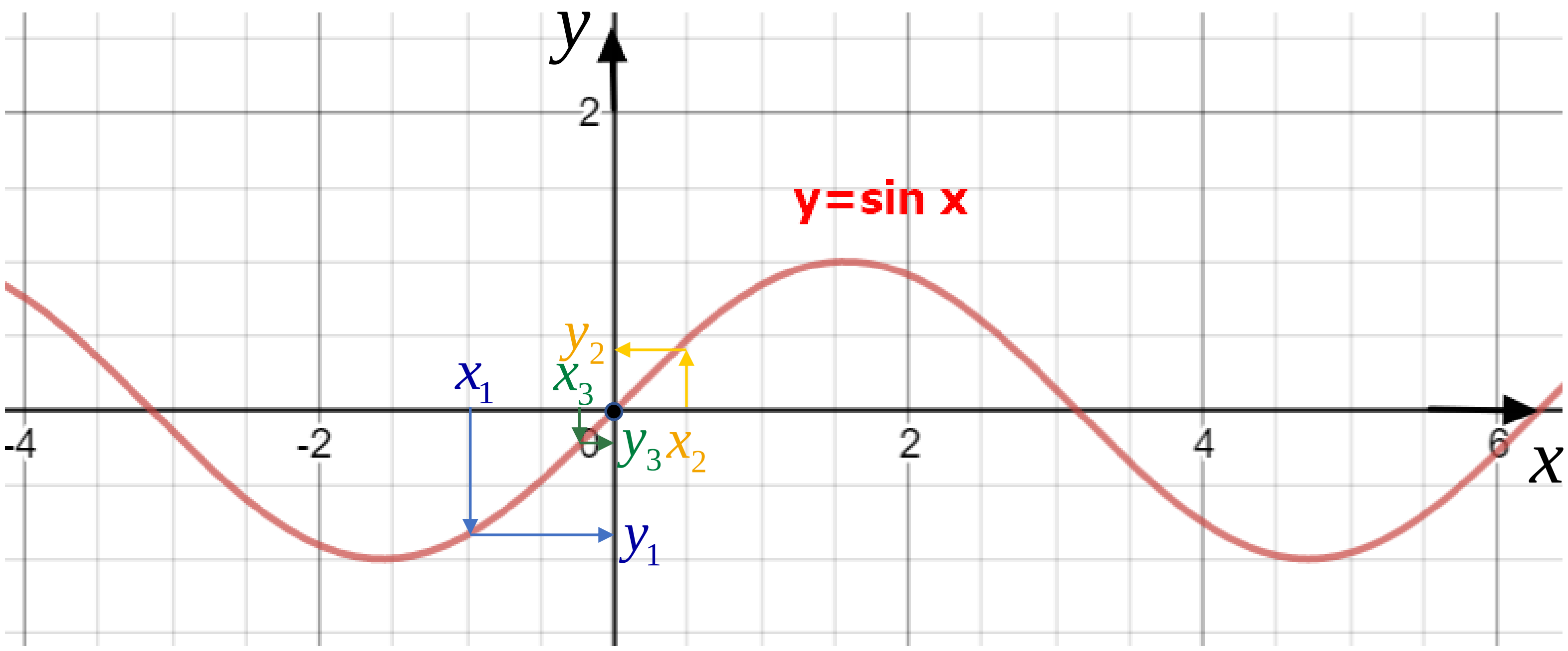
Арифметические свойства предела функции

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(x+3)-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\left[\frac{1}{\sqrt{1+3}+2}\right]=\frac{1}{4}$$

Арифметические свойства предела функции



$$2)\ \lim_{x\to 0}\sin x = 0\ (\text{докажем позже})$$

Свойства предела функции

<u>Теорема 3</u> (<u>о сохранении неравенства при переходе к пределу</u>)

Пусть существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A,\ \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B.$

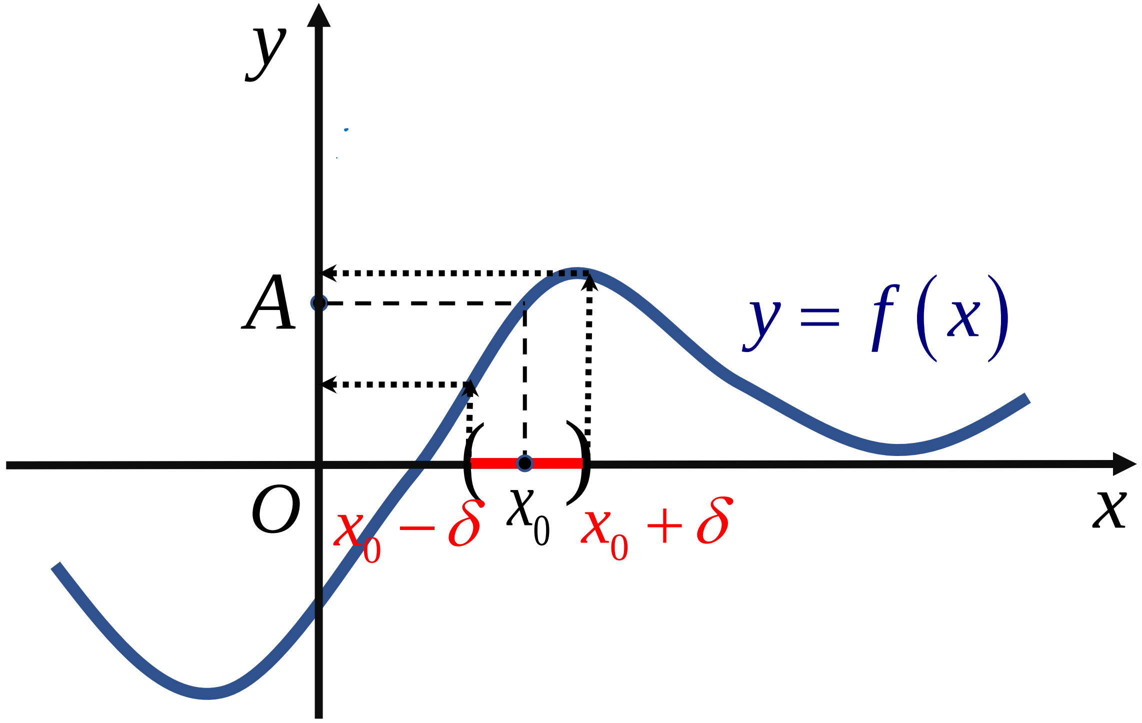
Тогда

(1) Если $f(x) > g(x)$ в некоторой выколотой δ-окрестности $\breve{O}_\delta(x_0)$, то $A \geq B$.

(2) Если $A > 0$ $(A < 0)$, то $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ в некоторой выколотой δ-окрестности $\breve{O}_\delta(x_0)$ точки x_0.

Свойства предела функции

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x),\ A > 0$$



Свойства предела функции

Доказательство

(1) так же, как и (1) в теореме 2 (упр.)

(2) без док-ва.

Свойства предела функции

<u>Теорема 4 (о пределе сложной функции)</u>

Пусть для функции $y = f(x)$ существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ и $f(x) \neq y_0$ при $x \neq x_0$.

Кроме того, пусть для функции $z = g(y)$ существует $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = A$.

Тогда существует

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \begin{bmatrix} y = f(x) \\ y \to y_0 \end{bmatrix} = \lim_{y \to y_0} g(y) = A.$$

Свойства предела функции

Доказательство по определению (упр).

Пример 6. $f(x) = \sin x, g(y) = y^2$

$$\lim_{x\to 0} (\sin x)^2 = \begin{bmatrix} y = \sin x \\ y \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{y\to 0} y^2 = 0^2 = 0$$

Пример 7. $f(x) = x^2, g(y) = \sin y$

$$\lim_{x\to 0} \sin x^2 = \begin{bmatrix} y = x^2 \\ y \to 0 \end{bmatrix} = \lim_{y\to 0} \sin y = \sin 0 = 0$$

Свойства предела функции

Замечание. В определении предела можно считать, что x_0 может быть равно $\infty, +\infty, -\infty$.

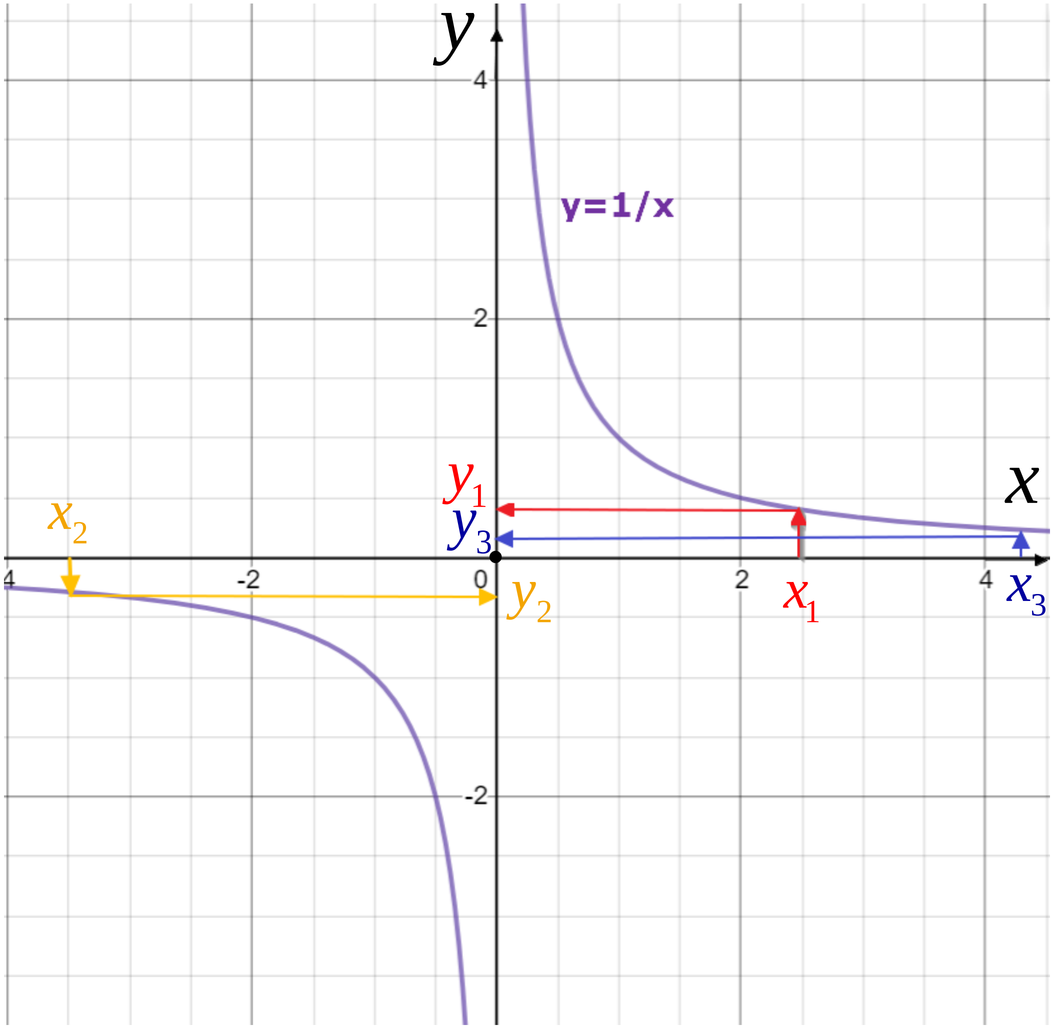
Пример 8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0$

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$.

Тогда для $y_n=f(x_n)=\frac{1}{x_n}$

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0 \ \blacksquare$$

Свойства предела функции



$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Бесконечно малая функция

Опр. Функция $y = f(x)$ называется бесконечно малой (б.м.ф.) при $x \to x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Замечание. x_0 может быть и числом, и бесконечностью.

Пример 9. $y = x^2$, $y = \sin x$ – б.м.ф. при $x \to 0$.

Пример 10. $y = \frac{1}{x}$ – б.м.ф. при $x \to \infty$.

Бесконечно малая функция

Опр. Функция $y = f(x)$ называется ограниченной на множестве X, если существует такое число c, что для любого $x \in X$ справедливо $|f(x)| \leq c$.

Пример 11. $y = \sin x$ – ограничена на $\mathbb{R}$ $(c = ?)$

Пример 12. $y = x^2$ – ограничена на $[-1,1]$ $(c = ?)$

Пример 13. $y = \frac{1}{x}$ – ограничена на $[1, +\infty)$ $(c = ?)$

Бесконечно малая функция

Свойства б. м. ф. аналогичны свойствам б. м. последовательностей.

(1) Сумма/разность б.м.ф – б.м.ф.

(2) Б.м.ф, умноженная на ограниченную - б.м.ф.

(3) Б.м.ф., умноженная на константу – б.м.ф.

(4) Произведение б.м.ф-ций – б.м.ф.

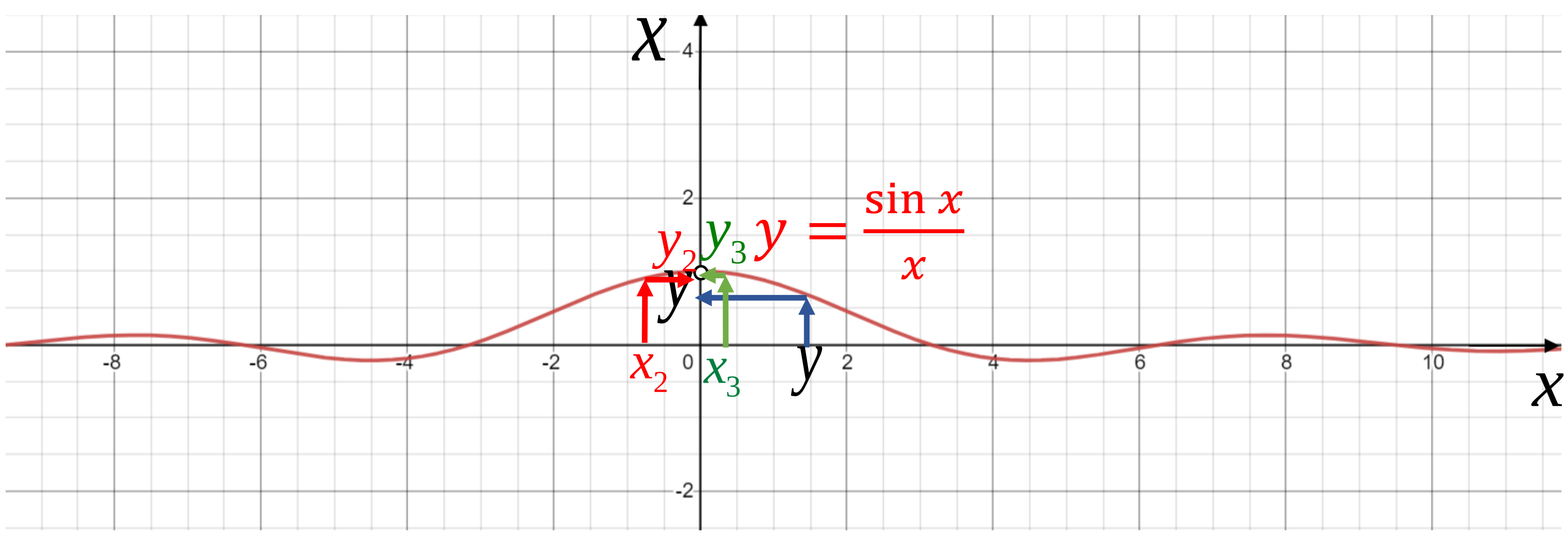
Док-во аналогично док-ву (1) теоремы 2 (упр.)

Бесконечно малая функция

<u>Пример 14.</u> $y = \dfrac{\sin x}{x}$ – б.м.ф. при $x \to \infty$:

$$\frac{\sin x}{x} = \sin x \cdot \frac{1}{x} \qquad y = \sin x \text{ – ограниченная}$$

$$y = \frac{1}{x} \text{ – б.м.ф. при } x \to \infty$$



Связь функции, имеющей предел и б.м.ф.

Теорема 5. Существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$ существует б.м.ф. $\alpha(x)$ т.ч. $f(x) = A + \alpha(x)$

Док-во аналогично док-ву такой же теоремы для сходящихся последов-тей (упр).

Определение б.б.ф.

Опр. (по Гейне) Функция $f(x)$ называется б.б.ф. при $x \to x_0$
если для любой последовательности $\{x_n\}$,
$x_n \neq x_0$, предел которой равен x_0 (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$),
последовательность $\{f(x_n)\}$ бесконечно большая
(т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \infty$).

Замечание. x_0 может быть и числом, и бесконечностью.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$.

Определение б.б.ф.

Пример 15. $y = x^2$ – б.б.ф. при $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 = [\infty^2] = \infty$$

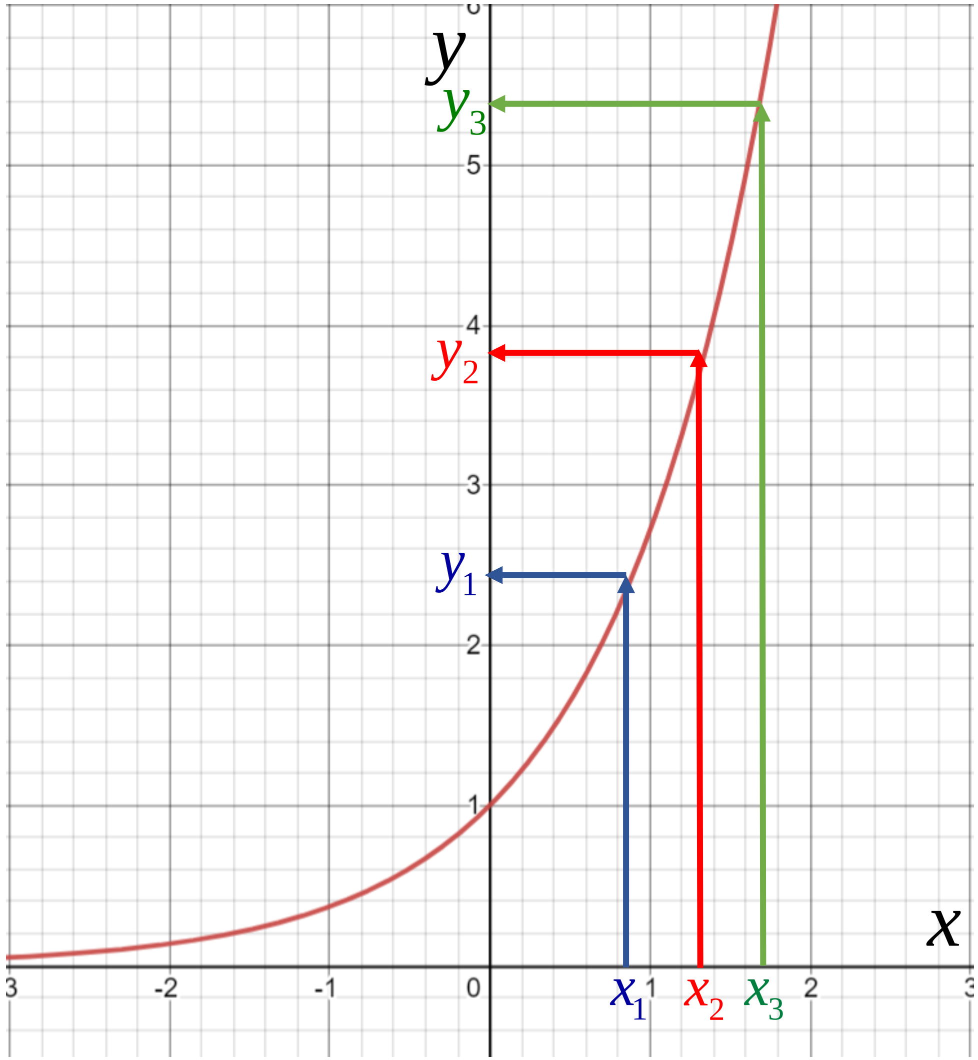
Пример 16. $y = \frac{1}{x}$ – б.б.ф. при $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty$$

Пример 17. $y = e^x$ – б.б.ф. при $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = [e^{+\infty}] = +\infty$$

Свойства предела функции



$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Связь б.м.ф и б.б.ф.

Теорема 6 (связь б.м.ф с б.б.ф).

(1) $\alpha(x) -$ б.м.ф. в точке $x_0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\alpha(x)} -$ б.б.ф. в точке x_0

(2) $\beta(x) -$ б.б.ф. в точке $x_0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\beta(x)} -$ б.б.м. в точке x_0

Док-во по определению. через последовательности (упр.)

Связь б.м.ф и б.б.ф.

Пример 14

(1) $\alpha(x) = x -$ б.м.ф. при $x \to 0 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\alpha(x)} = \frac{1}{x} -$ б.б.ф. при $x \to 0$

(2) $\beta(x) = x -$ б.б.ф. при $x \to \infty \Leftrightarrow$

$\frac{1}{\beta(x)} = \frac{1}{x} -$ б.м.ф. при $x \to \infty$

Связь б.м.ф и б.б.ф.

Решение «ладошки»

<u>Пример 15.</u> Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-3}+1}{\sqrt[3]{x^2+3}-2}$. $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-3}+1}{\sqrt[3]{x^2+3}-2}=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2}+1}{\sqrt[3]{x^2}-2}\right]$$

$$=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt[3]{x^2}}\right]=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x^{2/3}}\right]=\left[2\lim_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}\right]=\infty$$

Связь б.м.ф и б.б.ф.

Математическое решение

<u>Пример 15.</u> Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-3}+1}{\sqrt[3]{x^2+3}-2}$. $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^2+2x-3}+1}{\sqrt[3]{x^2+3}-2}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{\sqrt{4x^2+2x-3}+1}{x}}{\dfrac{\sqrt[3]{x^2+3}-2}{x}}=$$

Связь б.м.ф и б.б.ф.

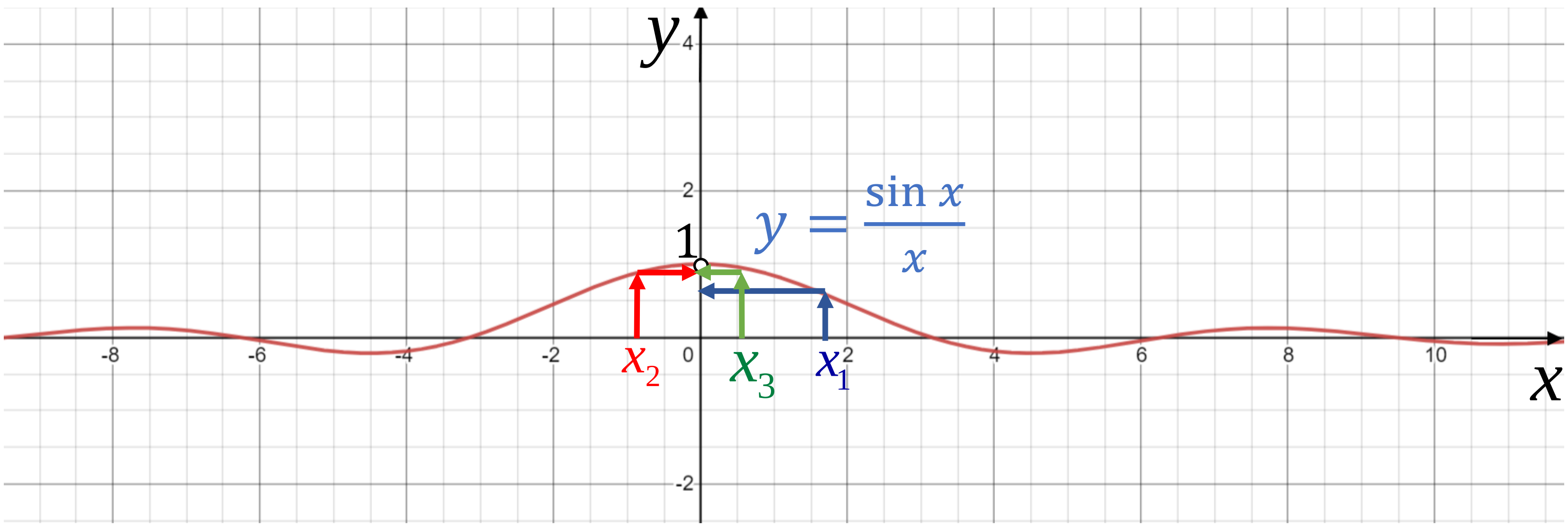
Математическое решение

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2+2x-3}{x^2}} + \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{\frac{x^2+3}{x^3}} - \frac{2}{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4 + \underset{\to 0}{\frac{2}{x}} - \underset{\to 0}{\frac{3}{x^2}}} + \underset{\to 0}{\frac{1}{x}}}{\sqrt[3]{\underset{\to 0}{\frac{1}{x}} + \underset{\to 0}{\frac{3}{x^3}}} - \underset{\to 0}{\frac{2}{x}}} = \left[\frac{\sqrt{4+0-0}+0}{\sqrt[3]{0+0}-0}\right] = \left[\frac{2}{0}\right] = \infty$$

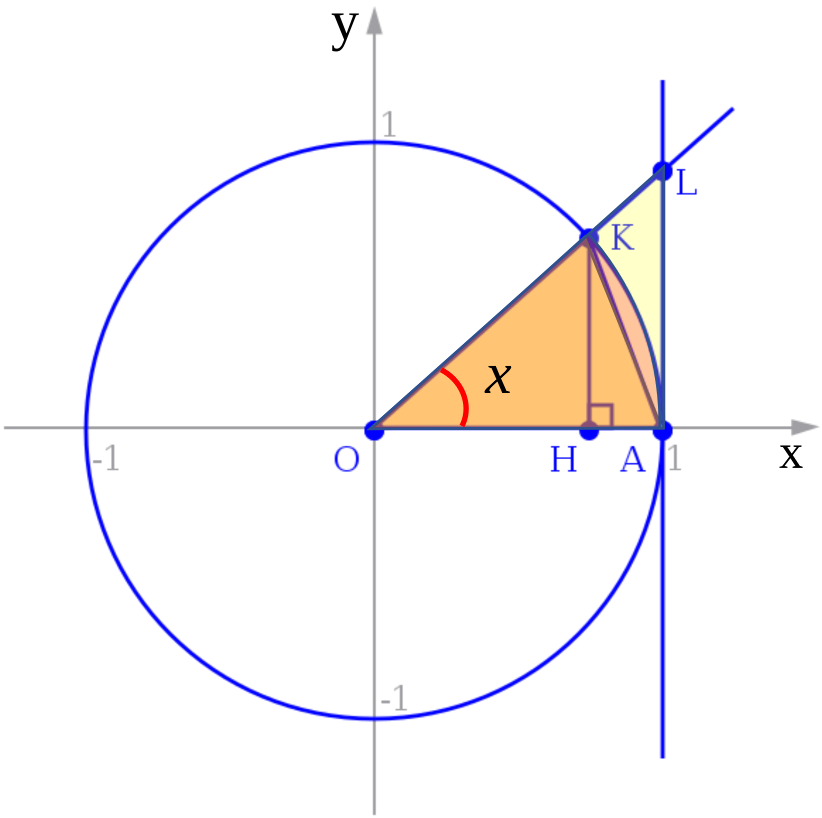
Первый замечательный предел

<u>Теорема 7.</u> $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$ $\left[\frac{0}{0}\right]$



Первый замечательный предел

<u>Доказательство.</u>



Можно считать, что $x > 0$

x мало

$$S_{\triangle AOK} < S_{\text{сект.}\, AOK} < S_{\triangle AOL}$$

$$\frac{1}{2} OA \cdot KH < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} OA \cdot LA$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x$$

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$

Первый замечательный предел

<u>Доказательство.</u>

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x \quad (:\sin x)$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

$$\underset{\substack{\downarrow x\to 0\\ 1}}{1} > \underset{\substack{\downarrow x\to 0\\ 1}}{\frac{\sin x}{x}} > \underset{\substack{\downarrow x\to 0\\ 1}}{\cos x} \quad \text{(правило двух милиционеров)}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \ \blacksquare$$

Первый замечательный предел

Следствия

(1) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x} = 1}$$

(2) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1}$$

(3) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1}$$

(4) $$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1}$$

Первый замечательный предел

<u>Доказательство следствий.</u>

(1) $$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\left[\frac{1}{1}\right]=1$$

$\frac{\sin x}{x}\to 1$

(2) $$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x\cdot x}=1$$

$\frac{\sin x}{x}\to 1$, $\cos x\to 1$

(3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\begin{bmatrix} y=\arcsin x\\ y\to 0\\ x=\sin y\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\sin y}=1$$

(4) - упр.

Первый замечательный предел

<u>Пример 16.</u> Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 2x}{2x}=\begin{bmatrix} y=2x \\ y\to 0 \end{bmatrix}=$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{2\sin y}{y}=2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=2\cdot 1=2$$

Второй замечательный предел

Теорема 8. $\boxed{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$ $[1^{\infty}]$

Следствия

(1) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e}$

(3) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x}=1}$

(2) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$

(4) $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a}$

Второй замечательный предел

<u>Доказательство следствий.</u>

(1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \begin{bmatrix} y = \dfrac{1}{x} \\ y \to \infty \end{bmatrix} = \lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y} = e$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln e = 1$

e

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{x}-1}{x} = \begin{bmatrix} y = e^{x}-1 \\ y \to 0 \\ x = \ln(y+1) \end{bmatrix} = \lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)} = 1$

(4) упр.

Второй замечательный предел

<u>Пример 17.</u> Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{2x+1}$

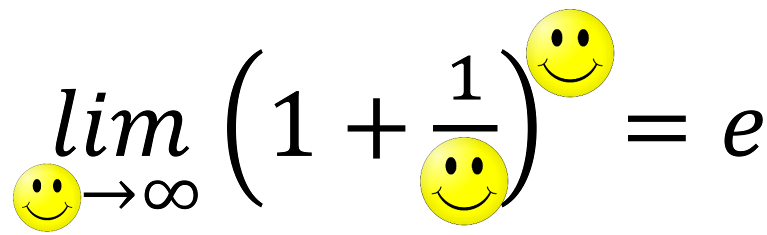
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{2x+1} = [1^{\infty}] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+3)-3-2}{x+3}\right)^{2x+1} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{(x+3)-5}{x+3}\right)^{2x+1} = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-5}{x+3}\right)^{2x+1} =$$

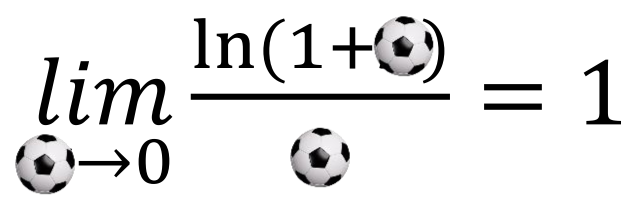
$$\left[\lim_{x\to\infty}\frac{x-2}{x+3} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x} = 1\right]$$

Второй замечательный предел

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}$$



$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1}$$



Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-5}}\right)^{2x+1}=\lim_{x\to\infty}\underbrace{\left(1+\frac{1}{\frac{x+3}{-5}}\right)^{\frac{x+3}{-5}}}_{e}{}^{\cdot\frac{1}{\frac{x+3}{-5}}\cdot 2x+1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{\frac{x+3}{-5}}\cdot 2x+1}=\lim_{x\to\infty}e^{\overbrace{\frac{-5(2x+1)}{x+3}}^{-10}}=e^{-10}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-5(2x+1)}{x+3}=\left[\lim_{x\to\infty}\frac{-5\cdot 2\cancel{x}}{\cancel{x}}\right]=\left[\lim_{x\to\infty}(-10)\right]=-10$$

Второй замечательный предел

<u>Пример 18.</u> Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sin x}-1}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^{\sin x}-1}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{2^{\overset{\to 0}{\sin x}}-1}{\sin x}}_{\to \ln 2}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}=$$

$$=\ln 2\cdot 1=\ln 2$$

$$\left[\lim_{x\to 0}\frac{2^{\sin x}-1}{\sin x}=\begin{bmatrix} y=\sin x\\ y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{2^{y}-1}{y}=\ln 2\right]$$