Лекция 1, 16.09.2011

1 Постановка задачи

1.1 Беззвездные языки

Класс *беззвездных языков* – это наименьший класс языков (над данным конечным алфавитом Σ), который

1. содержит все конечные языки,
2. вместе с любым языком L содержит его дополнение L^c,
3. вместе с любыми двумя языками L, K содержит их объединение $L+K$ и их произведение LK.

Хотим по данному регулярному выражению уметь определять, является ли задаваемый этим выражением язык беззвездным.

Присутствие итерации в записи регулярного выражения не всегда означает, что задаваемый им язык не является беззвездным. Пример:

$$(ab)^* = \Sigma^* \setminus (\Sigma^* a + b\Sigma^* + \Sigma^* a^2\Sigma^* + \Sigma^* b^2\Sigma^*, \quad \text{здесь} \quad \Sigma^* = (\emptyset)^c.$$

Упражнение 1. *Доказать, что языки* $\{ab+ba\}^*$ *и* $(a(ab)^*b)^*$ *являются беззвездными.*

Пример 1. *Языки* $(a^2)^*$ *и* $\{aba+b\}^*$ *не беззвездные.*

(Пока мы это не можем доказать.)

1.2 Кусочно тестируемые языки

Язык называется *кусочно тестируемым*, если он является булевой комбинацией языков вида $\Sigma^* a_1 \Sigma^* a_2 \Sigma^* \ldots \Sigma^* a_k \Sigma^*$, где $a_i \in \Sigma$.

Хотим по данному регулярному выражению уметь определять, является ли задаваемый им язык кусочно тестируемым.

Пример 2. *Язык* $\Sigma^* ab \Sigma^*$ *является кусочно тестируемым тогда и только тогда, когда* $\Sigma = \{a, b\}$.

2 Отношения Грина

Для полугруппы S через S^1 будем обозначать наименьший моноид, содержащий S. Таким образом, $S^1 = S$, если в S есть единица, и $S^1 = S \cup \{1\}$, если в S нет единицы.

Отношениями Грина называются следующие бинарные отношения:

1. $a\mathscr{R}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1$. Это означает, что $\exists s, t \in S^1$ $(a = bs$ & $b = at)$, т.е. элементы a и b делят друг друга справа.

2. $a\mathscr{L}b \Leftrightarrow S^1a = S^1b$. Это означает, что $\exists s, t \in S^1$ $(a = sb$ & $b = ta)$, т.е. элементы a и b делят друг друга слева.

3. $a\mathscr{H}b \Leftrightarrow aS^1 = bS^1, S^1a = S^1b$, т.е. $\mathscr{H} = \mathscr{R} \cap \mathscr{L}$.

4. $a\mathscr{J}b \Leftrightarrow S^1aS^1 = S^1bS^1$. Это означает, что $\exists s, t, x, y \in S^1$ $(a = sbt$ & $b = xay)$.

Упражнение 2. *Отношения Грина являются отношениями эквивалентности.*

Также можно рассмотреть связанные с отношениями Грина отношения предпорядка:

1. $a \leq_{\mathscr{R}} b \Leftrightarrow aS^1 \subseteq bS^1$.

2. $a \leq_{\mathscr{L}} b \Leftrightarrow S^1a \subseteq S^1b$.

3. $a \leq_{\mathscr{H}} b \Leftrightarrow aS^1 \subseteq bS^1, S^1a \subseteq S^1b$.

4. $a \leq_{\mathscr{J}} b \Leftrightarrow S^1aS^1 \subseteq S^1bS^1$.

Предложение 1. *Отношения $\leq_{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{L}$ стабильны справа, а $\leq_{\mathscr{R}}$ и $\mathscr{R}$ – слева.*

Доказательство. $a \leq_{\mathscr{L}} b \Leftrightarrow a = ub$ для некоторого $u \in S^1$. Умножим на c справа: $ac = ubc \Leftrightarrow ac \leq_{\mathscr{L}} bc$. □

Если α и β бинарные отношения, то

$$\alpha\beta = \{(x, y) \mid \exists z\ ((x, z) \in \alpha \ \& \ (z, y) \in \beta)\}.$$

Предложение 2. *$\mathscr{L}\mathscr{R} = \mathscr{R}\mathscr{L}$ и потому отношение $\mathscr{D} = \mathscr{L}\mathscr{R}$ является наименьшим отношением эквивалентности, содержащим $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$ одновременно.*

Доказательство. Пусть $a\mathscr{L}\mathscr{R}b$: $\exists c \in S$ такое, что $a\mathscr{L}c$ и $c\mathscr{R}b$, т.е. $\exists\, u, v \in S^1, \exists\, x, y \in S^1 : a = uc, c = va, c = bx, b = cy$. Через d обозначим $ay = ucy = ub$. Покажем, что $a\mathscr{R}d$ и $d\mathscr{L}b$. $a\mathscr{L}c \Rightarrow ay\mathscr{L}cy \Rightarrow d\mathscr{L}b$. $c\mathscr{R}b \Rightarrow uc\mathscr{R}ub \Rightarrow a\mathscr{R}d$. Получили, что $a\mathscr{R}\mathscr{L}b$, т.е. $\mathscr{L}\mathscr{R} \subseteq \mathscr{R}\mathscr{L}$. Аналогично получаем обратное включение. Таким образом, $\mathscr{L}\mathscr{R} = \mathscr{R}\mathscr{L}$. Обозначим $\mathscr{L}\mathscr{R}$ через $\mathscr{D}$.

Ясно, что $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{D}$ и $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{D}$. Покажем, что $\mathscr{D}$ является отношением эквивалентности:

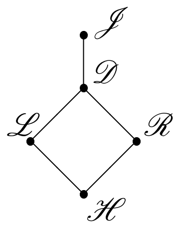
1. Рефлексивность – очевидно.

2. Симметричность – сразу следует из того, что $\mathscr{L}\mathscr{R} = \mathscr{R}\mathscr{L}$.

3. Транзитивность – пусть $a\mathscr{D}b$ и $b\mathscr{D}c$. Имеем $a\mathscr{L}x\mathscr{R}b\mathscr{L}y\mathscr{R}c$ для некоторых x и y. Отсюда $x\mathscr{R}\mathscr{L}y$, а тогда по доказанному выше $x\mathscr{L}\mathscr{R}y$. Поэтому $x\mathscr{L}z\mathscr{R}y$ для некоторого z и $a\mathscr{L}z$, $z\mathscr{R}c$, откуда $a\mathscr{L}\mathscr{R}c$.

$\square$

Таким образом, имеет место следующая диаграмма включений.



Теперь уже можно сформулировать ответы на поставленные в предыдущем разделе вопросы.

1. Регулярный язык является беззвездным тогда и только тогда, когда его синтаксический моноид является $\mathscr{H}$*-тривиальным*, т.е. из $a\mathscr{H}b$ следует, что $a = b$ (Шютценберже, 1966).

2. Регулярный язык является кусочно тестируемым тогда и только тогда, когда его синтаксический моноид является $\mathscr{J}$*-тривиальным*, т.е. из $a\mathscr{J}b$ следует, что $a = b$ (Саймон, 1972).