Курс «Математика»

Департамент фундаментальной и прикладной химии, I семестр (I курс)

Лекторы:

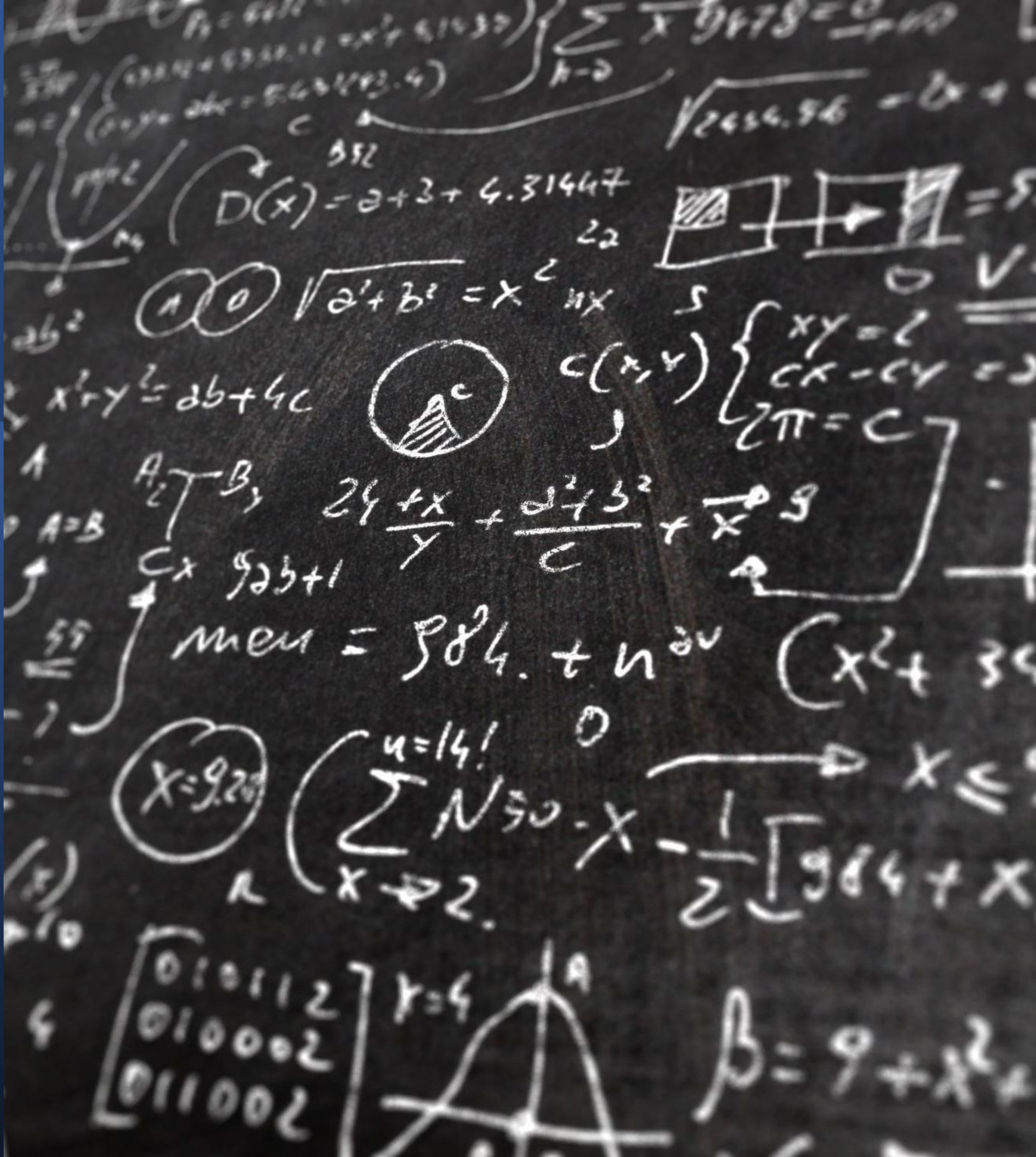
к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.,

к.ф.-м.н., доцент Перминова Ю.В.

Лекция 1,2 Векторная алгебра Основные понятия

Презентации сделана на основе лекций

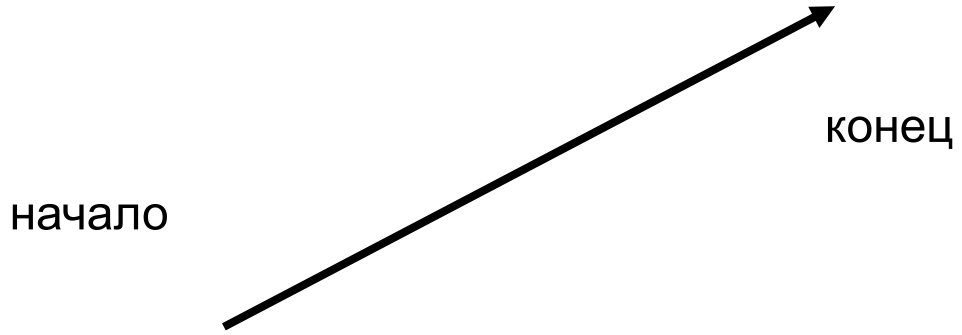
к.ф.-м.н., доцента Щербаковой В.А.



Глава 1. Векторная алгебра

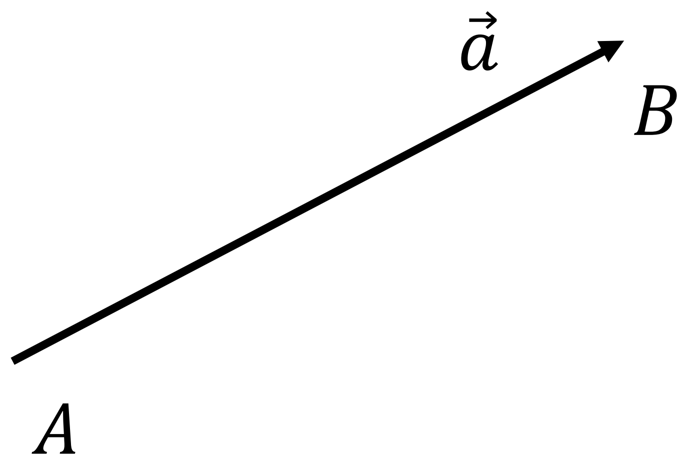
§1. Основные понятия

Опр. Вектором называется направленный отрезок, т.е. отрезок, на котором указано направление «откуда» и «куда».



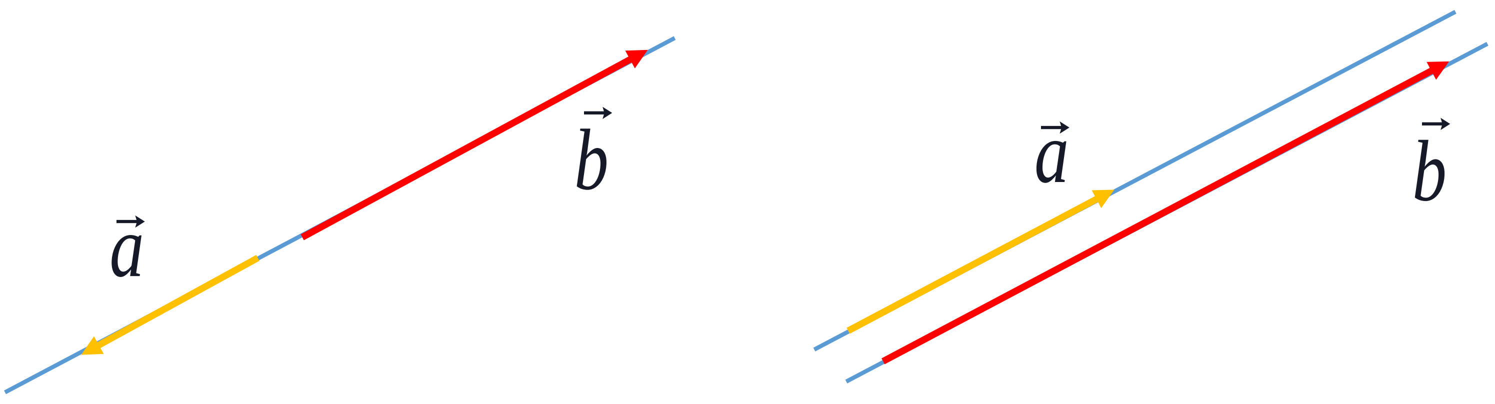
§1. Основные понятия

Обозначение: $\vec{a}, \bar{a}, \overrightarrow{AB}, \overline{AB}$.



§1. Основные понятия

<u>Опр.</u> Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

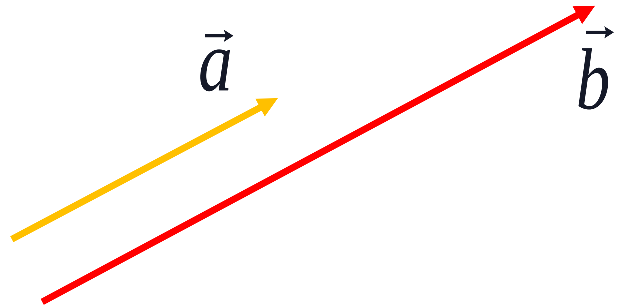


Обозначение: $\vec{a}||\vec{b}$.

§1. Основные понятия

<u>Опр.</u> Векторы называются сонаправленными, если они коллинеарны, и их направления совпадают.

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$

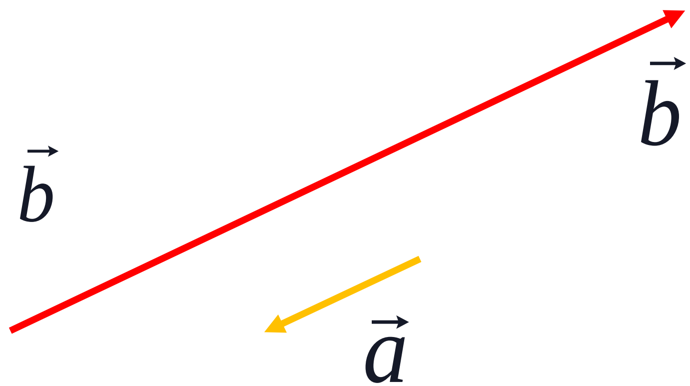


Обозначение: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$.

§1. Основные понятия

Векторы называются противоположно направленными, если они коллинеарны, и их направления противоположные.

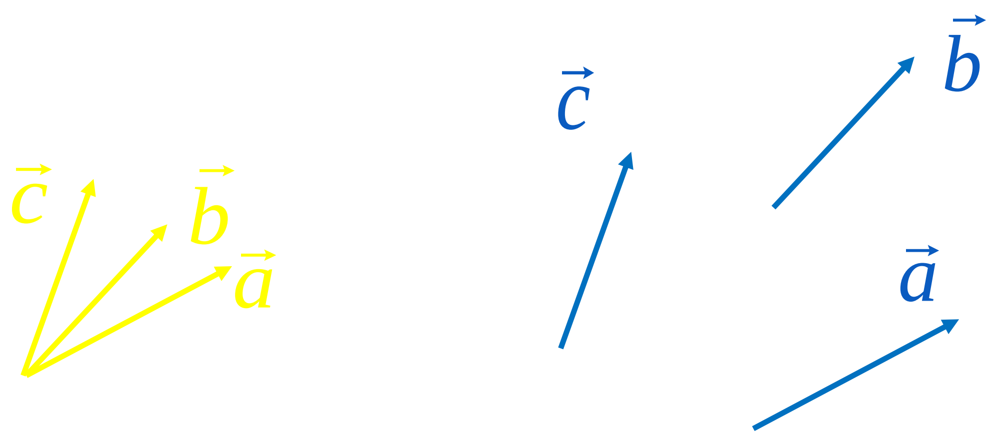
$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$



Обозначение: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$.

§1. Основные понятия

<u>Опр.</u> Три вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называются компланарными, если, отложенные от одной точки, они лежат в одной плоскости.

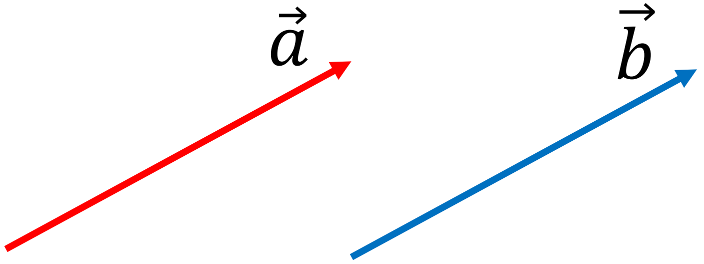


§1. Основные понятия

<u>Опр.</u> Длиной (модулем) вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB.

Обозначение: $|\vec{a}|, \left|\overrightarrow{AB}\right|$.

<u>Опр.</u> Вектор $\vec{a}$ равен вектору $\vec{b}$, если эти векторы сонаправлены, и их длины равны.

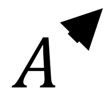


Обозначение: $\vec{a} = \vec{b}$.

§1. Основные понятия

<u>Опр</u>. Нуль-вектором называется вектор нулевой длины, т.е. вектор-точка.

Обозначение: $\vec{o}$.



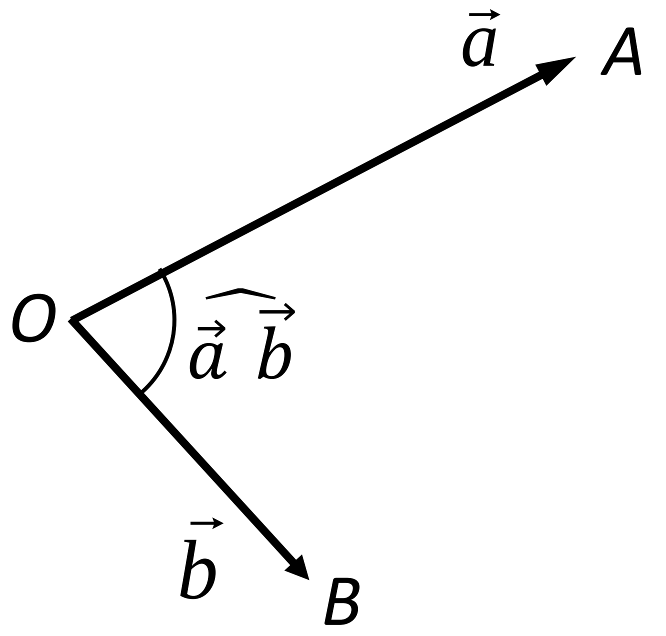
$$\overrightarrow{AA} = \vec{o}.$$

Нуль-вектор коллинеарен любому вектору.

§1. Основные понятия

<u>Опр</u> Углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется угол AOB, где $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$.

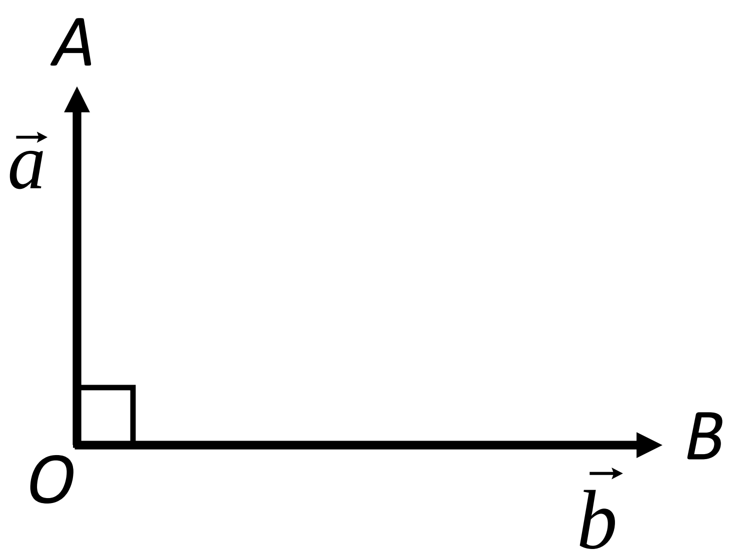
Обозначение: $\widehat{\vec{a}\ \vec{b}}$.



§1. Основные понятия

<u>Опр</u> Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ортогональны, если угол между ними прямой.

Обозначение: $\vec{a} \perp \vec{b}$.



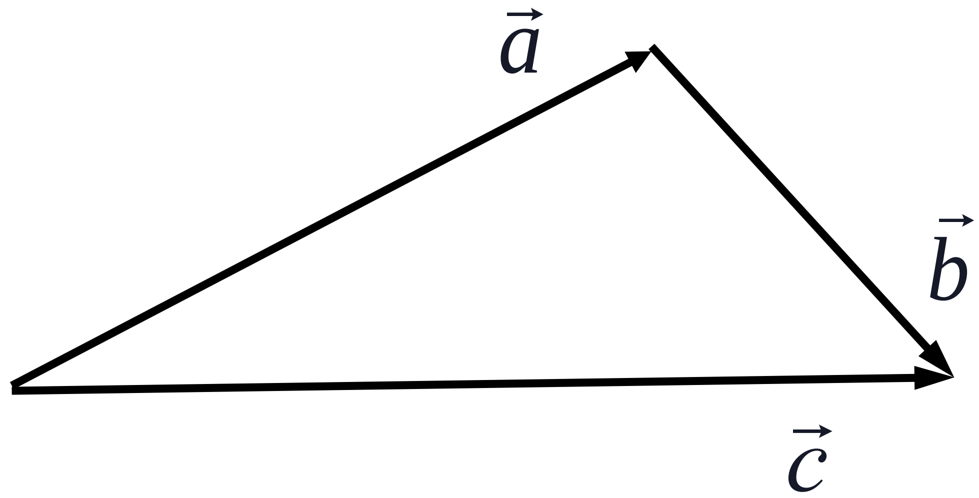
§2. Линейные операции над векторами

Для векторов есть следующие операции:

- сумма (сложение) векторов,
- произведение (умножение) вектора на число (на скаляр).

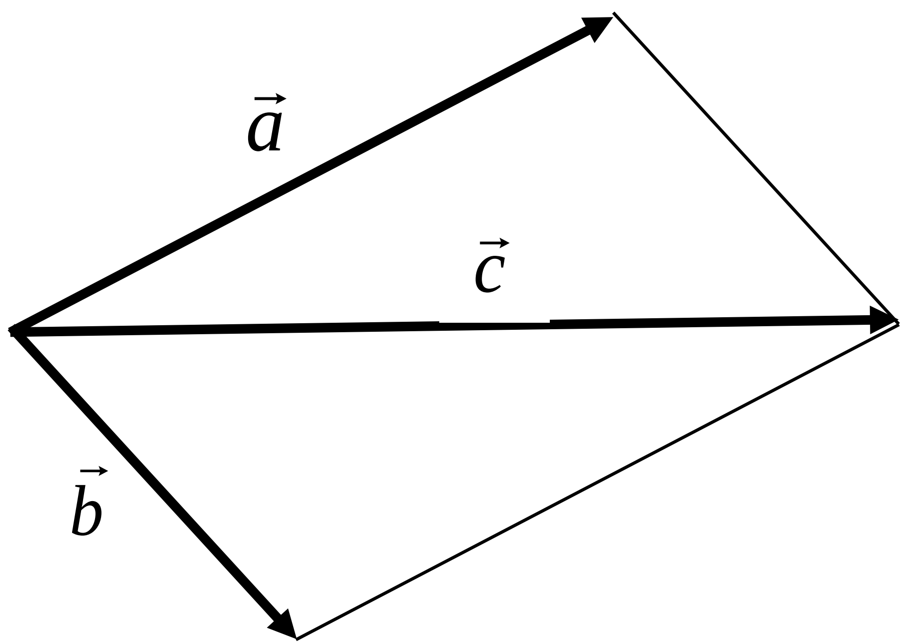
§2. Линейные операции над векторами

<u>Опр</u>. Сумммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, называется вектор $\vec{c}$, полученный по «правилу треугольника»:



§2. Линейные операции над векторами

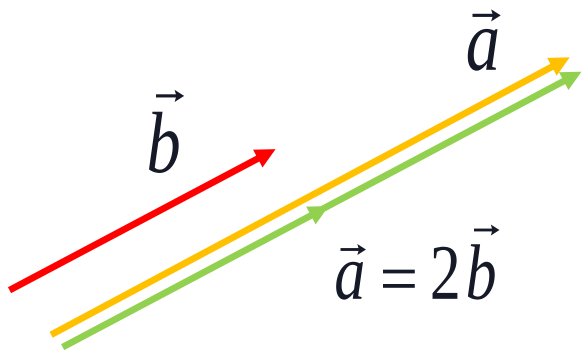
Тот же вектор можно получит по «правилу параллелограмма»:

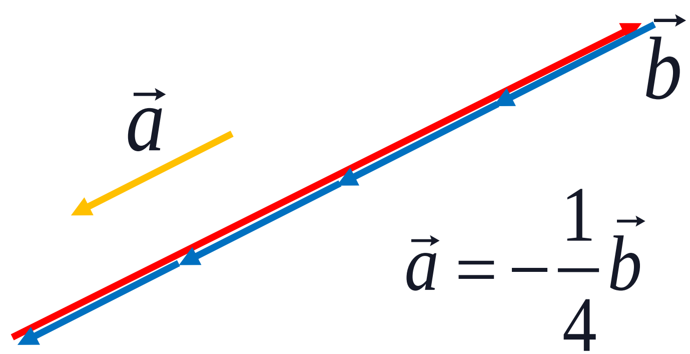


Обозначение: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}.$

§2. Линейные операции над векторами

Опр. Произведением вектора $\vec{a}$ на число m называется вектор $\vec{c}$, коллинеарный $\vec{a}$, длина которого равна произведению $|m| \cdot |\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $m > 0$, и противоположно направлению $\vec{a}$, если $m < 0$. Произведение $m = 0$ на вектор $\vec{a}$ есть нулевой вектор.

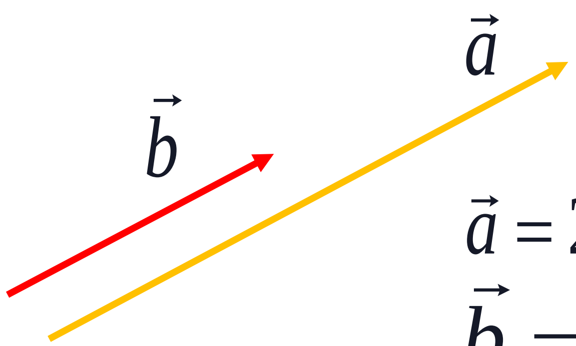




Обозначение: $\vec{c} = m\vec{a}$.

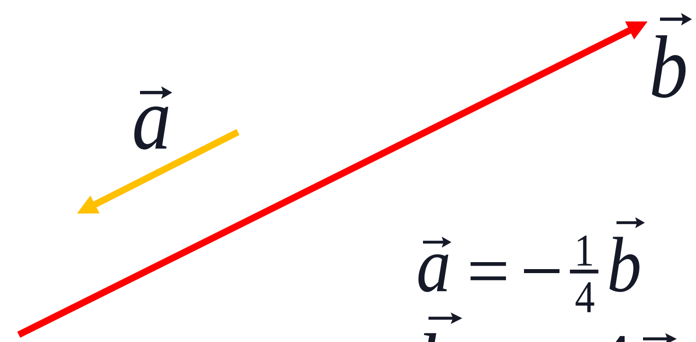
§2. Линейные операции над векторами

<u>Лемма о коллинеарных векторах.</u>
Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ являются коллинеарными тогда и только тогда, когда $\vec{a}=\alpha\vec{b}$ или $\vec{b}=\beta\vec{a}$ для некоторых чисел α, β.



$$\vec{a} = 2\vec{b}$$
$$\vec{b} = \tfrac{1}{2}\vec{a}$$

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$



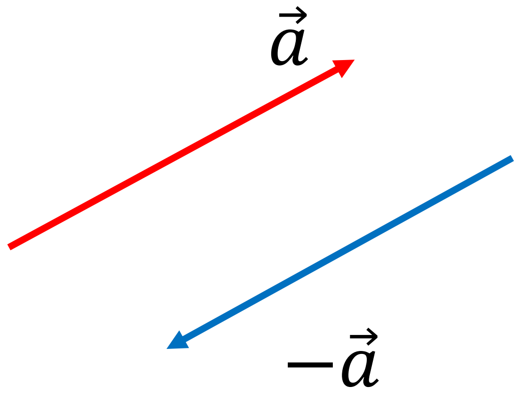
$$\vec{a} = -\tfrac{1}{4}\vec{b}$$
$$\vec{b} = -4\vec{a}$$

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$

§2. Линейные операции над векторами

Опр. Противоположным вектором к вектору $\vec{a}$ называется вектор, который имеет длину, равную длине вектора $\vec{a}$, и который противоположно направлен вектору $\vec{a}$.

Обозначение: $-\vec{a}$.



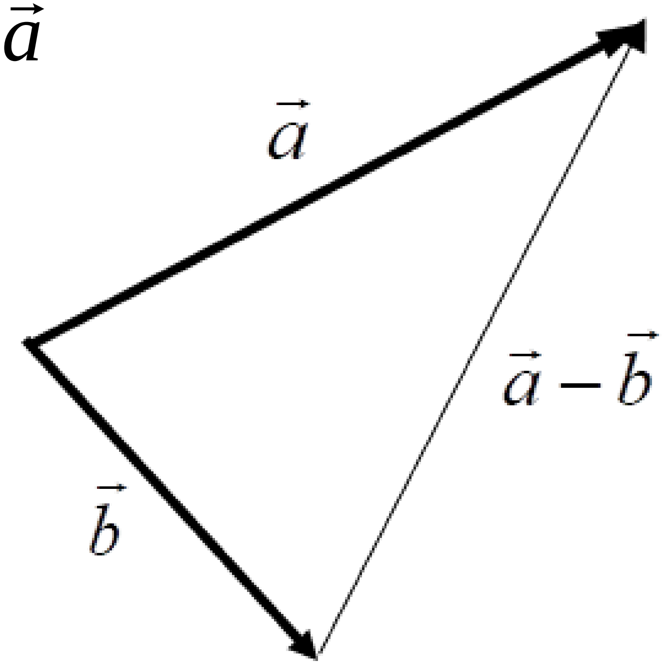
Свойства:

$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$

§2. Линейные операции над векторами

<u>Замечание</u>: разность $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторов – это такой вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, что

$$\vec{b} + \vec{c} = \vec{b} + \left(\vec{a} - \vec{b}\right) = \vec{a}$$



§2. Линейные операций над векторами

Свойства линейных операций над векторами.
(Без доказательства)

1. Коммутативность сложения: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.
2. Ассоциативность сложения: $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Следствие: в сумме трех и более векторов можно не ставить скобки: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\ldots$.

3. Смешанная ассоциативность умножения:

$$m\cdot(n\cdot\vec{a})=(m\cdot n)\cdot\vec{a}.$$

4. Дистрибутивность умножения относительно сложения векторов: $m\cdot(\vec{a}+\vec{b})=m\cdot\vec{a}+m\cdot\vec{b}$.

§2. Линейные операций над векторами

5. Дистрибутивность умножения на вектор относительно сложения чисел:

$$(m+n)\cdot\vec{a} = m\cdot\vec{a} + n\cdot\vec{a}.$$

§3. Базис на плоскости

Опр. Базисом на плоскости называется пара любых неколлинеарных векторов.

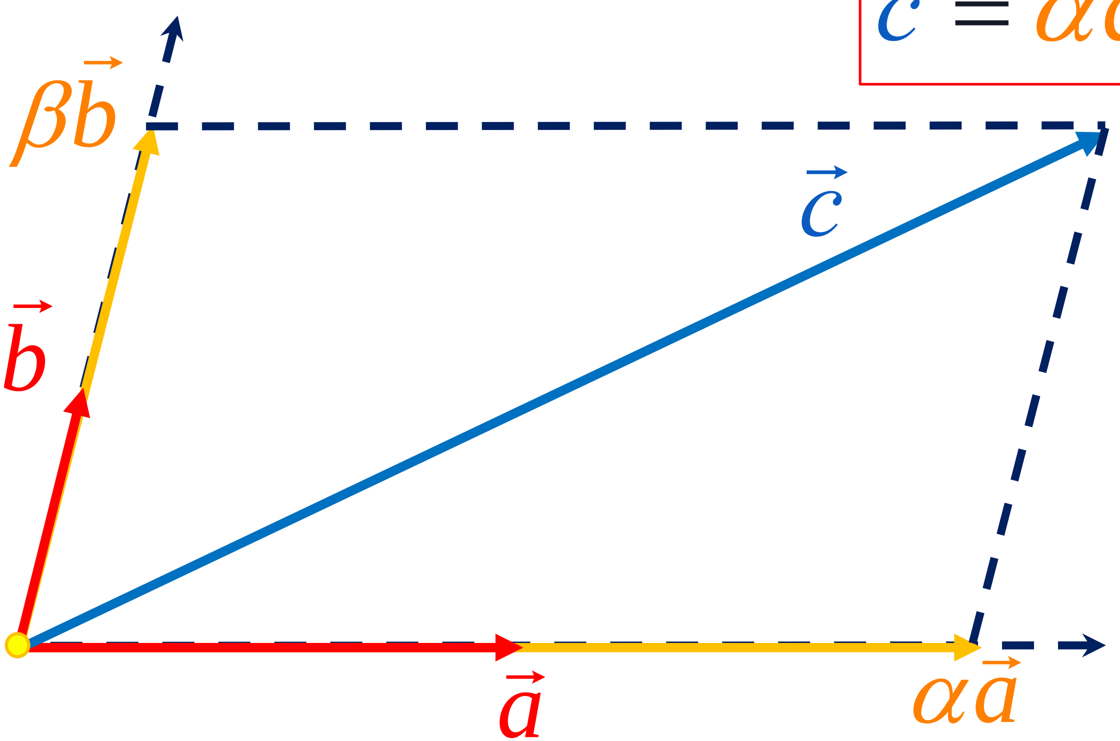
Теорема 1. Любой вектор плоскости можно разложить по базисным векторам, причем единственным образом.

§3. Базис на плоскости

<u>Доказательство.</u>

1) **Возможность** разложения вектора по базису

$$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$$



§3. Базис на плоскости

<u>Доказательство.</u>

2) **Единственность** разложения вектора по базису

Пусть $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \alpha_1\vec{a} + \beta_1\vec{b}$.

Тогда $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} - \alpha_1\vec{a} - \beta_1\vec{b} = \vec{0}$.

$\Rightarrow (\alpha - \alpha_1)\vec{a} + (\beta - \beta_1)\vec{b} = \vec{0}$

$\Rightarrow (\alpha - \alpha_1)\vec{a} = -(\beta - \beta_1)\vec{b}$

От противного: пусть $\alpha \neq \alpha_1$.

Тогда $\vec{a} = -\frac{\beta-\beta_1}{\alpha-\alpha_1}\vec{b}$.

$\Rightarrow \vec{a}||\vec{b}$. Противоречие. Следовательно, $\alpha = \alpha_1$.

Аналогично, $\beta = \beta_1$. ■

§4. Базис в пространстве

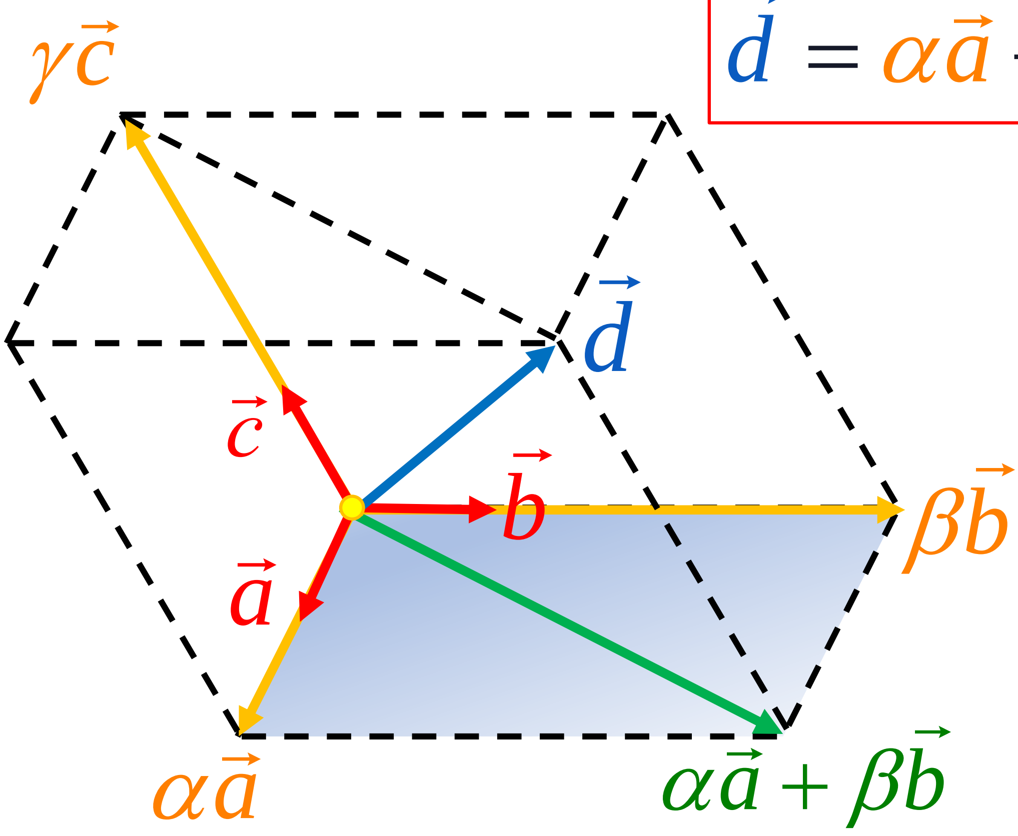
Опр. Базисом в пространстве называется любая тройка некомпланарных векторов.

Теорема 2. Любой вектор пространства можно разложить по базисным векторам, причем единственным образом.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

§4. Базис в пространстве

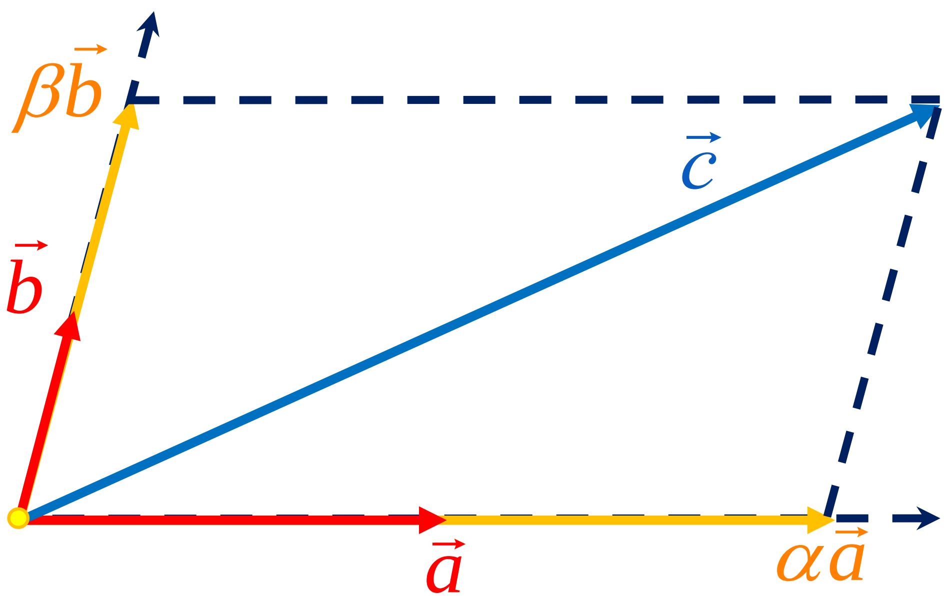
$$\boxed{\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}}$$



■

§5. Координаты вектора

<u>Опр.</u> Координатами вектора на плоскости (в прост-ранстве) называются коэффициенты разложения вектора по базису плоскости (пространства).



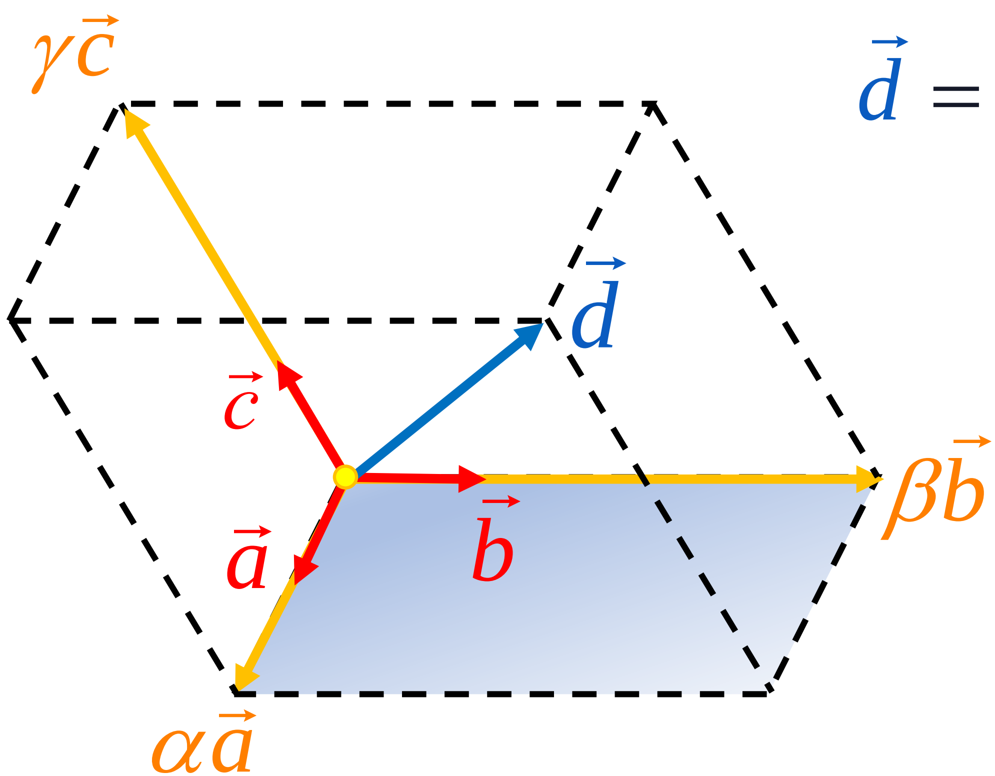
$$\boxed{\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}}$$

Обозначение:

$\vec{c} = (\alpha, \beta)$

(α, β) – **координаты** вектора $\vec{c}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$.

§5. Координаты вектора



$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$$

Обозначение:

$$\vec{d} = (\alpha, \beta, \gamma)$$

(α, β, γ) – координаты вектора $\vec{d}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

§5. Координаты вектора

Теорема 3 «о координатах» (в пространстве)

Пусть $\vec{a} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \vec{b} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$.
Справедливы следующие утверждения:

(1) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2,\ \beta_1 = \beta_2,\ \gamma_1 = \gamma_2$.

Векторы равны тогда и только тогда, когда равны их координаты.

(2) $\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2, \gamma_1 + \gamma_2)$.

Координаты суммы векторов равны сумме координат этих векторов.

§5. Координаты вектора

(3) $m \cdot \vec{a} = (m \cdot \alpha_1, m \cdot \beta_1, m \cdot \gamma_1)$.

Координаты произведения вектора на число равны произведению координат вектора на это число.

(4) $\vec{a} \,||\, \vec{b} \Leftrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$.

Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны.

(5) $\vec{a} = \vec{o} \Leftrightarrow \vec{a} = (0,0,0)$.

Все координаты нуль-вектора равны нулю.

§5. Координаты вектора

<u>Доказательство.</u>

(1) Следует из единственности разложения вектора по базису (теорема 2).

(2) $\vec{a} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1), \vec{b} = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$

Пусть $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ – базис в пространстве.

$$\Rightarrow \vec{a} = \alpha_1 \vec{b}_1 + \beta_1 \vec{b}_2 + \gamma_1 \vec{b}_3, \vec{b} = \alpha_2 \vec{b}_1 + \beta_2 \vec{b}_2 + \gamma_2 \vec{b}_3$$

$$\Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = \underline{\alpha_1 \vec{b}_1} + \underline{\beta_1 \vec{b}_2} + \underline{\gamma_1 \vec{b}_3} + \underline{\alpha_2 \vec{b}_1} + \underline{\beta_2 \vec{b}_2} + \underline{\gamma_2 \vec{b}_3} =$$

$$= \underline{(\alpha_1 + \alpha_2)\vec{b}_1} + \underline{(\beta_1 + \beta_2)\vec{b}_2} + \underline{(\gamma_1 + \gamma_2)\vec{b}_3} =$$

$$= (\underline{\alpha_1 + \alpha_2}, \underline{\beta_1 + \beta_2}, \underline{\gamma_1 + \gamma_2})$$

§5. Координаты вектора

(3) Аналогично доказательству (2).

(4) $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \alpha\vec{b}$ или $\vec{b} = \beta\vec{a}$

по лемме о коллинеарных векторах.

Пусть $\vec{a} = \alpha\vec{b}$, тогда по (3) имеем

$$\vec{a} = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = \alpha \cdot \vec{b} = (\alpha \cdot \alpha_2, \alpha \cdot \beta_2, \alpha \cdot \gamma_2)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha \cdot \alpha_2,\ \beta_1 = \alpha \cdot \beta_2,\ \gamma_1 = \alpha \cdot \gamma_2$$

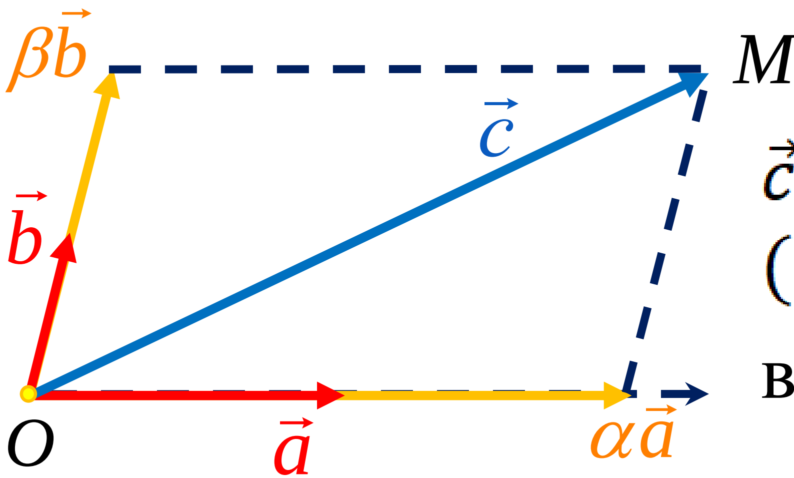
$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}.$$

(5) $\vec{0} = 0 \cdot \vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2 + 0 \cdot \vec{b}_3 = (0,0,0)$. ■

§6. Координаты точки

Опр. Радиус-вектором точки M на плоскости называется вектор $\overrightarrow{OM}$ в системе координат $\left(O;\vec{a},\vec{b}\right)$, связанной с базисом плоскости $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Опр. Координатами точки M на плоскости называются координаты ее радиус-вектора.



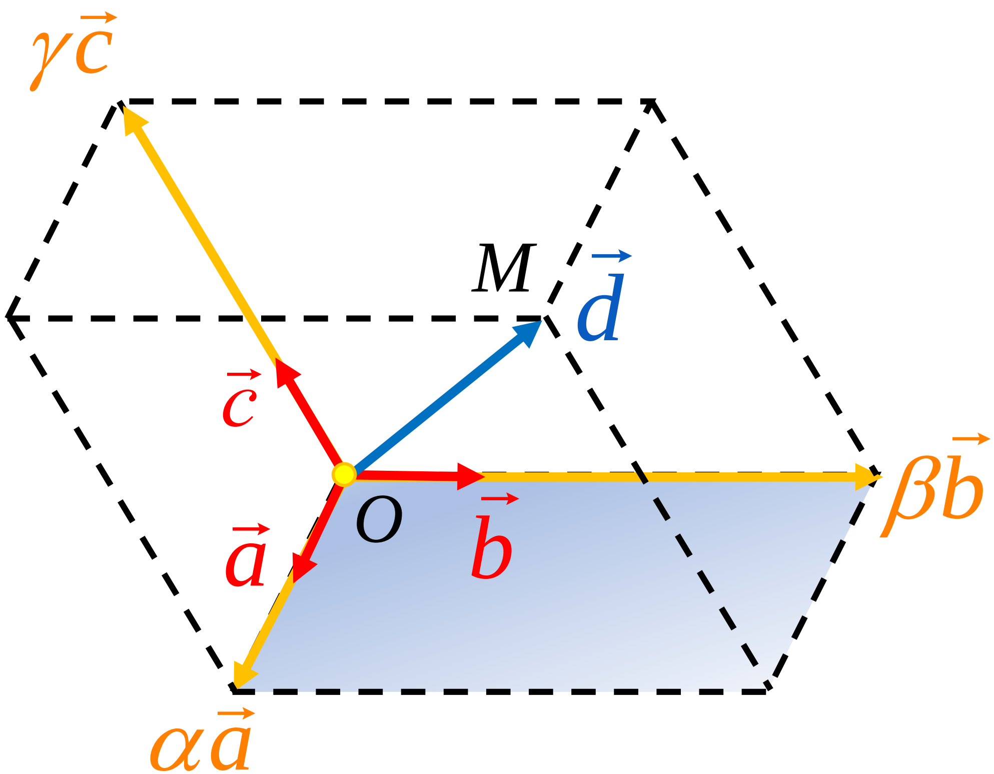
$\vec{c}$ –радиус-вектор точки M ;
(α,β) – координаты точки M в системе коодинат $(0;\vec{a},\vec{b})$.

§6. Координаты точки

Опр. Радиус-вектором точки M в пространстве называется вектор $\overrightarrow{OM}$ в системе координат $\left(O;\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$, связанной с базисом пространства $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

Опр. Координатами точки M в пространстве называются координаты ее радиус-вектора.

§6. Координаты точки



$\vec{d}$ –радиус-вектор точки M;

(α, β, γ) –координаты точки M в системе координат $\left(0; \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$.

§6. Координаты точки

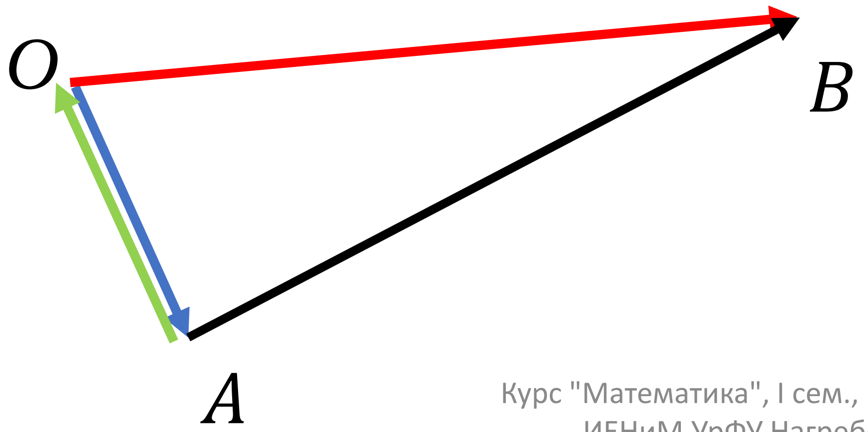
<u>Теорема 4</u>. Если $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$, то

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A).$$

Чтобы найти координаты вектора, надо из координат конца вычесть координаты начала.

<u>Доказательство</u>: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

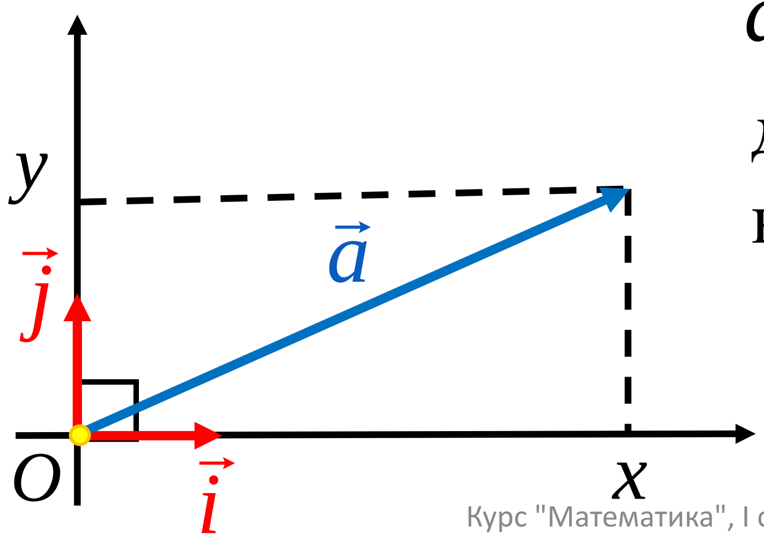
$\overrightarrow{OA} = (x_A, y_A, z_A)$, $\overrightarrow{OB} = (x_B, y_B, z_B)$. ■



§7. Ортонормированный базис

Опр. Ортонормированным базисом (ОНБ) на плоскости называется упорядоченная пара векторов $(\vec{i},\vec{j})$, ортогональных и имеющих единичную длину.

Опр. Координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i},\vec{j})$ называются декартовыми (прямоугольными) координатами на плоскости.



$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y) -$$

декартовы координаты вектора $\vec{a}$ на плоскости.

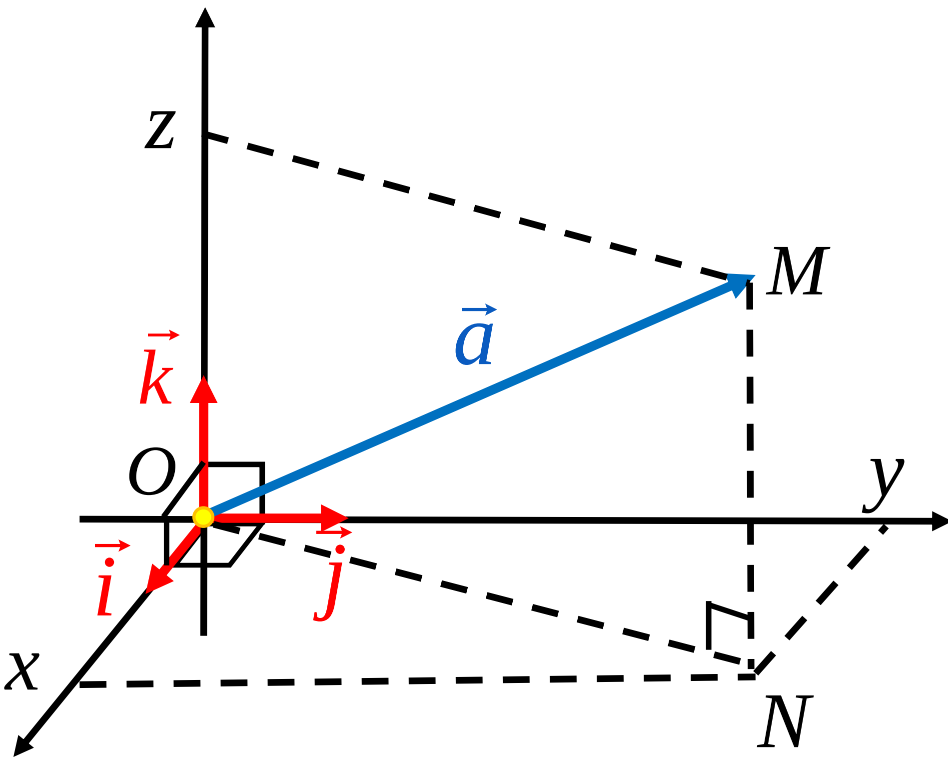
$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

§7. Ортонормированный базис

<u>Опр</u>. Ортонормированным базисом (ОНБ) в пространстве называется упорядоченная **правая** тройка векторов $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, попарно ортогональных друг другу и имеющих единичную длину.

<u>Опр</u>. Координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ называются декартовыми (прямоугольными) координатами в пространстве.

§7. Ортонормированный базис



$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$ON^2 = x^2 + y^2$$

$$|\vec{a}|^2 = ON^2 + z^2$$

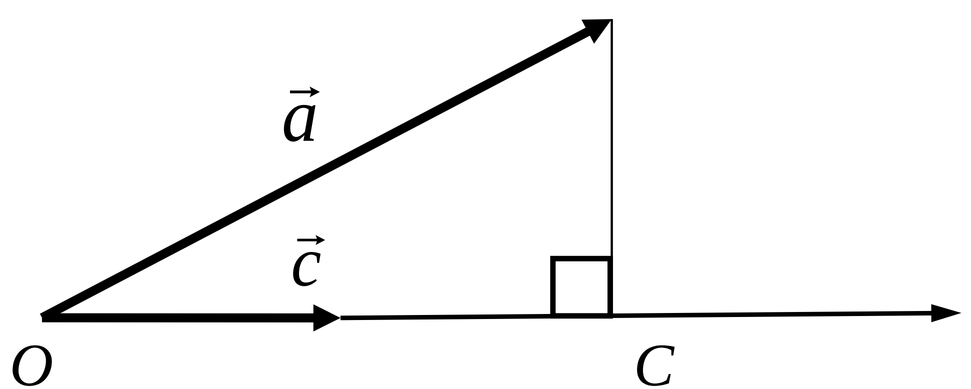
$$|\vec{a}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z) -$$

декартовы координаты вектора $\vec{a}$ в пространстве.

§8. Проекция вектора на ось

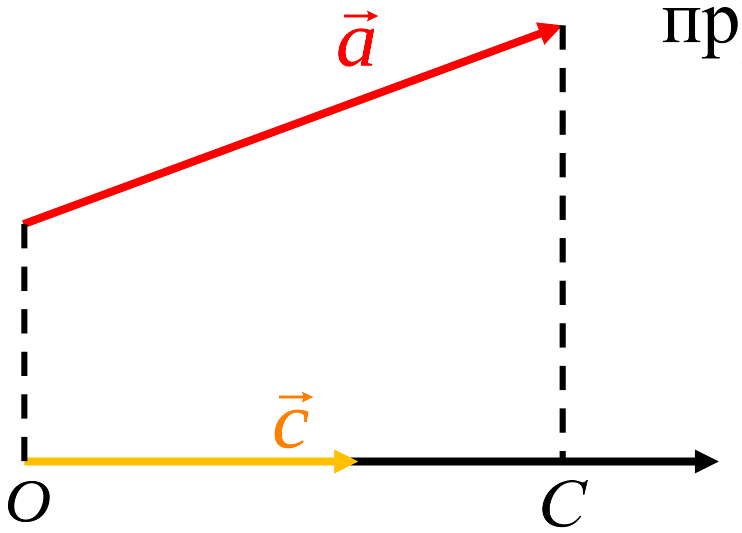
Опр. Проекцией вектора $\vec{a}$ на ось вектора $\vec{c}$ называется длина отрезка OC, взятая со знаком «+», если угол $\widehat{\vec{a}\vec{c}}$ – острый, и со знаком «–», если $\widehat{\vec{a}\vec{c}}$ – тупой. Проекция равна 0, если угол $\widehat{\vec{a}\vec{c}}$ – прямой.



Обозначение: $\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}$.

§8. Проекция вектора на ось

<u>Замечание</u>. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$ не обязательно должны исходить из одной точки.



$$\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} = \begin{cases} |OC|, \text{ если } \widehat{\vec{a}\vec{c}} \text{ - острый,} \\ -|OC|, \text{ если } \widehat{\vec{a}\vec{c}} \text{ - тупой,} \\ 0, \text{ если } \widehat{\vec{a}\vec{c}} \text{ - прямой.} \end{cases}$$

§9. Проекция вектора на ось

Свойства проекции вектора на ось

1) $\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a}\vec{c})$;

2) $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}$;

Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций этих векторов на эту ось.

3) $\text{пр}_{\vec{c}}(\alpha\vec{a}) = \alpha \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}$

Проекция произведения вектора на число равна произведению проекции вектора на это число.

§9. Проекция вектора на ось

4) $\vec{a} = (\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a}, \text{пр}_{\vec{j}}\vec{a}, \text{пр}_{\vec{k}}\vec{a})$

Декартовы координаты вектора $\vec{a}$ равны проекциям вектора $\vec{a}$ на оси векторов ОНБ.

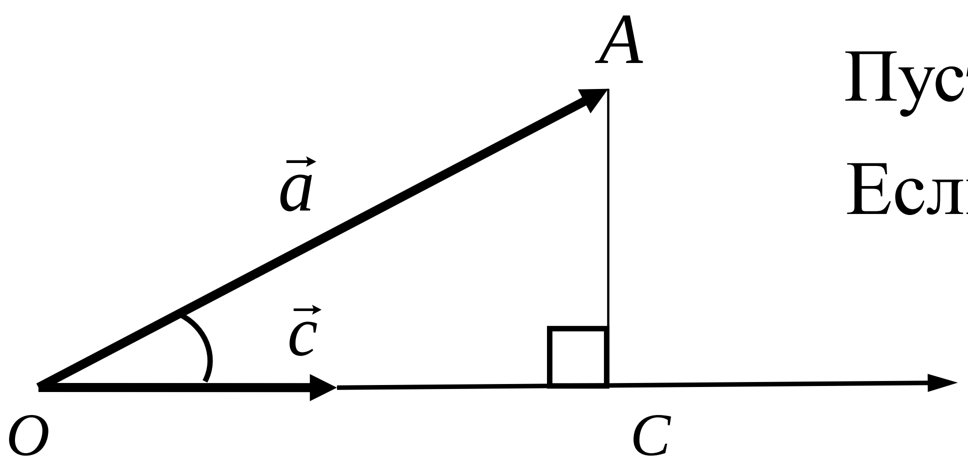
5) Пусть $(\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}) = \alpha, (\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}) = \beta, (\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}) = \gamma$.

Тогда $\vec{a} = (|\vec{a}|\cos\alpha\,, |\vec{a}|\cos\beta\,, |\vec{a}|\cos\gamma)$.

§9. Проекция вектора на ось

<u>Доказательство.</u>

1) Надо доказать: $\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{c}})$;



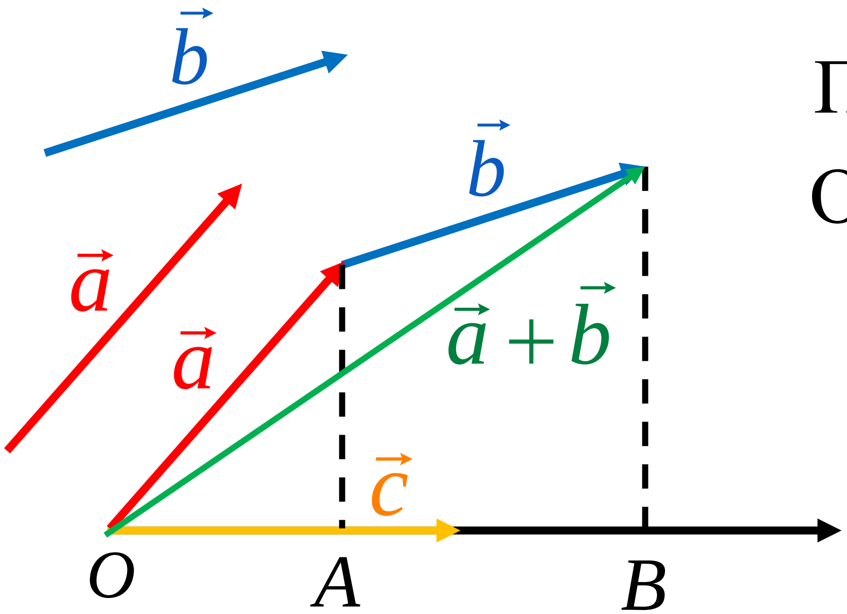
Пусть $\widehat{\vec{a}\vec{c}}$ – острый.

Если $\widehat{\vec{a}\vec{c}}$ – тупой, самост.

$$\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} = |OC| = |OA|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{c}}) = |\vec{a}|\cos(\widehat{\vec{a}\vec{c}})$$

§9. Проекция вектора на ось

2) Надо доказать: $\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}$.



Пусть $\vec{a}\vec{c}, \vec{b}\vec{c}$ – острые.

Остальные случаи - самост.

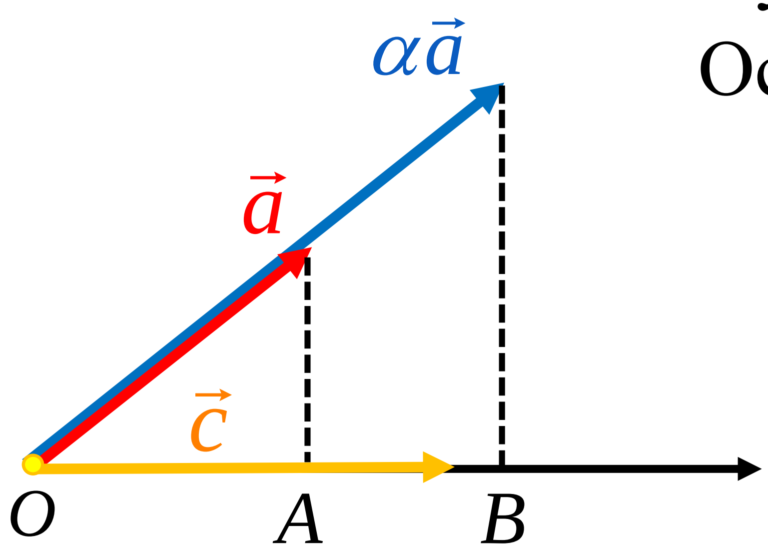
Тогда

$$|OA| = \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a},\ |AB| = \text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}$$

$$\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = |OB| = |OA| + |AB| = \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\vec{b}$$

§9. Проекция вектора на ось

3) Надо доказать: $\text{пр}_{\vec{c}}(\alpha\vec{a}) = \alpha \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}.$



Пусть $\vec{a}\vec{c}$ – острый и $\alpha > 0.$

Остальные случаи - самост.

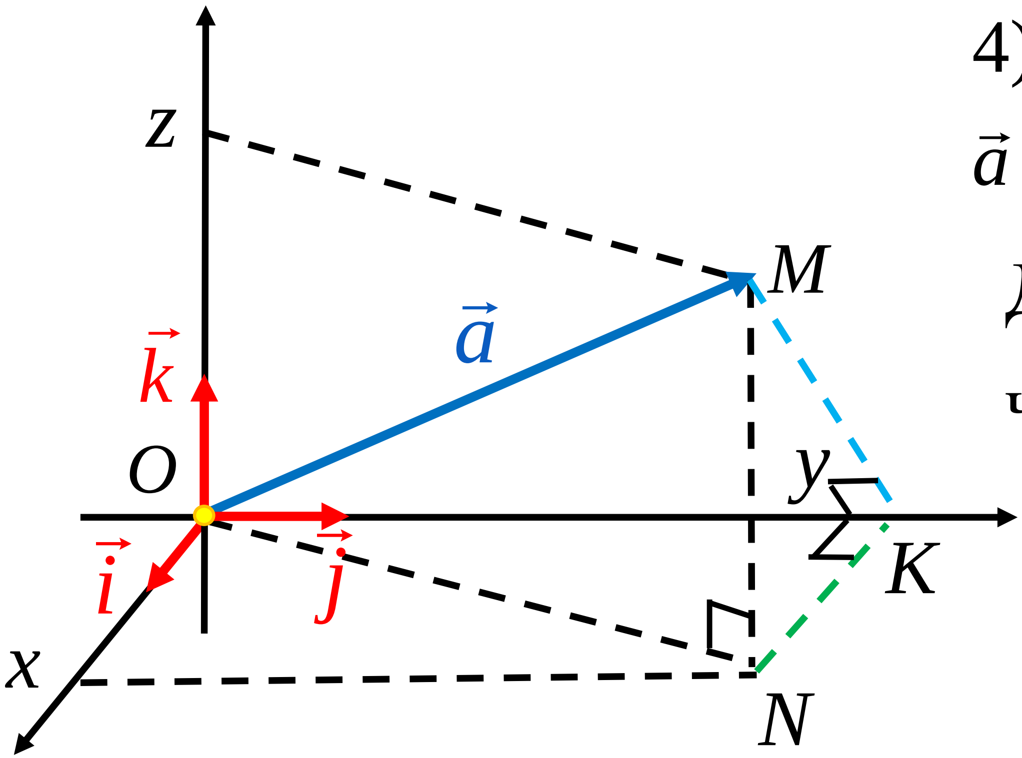
Тогда

$$|OA| = \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}, \; |OB| = \text{пр}_{\vec{c}}(\alpha\vec{a})$$

По теореме Фалеса

$$\text{пр}_{\vec{c}}(\alpha\vec{a}) = |OB| = \alpha|OA| = \alpha \cdot \text{пр}_{\vec{c}}\vec{a}$$

§9. Проекция вектора на ось



4) Надо доказать:

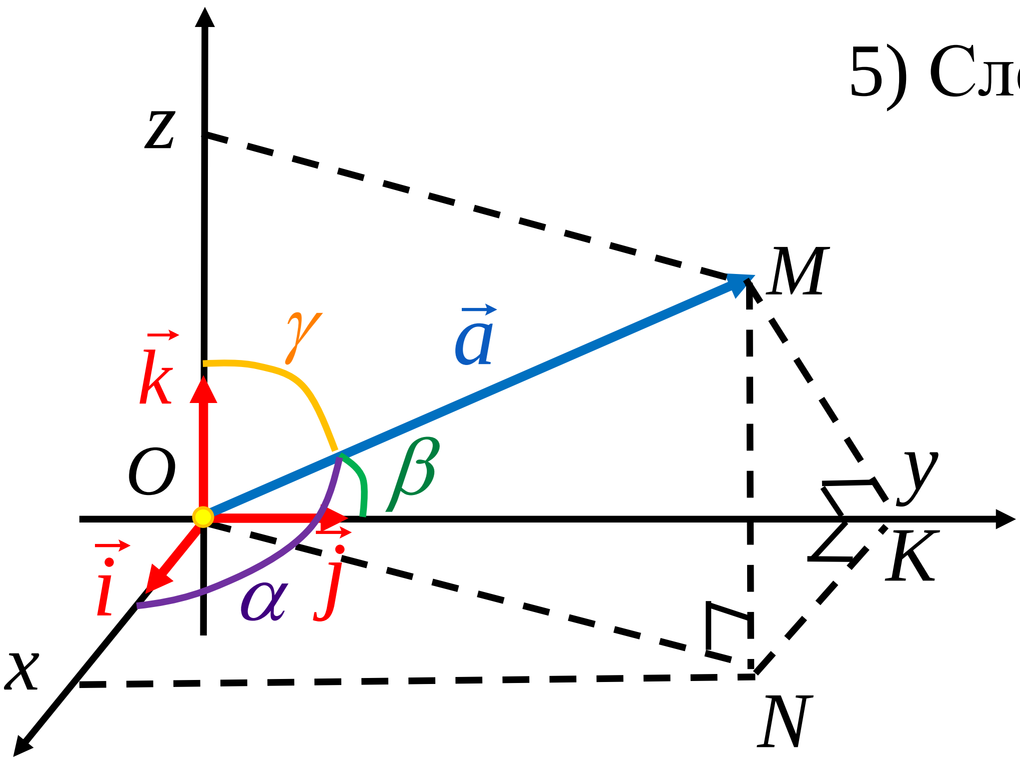
$\vec{a} = (\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a},\ \text{пр}_{\vec{j}}\vec{a},\ \text{пр}_{\vec{k}}\vec{a})$

Докажем, например, что $y = \text{пр}_{\vec{j}}\vec{a}$

По теореме о трех перпендикулярах прямая OK, перпендикулярная проекции NK наклонной MK, перпендикулярна и самой наклонной MK.

$\Rightarrow y = |OK| = \text{пр}_{\vec{j}}\vec{a}$

§9. Проекция вектора на ось



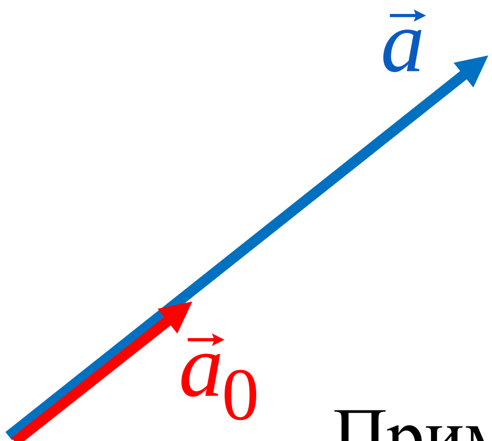
5) Следует из 4) и 1):

$$\vec{a} = (\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a},\ \text{пр}_{\vec{j}}\vec{a},\ \text{пр}_{\vec{k}}\vec{a}) = (x, y, z)$$

$$= (|\vec{a}|\cos\alpha,\ |\vec{a}|\cos\beta,\ |\vec{a}|\cos\gamma)\ \blacksquare$$

§10. Орт вектора. Направляющие косинусы

<u>Опр.</u> Ортом вектора называется вектор единичной длины, сонаправленный с данным вектором.



$\vec{a}_0$ – орт вектора $\vec{a}$

$$\boxed{\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$$

<u>Пример.</u> Найти орт вектора $\vec{a} = (1, -2, 1).$

<u>Решение.</u> $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

§10. Орт вектора. Направляющие косинусы

Опр. Пусть $\vec{a}$ – ненулевой вектор и

$(\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}) = \alpha, (\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}) = \beta, (\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}) = \gamma$. Тогда

значения $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ называются направляющими косинусами ненулевого вектора $\vec{a}$.

§10. Орт вектора. Направляющие косинусы

Теорема о «направляющих косинусах».

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

Доказательство.

$$\vec{a} = (|\vec{a}|\cos\alpha, |\vec{a}|\cos\beta, |\vec{a}|\cos\gamma)$$

$$|\vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2\cos^2\alpha + |\vec{a}|^2\cos^2\beta + |\vec{a}|^2\cos^2\gamma$$

(Разделим на $|\vec{a}|^2 \neq 0$)

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \blacksquare$$

§10. Орт вектора. Направляющие косинусы

Задача. Вектор $\vec{a}$ длины 2 образует с осью Ox угол 45^0, с осью Oy - угол 60^0, а с осью - Oz тупой угол. Найти декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Решение. $\vec{a} = (|\vec{a}|\cos\alpha, |\vec{a}|\cos\beta, |\vec{a}|\cos\gamma)$

$$\vec{a} = (2\cos\alpha, 2\cos\beta, 2\cos\gamma) = \left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\cdot\frac{1}{2}, 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$\alpha = 45^0$, $\beta = 60^0$, $\gamma - ? \Rightarrow$ $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\beta = \frac{1}{2}$,

$\Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{1}{4}$,

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{1}{4}, \ \cos\gamma = -\frac{1}{2}$$

§10. Орт вектора. Направляющие косинусы

<u>Задача</u>. Вектор $\vec{a}$ длины 2 образует с осью Ox угол 45^0, с осью Oy - угол 60^0, а с осью - Oz тупой угол. Найти декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

<u>Решение.</u> $\vec{a} = (|\vec{a}|\cos\alpha, |\vec{a}|\cos\beta, |\vec{a}|\cos\gamma)$

$$\vec{a} = (2\cos\alpha, 2\cos\beta, 2\cos\gamma) = (\sqrt{2}, 1, -1)$$

$$\vec{a} = (2\cos\alpha, 2\cos\beta, 2\cos\gamma)$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \ \cos\beta = \frac{1}{2},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{1}{4}, \ \cos\gamma = -\frac{1}{2}$$

§10. Орт вектора. Направляющие косинусы

Следствие: Координаты орта равны направляющим косинусам этого орта.

Доказательство.

По 5) свойству проекции вектора

$\vec{a}_0 = (|\vec{a}_0| \cos\alpha, |\vec{a}_0| \cos\beta, |\vec{a}_0| \cos\gamma)$

$(\,|\vec{a}_0| = 1)$

$\Rightarrow \vec{a}_0 = (|\vec{a}_0| \cos\alpha, |\vec{a}_0| \cos\beta, |\vec{a}_0| \cos\gamma)$

$\Rightarrow \vec{a}_0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ ■

Лекция окончена!