§7. Аксиоматическая теория исчисления предикатов

Один случай формальной теории, совпадающей с логикой предикатов.

Опр. **Алфавитом** теории **K** называется множество, содержащее заглавные и строчные латинские буквы, с индексом или без, скобки (и), символ запятой **,** , символы $\neg$ и $\rightarrow$, квантор общности $\forall$.

Опр. **Формулой теории K** называется слово над алфавитом теории, являющееся формулой логики предикатов.

Опр. **Аксиомой теории K** называется каждая из формул:

(A1) $F \to (G \to F)$;

(A2) $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$;

(A3) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$;

где F , G, H – формулы теории **K**.

(A4) $(\forall x)(F \to G) \to (F \to (\forall x)G)$,

где F не содержит свободных вхождений x.

(A5) $(\forall x)F(x) \to F(t)$,

где t – терм, свободный для x в $F(x)$, т.е $F(t)$ получена из $F(x)$ заменой свободных вхождений x на t, и в $F(t)$ во всех вхождениях t нет связанных переменных.

В частности, t может совпадать с x.

Пример аксиомы по схеме (A5):

$$(\forall x)\big((\forall y)\mathrm{A}(x, y, z) \to (\forall x)(\forall z)\mathrm{B}(x, z)\big) \to$$

$$\to \big((\forall y)\mathrm{A}(f(x, z), y, z) \to (\forall x)(\forall z)\mathrm{B}(x, z)\big).$$

Опр. **Правилами вывода в теории K** называются: правило *modus ponens* и правило обобщения.

$$(mp): \frac{F, (F \to G)}{G}.$$

$$(gen): \frac{F}{(\forall x)F}.$$

Опр. **Теория K –** набор из алфавита, множества всех возможных формул, множества аксиом, правил вывода.

Опр. Пусть Г – подмножество формул теории **K** (множество гипотез). Формула F_n выводится из Г, если существует последовательность формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, такая, что каждая F_i либо является аксиомой, либо принадлежит Г, либо получена по правилам вывода из формул среди $F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}$.

$$\Gamma \vdash F_n .$$

Опр. Формула F_n называется **теоремой**, если F_n выводится из пустого множества гипотез.

$$\vdash F_n .$$

Замечание: теорией первого порядка называется аксиоматическая теория, полученная добавлением к **K** некоторого множества «собственных аксиом».

Главные утверждения (без доказательств).

Теорема (Гёделя о полноте).
Формула F теории **K** является теоремой $\Leftrightarrow$ формула логики предикатов F тождественно истинная.

Опр. Аксиоматическая теория называется непротиворечивой, если не существует формулы P, такой, что и P и $\neg P$ являются теоремами.

Следствие.
Теория **K –** непротиворечивая.

Замечание: F тождественно истинная $\Leftrightarrow$ $\neg F$ невыполнимая.

Существуют формулы, истинные на любой конечной модели, но не тождественно истинные.

Теорема (об адекватности).
$\Gamma \vdash G \Leftrightarrow G$ является логическим следствием формул в Γ.

<u>Опр.</u> Формула F логики предикатов называется **замкнутой**, если она не содержит свободных переменных (т.е. все переменные связанные).

Теорема (о дедукции).
Пусть формула F замкнутая.
$\{\Gamma, F\} \vdash G \Leftrightarrow \Gamma \vdash (F \to G)$.

Опр. Аксиоматическая теория называется разрешимой, если существует алгоритм, проверяющий для любой формулы P, является ли P теоремой.

Теорема (Чёрча).
Теория **K –** неразрешимая.

Замечание: 1) если использовать предикатные символы только от одной переменной, то теория **K** становится разрешимой.
2) если использовать только интерпретации на конечных моделях, то теория **K** становится разрешимой.

Алгоритм проверки, является ли теоремой формула, содержащая предикатные символы только от одной переменной.

Опр. Пусть формула $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ содержит свободные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Замыканием формулы F называется формула $(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Обозначение: $\overset{\frown}{F}$.

Лемма. $F \equiv 1 \Leftrightarrow \overset{\frown}{F} \equiv 1$.

Пусть F – замкнутая формула, содержащая предикатные символы только от одной переменной, не использующая операции импликации и эквиваленции.

1) Заносим отрицание к атомарным формулам.
2) Заносим кванторы к атомарным формулам.
В случаях вида: $(\forall x)(A(x) \vee B(x))$ и $(\exists x)(A(x) \& B(x))$ заменяем скобку на новый предикатный символ $C(x)$.
Результат: формула, где каждое вхождение $(\forall x)A(x)$ или $(\exists x)A(x)$ считаем атомарной формулой логики высказываний.

3) Строим таблицу истинности для всех значений, кроме:

$(\forall x)A(x)$	$(\forall x)B(x)$	$(\forall x)C(x)$
1		0
	1	0

если $C(x) = A(x) \vee B(x)$;

$(\exists x)A(x)$	$(\exists x)B(x)$	$(\exists x)C(x)$
0		1
	0	1

если $C(x) = A(x) \,\&\, B(x)$;

также нужно исключить случаи:

$(\forall x)A(x)$	$(\exists x)A(x)$
1	0

$(\forall x)A(x)$	$(\forall x)\neg A(x)$
1	1

$(\exists x)A(x)$	$(\exists x)\neg A(x)$
0	0