§5. Невыразимость в логике предикатов

<u>Опр.</u> Пусть $P(x, y)$ – двухместный предикат на M. Транзитивным замыканием предиката $P(x, y)$ называется предикат $P^*(x, y)$ такой, что для любых $a, b \in M$

$P^*(a, b) = 1 \Leftrightarrow$ существуют $n \in \mathbb{N}$ и $a_0, a_1, \ldots, a_n \in M$:

$$a_0 = a,\ \ a_n = b,\ \ P(a_0, a_1) = 1 = P(a_1, a_2) = \ldots = P(a_{n-1}, a_n).$$

<u>Пример.</u>

$M = \mathbb{N}$, $P(x, y) =$ «$y = x + 1$».

$P^*(x, y) = ?$

Пример.
$M = \mathbb{N}$, $P(x, y) =$ «$y = x + 1$».

Тогда $P^*(x, y) =$ «$x < y$».

Теорема.
Пусть $A(x, y)$ символ двухместного предиката. Не существует формулы $F(x, y)$ логики предикатов, такой, чтобы для любой интерпретации φ предикат $\varphi F(x, y)$ был бы транзитивным замыканием предиката $\varphi A(x, y)$.

Теорема (о компактности).
Если формула G является логическим следствием бесконечного множества формул K, то G является логическим следствием конечного подмножества формул $K' \subseteq K$.

Доказательство:
Дано: G является логическим следствием бесконечного множества формул K, т.е. $\{K, \neg G\}$ невыполнимо.

Приведем каждую формулу из К и формулу $\neg G$ к СНФ. Соберем множество дизъюнктов S. Тогда S невыполнимо.

По теореме из § 4 существует вывод из S пустого дизъюнкта:
$D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, \square$ (конечная последовательность).

Пусть $S' \subseteq S$ подмножество дизъюнктов, участвующих в выводе.
$\Rightarrow S'$ конечное невыполнимое.

Соберем $K' \subseteq K$ – формулы, из которых получились дизъюнкты в S' (кроме полученных из $\neg G$). K' конечное. $\{K', \neg G\}$ невыполнимо.

G является логическим следствием конечного подмножества формул K'. Теорема доказана.

Теорема.
Пусть $A(x, y)$ символ двухместного предиката. Не существует формулы $F(x, y)$ логики предикатов, такой, чтобы для любой интерпретации φ предикат $\varphi F(x, y)$ был бы транзитивным замыканием предиката $\varphi A(x, y)$.

Доказательство (теоремы о невыразимости):
(от противного) Предположим, что $F(x, y)$ – формула: для любой интерпретации φ на множестве M, и любых $a, b \in M$ выполняется
$\varphi F(a, b) = 1 \;\Leftrightarrow\; \varphi A^*(a, b) = 1.$

Рассмотрим бесконечное множество формул

$K = \{E_0(x, y), E_1(x, y), \ldots, E_n(x, y), \ldots\}$, где

$E_0(x, y) = \neg A(x, y)$,

$E_1(x, y) = \neg(\exists z_1)(A(x, z_1) \,\&\, A(z_1, y))$,

…

$E_n(x, y) = \neg(\exists z_1)\ldots(\exists z_n)(A(x, z_1) \,\&\ldots\&\, A(z_n, y))$, …

Тогда $\neg F(x, y) = \neg A^*(x, y)$ является логическим следствием бесконечного множества формул K.

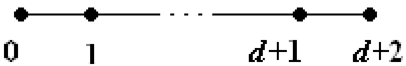
По теореме компактности $\neg F(x, y)$ является логическим следствием конечного множества формул $K' \subseteq K$.

Пусть $K' = \{E_0(x, y), E_1(x, y), \ldots, E_d(x, y)\}$.

Рассмотрим $M = \{0, 1, \ldots, d, d+1, d+2\}$ и интерпретацию $\varphi A(x, y)$ = «$y = x + 1$».

$\varphi A^*(x, y)$ = «$x < y$», $\Rightarrow \varphi A^*(0, d + 2) = \varphi F(0, d + 2) = 1$.

С другой стороны: $\varphi E_0(0, d+2) = 1, \ldots, \varphi E_d(0, d+2) = 1$.



Следовательно, $\varphi(\neg F(0, d+2)) = 1$. Противоречие.

Логика первого порядка – логика предикатов.

§6. Многосортная логика предикатов

Расширение понятия формулы логики предикатов вводится определением нового понятия ограниченных кванторов.

Опр. Пусть $\mathrm{B}(x)$ – одноместный предикат. Ограниченный квантор общности $(\forall \mathrm{B}(x))$ применяется так:
$(\forall \mathrm{B}(x))\ \mathrm{F}(x,\ldots)$ есть сокращение формулы $(\forall x)(\mathrm{B}(x) \to \mathrm{F}(x,\ldots))$.

Опр. Пусть $\mathrm{B}(x)$ – одноместный предикат. Ограниченный квантор существования $(\exists \mathrm{B}(x))$ применяется так:
$(\exists \mathrm{B}(x))\ \mathrm{F}(x,\ldots)$ есть сокращение формулы $(\exists x)(\mathrm{B}(x)\ \&\ \mathrm{F}(x,\ldots))$.

Пример.
B(x) = «x – четное»;
C(x) = «x – нечетное»;
P(x, y) = «$y = x + 1$».

($\forall$B(x)) ($\exists$C(y)) P(x, y) = ?
= $(\forall x)(B(x) \to (\exists y)(C(y)\ \&\ P(x, y)))$.

При построении формул многосортной логики используется сигнатура $\Phi \cup R \cup V$, где
$V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$ (множество переменных разбито на m сортов);

для каждого аргумента x_i функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ или предиката $A(x_1, \ldots, x_n)$ указан сорт переменной.

При построении интерпретации φ используют не одно множество M, а набор $M_1, \dots, M_m$, т.е. для каждого сорта переменной свое множество M_i.

Пример. $(\forall B(x))\ (\exists C(y))\ P(x, y)$

Интерпретация φ на M_1, M_2, где
$M_1 = \{\text{\textit{четные числа}}\}$, $M_2 = \{\text{\textit{нечетные числа}}\}$.

$P(x, y)$ = «$y = x + 1$».
Переменная x – первого сорта (свойство $B(x)$),
переменная y – второго сорта (свойство $C(y)$).

Из определения следует, что многосортная логика совпадает с обычной логикой предикатов.
Однако более короткая запись формул может применяться, например, в запросах в информационных системах (т.е. базах данных).

Пример. База данных сделок купли-продажи партий товаров.

Информация хранится в виде упорядоченных наборов в следующих таблицах:

1. Партия (Номер, Наименование, Кол-во).
2. Покупка (Номер, Дата, Агент).
3. Продажа (Номер, Дата, Агент).
4. Склад (Секция, Номер, Срок).

Введем предикаты:

Партия (x, y, z).

Покупка (x, u, v).

Продажа (x, u, v).

Склад (s, x, u).

Ранее (u_1, u_2) = «$u_1 \leq u_2$».

Запрос = «Какие номера партий и наименования товаров, купленных у фирмы α в 2017 году?» соответствует формуле:

$$x \in Номер \,\&\, y \in Наим. \,\&\, (\exists z \in Кол-во)(\exists u \in Дата)$$
$$[Партия(x, y, z) \,\&\, Покупка(x, u, \alpha) \,\&\, Ранее(01.01.17, u)].$$