

§3. Нормальные формы в логике предикатов

Опр. Формула F имеет **предварённую нормальную форму (ПНФ)**, если $F = (Q_1x_1)\dots(Q_nx_n)H$, где $Q_1, \dots, Q_n \in \{\forall, \exists\}$, H не содержит кванторов.

Теорема.

Для всякой формулы F существует равносильная формула, имеющая ПНФ.

Доказательство:

Алгоритм приведения к ПНФ.

1. Исключить эквиваленцию и импликацию (по законам 21 и 20).
2. Занести отрицание к атомарным формулам (по законам де Моргана 17 и 18 и законам переноса отрицания через кванторы 26, 27).
3. Вынести кванторы вперед, используя (если нужно) переименование переменных (по законам 22, 23, 28 – 33).

Пример. Привести к ПНФ

$$\begin{aligned} F &= (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)Q(x, y) = \\ &= \neg(\forall x)(\exists y)P(x, y) \vee (\forall x)(\exists y)Q(x, y) = \\ &= (\exists x)(\forall y)\neg P(x, y) \vee (\forall x)(\exists y)Q(x, y) = \\ &= (\exists x)(\forall y)\neg P(x, y) \vee (\forall u)(\exists v)Q(u, v) = \\ &= (\exists x)(\forall y)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x, y) \vee Q(u, v)). \end{aligned}$$

Опр. Формула F имеет **сколемовскую нормальную форму (СНФ)**, если $F = (\forall x_1) \dots (\forall x_n) H$, где H не содержит кванторов и имеет КНФ.

Теорема.

Для всякой формулы F существует формула, имеющая СНФ, одновременно с F выполнимая или невыполнимая.

Доказательство:

Алгоритм приведения к СНФ.

1, 2, 3 – из алгоритма приведения к ПНФ.

Результат $F \equiv (Q_1 x_1) \dots (Q_n x_n) H$.

4. Бескванторную часть H привести к КНФ.

5. Исключить кванторы существования, поочередно слева направо, применяя одно из двух правил:

1 случай) $(\exists x_1)(Q_2 x_2) \dots H(x_1, x_2, \dots) \sim (Q_2 x_2) \dots H(a, x_2, \dots)$, где a – СИМВОЛ КОНСТАНТЫ.

2 случай) $(\forall x_1) \dots (\forall x_k)(\exists x_{k+1}) \dots H(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots) \sim$
 $\sim (\forall x_1) \dots (\forall x_k) \dots H(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k), \dots)$, где $f(x_1, \dots, x_k)$ –
СИМВОЛ ФУНКЦИИ, ЗАВИСЯЩЕЙ ОТ ПЕРЕМЕННЫХ x_1, \dots, x_k .

При выполнении 1, 2, 3, 4 шагов алгоритма получается формула, равносильная F , следовательно, выполнимая или не выполнимая одновременно с F .

Если существует интерпретация φ на модели M , при которой формула $(\exists x_1)(Q_2 x_2) \dots H(x_1, x_2, \dots)$ истинна, то существует значение $x_1 = a_1 \in M$, такое, что при этой же интерпретации φ на модели M значение $(Q_2 x_2) \dots H(a_1, x_2, \dots)$ истинно. Т.е. формула $(Q_2 x_2) \dots H(a, x_2, \dots)$ выполнима.

Если существует интерпретация φ на модели M , при которой формула $(\forall x_1) \dots (\forall x_k) (\exists x_{k+1}) \dots H(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots)$ истинна, то для любых значений переменных $x_1 = a_1, \dots, x_k = a_k$ существует подходящее значение $x_{k+1} = a_{k+1}$, такое, что при этой же интерпретации φ на модели M значение $(Q_{k+2} x_{k+2}) \dots H(a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, x_{k+2} \dots)$ истинно. Т.е. существует функция $f(x_1, \dots, x_k)$ ($a_{k+1} = f(a_1, \dots, a_k)$), для которой формула $(\forall x_1) \dots (\forall x_k) \dots H(x_1, \dots, x_k, f(x_1, \dots, x_k), \dots)$ выполнима.

Теорема доказана.

Пример. Привести к СНФ

$$F = (\forall x)(\exists y)P(x, y) \rightarrow (\forall x)(\exists y)Q(x, y) = \dots =$$

$$= (\exists x)(\forall y)(\forall u)(\exists v)(\neg P(x, y) \vee Q(u, v)) \sim$$

$$\sim (\forall y)(\forall u)(\exists v)(\neg P(a, y) \vee Q(u, v)) \sim$$

$$\sim (\forall y)(\forall u)(\neg P(a, y) \vee Q(u, f(y, u))).$$

§4. Метод резолюций в логике предикатов

Опр 1. Подстановкой называется множество равенств

$\sigma = \{ x_1 = t_1, \dots, x_n = t_n \}$, где $x_1, \dots, x_n \in V$, t_i – терм,

не содержащий x_i .

Обозначение: $\sigma(F)$ – формула, полученная из F подстановкой σ .

Опр 2. (повторно). **Литерал** – атомарная формула $P(t_1, \dots, t_n)$, или ее отрицание $\neg P(t_1, \dots, t_n)$.

Дизъюнкт (элементарная дизъюнкция) – литерал или дизъюнкция литералов.

Опр 3. **Пустой дизъюнкт** – дизъюнкт, не содержащий литералов.

□

Пустой дизъюнкт ложен при любой интерпретации на любой модели.

Опр 4. Правило резолюций в логике предикатов – из дизъюнктов $\neg P(t_1, \dots, t_n) \vee H_1$ и $P(s_1, \dots, s_n) \vee H_2$ выводится дизъюнкт $\sigma(H_1) \vee \sigma(H_2)$, где подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1, \dots, t_n))$ и $\sigma(P(s_1, \dots, s_n))$ совпадают.

«Наиболее общий унификатор».

Опр 5. Правило склейки в логике предикатов – из дизъюнкта

$P(t_1, \dots, t_n) \vee P(s_1, \dots, s_n) \vee H$ выводится дизъюнкт

$\sigma(P(t_1, \dots, t_n)) \vee \sigma(H)$, где подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1, \dots, t_n))$

и $\sigma(P(s_1, \dots, s_n))$ совпадают.

Либо – из дизъюнкта $\neg P(t_1, \dots, t_n) \vee \neg P(s_1, \dots, s_n) \vee H$ выводится

дизъюнкт $\sigma(\neg P(t_1, \dots, t_n)) \vee \sigma(H)$, где подстановка σ такая, что

$\sigma(P(t_1, \dots, t_n))$ и $\sigma(P(s_1, \dots, s_n))$ совпадают.

Опр 6. Пусть S множество дизъюнктов. Будем говорить, что дизъюнкт D_n выводится из S , если существует последовательность дизъюнктов D_1, D_2, \dots, D_n , такая, что каждый D_i либо принадлежит S , либо получен по правилу резолюций из дизъюнктов среди D_1, D_2, \dots, D_{i-1} , либо получен по правилу склейки.

Вывод D_n из S – эта последовательность D_1, D_2, \dots, D_n .

Логическое следование (повторение)

Опр 7. Формула $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **логическим следствием формул**

$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если для любой модели $\underline{M} = \langle M; \sigma \rangle$ из того, что все формулы $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$ истинны на этой модели (т.е. для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ для любой интерпретации предметных переменных $a_1 = \varphi(x_1), a_2 = \varphi(x_2), \dots, a_n = \varphi(x_n)$ на основном множестве M высказывание $\varphi(F_i(a_1, a_2, \dots, a_n))$ истинно) следует, что формула $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ тоже истинна на этой модели (т.е. для любой интерпретации предметных переменных

$a_1 = \varphi(x_1), a_2 = \varphi(x_2), \dots, a_n = \varphi(x_n)$ на основном множестве M
высказывание $\varphi(G(a_1, a_2, \dots, a_n))$ истинно).

Лемма 1.

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \models G(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \Leftrightarrow \bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n \models \bar{G}.$$

Здесь для любой формулы $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ через \bar{F} обозначается замыкание $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ этой формулы.

Поэтому везде далее будем считать, когда будем говорить о логическом следствии $F_1, F_2, \dots, F_n \models G$, что формулы F_1, F_2, \dots, F_n, G – замкнуты.

Опр 8. Будем говорить, что для множества $T = \{f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n)\}$ формул ЛП **существует модель**, если *существует* такая модель $\underline{M} = \langle M; \sigma \rangle$ на которой истинны все эти формулы, т.е. что для любых $a_1, \dots, a_n \in M$ справедливо $f_1(a_1, \dots, a_n) = \dots = f_k(a_1, \dots, a_n) = 1$

(другими словами, множество T выполнимо, т. и т.т.к. существует модель для формулы $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge f_k(x_1, \dots, x_n)$,
В частности, существует модель для формулы-замыкания $\bar{f} = \forall x_1 \dots \forall x_n f(x_1, \dots, x_n)$).

Теорема 1 (из предыдущих лекций)

- (1) Каждая формула ЛП равносильна своей ПНФ
- (2) Каждая формула ЛП одновременно выполнима или невыполнима вместе со своей СНФ.

Теорема 2.

Множество дизъюнктов S логики предикатов не имеет модели \Leftrightarrow из S выводится пустой дизъюнкт.

Доказательство достаточности:

\Leftarrow) Дано: из S выводится пустой дизъюнкт.

Заметим, что правило резолюций и правило склейки сохраняют истинность при некоторой интерпретации φ , если **для всех свободных переменных подразумевается квантор всеобщности.**

1) если $\varphi(\neg P(t_1, \dots, t_n) \vee H_1) = 1$ и $\varphi(P(s_1, \dots, s_n) \vee H_2) = 1$, и существует подстановка σ такая, что $\sigma(P(t_1, \dots, t_n))$ и $\sigma(P(s_1, \dots, s_n))$ совпадают, то $\varphi(\sigma(\neg P(t_1, \dots, t_n)) \vee \sigma(H_1)) = 1$ и $\varphi(\sigma(P(s_1, \dots, s_n)) \vee \sigma(H_2)) = 1$.

Либо $\varphi(\sigma(H_1)) = 1 \Rightarrow \varphi(\sigma(H_1) \vee \sigma(H_2)) = 1$.

Либо $\varphi(\sigma(H_1)) = 0 \Rightarrow \varphi(\sigma(\neg P(t_1, \dots, t_n))) = 1 \Rightarrow$

$\varphi(\sigma(P(s_1, \dots, s_n))) = 0 \Rightarrow \varphi(\sigma(H_2)) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(\sigma(H_1) \vee \sigma(H_2)) = 1$.

2) если $\varphi(P(t_1, \dots, t_n) \vee P(s_1, \dots, s_n) \vee H) = 1$, то
 $\varphi(\sigma(P(t_1, \dots, t_n)) \vee \sigma(P(s_1, \dots, s_n)) \vee \sigma(H)) = 1$.
Тогда $\varphi(\sigma(P(t_1, \dots, t_n)) \vee \sigma(H)) = 1$.

(От противного) Предположим S имеет модель, т.е. существует интерпретация модель \underline{M} и существует подстановка σ , при которых все дизъюнкты из S истинны для всех значений переменных. Тогда истинны все дизъюнкты из последовательности $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, \square$.

Т.е. $\varphi(\sigma(\square)) = 1$ – противоречие. Значит, S не имеет модели.
Достаточность доказана.

Необходимость – без доказательства.

Схема применения метода резолюций для доказательства логического следствия

Дано: F_1, F_2, \dots, F_n, G - замкнутые формулы.

1. Формулы $F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G$ привести к СНФ.
2. Отбросить кванторы общности.
3. Все получившиеся дизъюнкты собрать в множество S , переименовав, если надо, переменные, чтобы в разных дизъюнктах переменные не повторялись.
4. Построить вывод \square из S .

Пример 1. Доказать методом резолюций, что G является логическим следствием формул F_1, F_2 :

$$F_1 = (\forall x)(A(x) \rightarrow (\exists y)D(x, y));$$

$$F_2 = (\forall x)(\forall y)(D(x, y) \rightarrow B(x));$$

$$G = (\forall x)(A(x) \rightarrow B(x)).$$

$$F_1 \equiv (\forall x)(\neg A(x) \vee (\exists y)D(x, y)) \equiv (\forall x)(\exists y)(\neg A(x) \vee D(x, y)) \sim \\ \sim (\forall x)(\neg A(x) \vee D(x, f(x))). \text{ Дизъюнкт: } \neg A(x) \vee D(x, f(x)).$$

$$F_2 \equiv (\forall x)(\forall y)(\neg D(x, y) \vee B(x)). \text{ Дизъюнкт: } \neg D(u, y) \vee B(u).$$

$$\neg G = \neg(\forall x)(\neg A(x) \vee B(x)) \equiv (\exists x)(A(x) \& \neg B(x)) \sim (A(a) \& \neg B(a)).$$

Дизъюнкты: $A(a), \neg B(a)$.

$$S = \{\neg A(x) \vee D(x, f(x)), \neg D(u, y) \vee B(u), A(a), \neg B(a)\}.$$

$$\neg A(x) \vee D(x, f(x)), \neg D(u, y) \vee B(u), \{u = x, y = f(x)\}, \neg A(x) \vee B(x),$$

$$A(a), \{x = a\}, B(a), \neg B(a), \square.$$

Пример 2 (Сорит Л. Кэррола). Доказать логичность рассуждений

(1) Из всех птиц только страусы достигают 9 футов роста. (2) В этом птичнике нет птиц, которые принадлежали бы кому-нибудь, кроме меня. (3) Ни один страус не питается пирогами с начинкой. (4) У меня нет птиц, которые бы не достигали 9 футов роста. Следовательно, ни одна птица в этом птичнике не питается пирогами с начинкой. Взять в качестве основного множества множество птиц.

Решение. Пусть

$M = \{\text{множество птиц}\}$

$C(x) = 1 \Leftrightarrow x - \text{страус}$

$H(x) = 1 \Leftrightarrow x - \text{достигает 9 футов роста}$

$B(x) = 1 \Leftrightarrow x - \text{птица в этом птичнике}$

$M(x) = 1 \Leftrightarrow x - \text{птица, принадлежащая мне}$

$P(x) = 1 \Leftrightarrow x \text{ питается пирогами с начинкой}$

$F_1 = \forall x(H(x) \rightarrow C(x)) \equiv \forall x(\neg H(x) \vee C(x))$. Дизъюнкты: $\neg H(x) \vee C(x)$.

$F_2 = \neg \exists x(B(x) \wedge \neg M(x)) \equiv \forall x(\neg B(x) \vee M(x))$. Дизъюнкты: $\neg B(y) \vee M(y)$.

$F_3 = \neg \exists x(C(x) \wedge P(x)) \equiv \forall x(\neg C(x) \vee \neg P(x))$. Дизъюнкты: $\neg C(u) \vee \neg P(u)$.

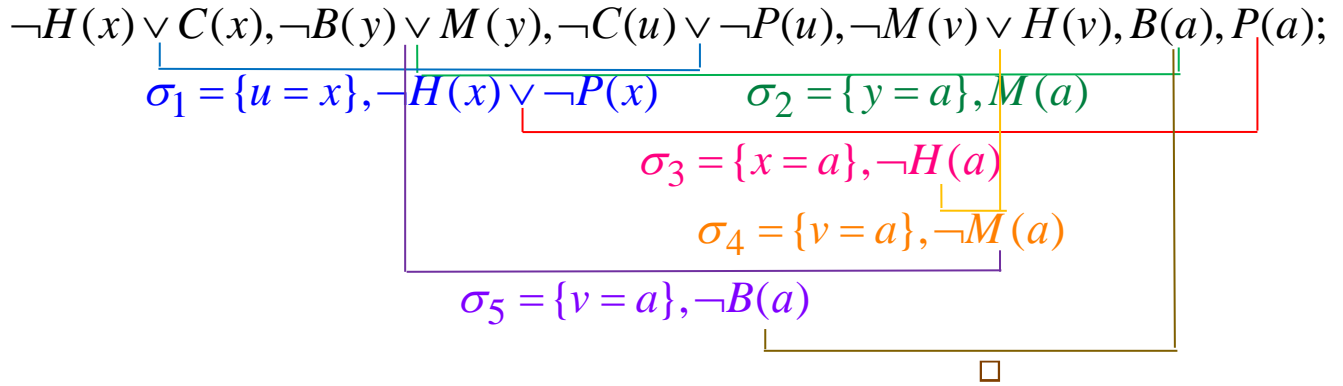
$F_4 = \neg \exists x(M(x) \wedge \neg H(x)) \equiv \forall x(\neg M(x) \vee H(x))$. Дизъюнкты: $\neg M(v) \vee H(v)$

$G = \neg \exists x(B(x) \wedge P(x)) \equiv \forall x(\neg B(x) \vee \neg P(x))$

$\neg G = \exists x(B(x) \wedge P(x)) \sim B(a) \wedge P(a)$. Дизъюнкты: $B(a), P(a)$.

$S = \{\neg H(x) \vee C(x), \neg B(y) \vee M(y), \neg C(u) \vee \neg P(u),$

$\neg M(v) \vee H(v), B(a), P(a)\}$.



$\neg H(x) \vee \neg P(x), M(a), \neg H(a), \neg M(a), \neg B(a), \square$

Обоснование схемы применения метода резолюций для доказательства логического следствия

Лемма 2. Пусть F_1, F_2, \dots, F_n, G – замкнутые формулы. Тогда $F_1, F_2, \dots, F_n \models G \Leftrightarrow$ множество S дизъюнкций, входящих в СНФ формул $F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G$, не имеет модели.

Доказательство. По теореме из лекций

$F_1, F_2, \dots, F_n \models G \Leftrightarrow$ формула $\Phi = F_1 \wedge F_2 \wedge \dots \wedge F_n \wedge \neg G$

логически противоречива (невыполнима) \Leftrightarrow

\Leftrightarrow по утв. (2) теоремы 1 сколем. норм. форма формулы Φ – формула $\tilde{\Phi} = \forall x_1 \dots \forall x_n (D_1 \wedge \dots \wedge D_n)$ логически противоречива (невыполнима), где $S = \{D_1, \dots, D_n\}$ – множество дизъюнкций формулы $\tilde{\Phi}$.

Это значит, что формула $\tilde{\Phi}(x_1, \dots, x_n) = D_1 \wedge \dots \wedge D_n$ логически противоречива, что по опр. означает, что множество $S = \{D_1, \dots, D_n\}$ не имеет модели.

Следовательно,

$F_1, F_2, \dots, F_n \models G \Leftrightarrow$ из множества S выводится пустой дизъюнкнт.