

Глава II. Логика предикатов

§1. Предикаты и операции с ними. Формулы.

Опр. Пусть $M \neq \emptyset$. Назовём **n -местным предикатом**, заданным на M выражение, содержащее n переменных, обращающееся в высказывание при замене переменных элементами из M .

Обозначение: $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример. $P(x) = \langle \text{Число } x \text{ является простым} \rangle$ – одноместный предикат на \mathbb{N} . $P(3)$ – истинное высказывание; $P(4)$ – ложное.

Опр. Назовём **нульместным предикатом** высказывание.

Операции с высказываниями переносятся на предикаты:
конъюнкция, дизъюнкция, отрицание, импликация, эквиваленция.

Например, для конъюнкции новое определение формулируется так:

Опр. Пусть $U(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n -местные предикаты, заданные на M . Конъюнкцией этих предикатов называется новый предикат $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$, такой, что для любых элементов

$a_1, a_2, \dots, a_n \in M$ высказывание

$$W(a_1, a_2, \dots, a_n) = U(a_1, a_2, \dots, a_n) \& V(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

Пример. $U(x) = \text{«Число } x \text{ является простым»}$; $V(x) = \text{«Число } x \text{ является четным»}$ – одноместные предикаты на \mathbb{N} . Тогда $U(x) \& V(x) = \text{«Число } x = 2\text{»}$.

Кроме этих пяти операций введём ещё две операции навешивания кванторов.

Опр. Пусть $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n -местный предикат, заданный на M , y – переменная (либо совпадающая с x_i , либо новая). Назовём **предикатом, полученным навешиванием квантора общности на переменную y и предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$** выражение «Для любого y выполняется $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ».

Обозначение: $(\forall y)P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Опр. Пусть $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – n -местный предикат, заданный на M ,
 y – переменная (либо совпадающая с x_i , либо новая). Назовём
предикатом, полученным навешиванием квантора
существования на переменную y и предиката $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$
выражение «Существует y , такой, что выполняется $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ».

Обозначение: $(\exists y)P(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример. $P(x) = \text{«Число } x \text{ является простым»}$ – одноместный предикат на \mathbb{N} .

$(\exists x)P(x) = \text{«Существует простое число } x\text{»}$ – высказывание.

$(\exists y)P(x) = \text{«Существует } y, \text{ такое, что } x \text{ простое число»}$ – одноместный предикат с переменной x .

Пусть Φ – множество символов функций,
 R – множество символов предикатов,
 V – множество переменных.

В дальнейшем $\Phi \cup R$ называют сигнатурой.

Опр. **Термом** называется выражение одного из двух видов:

- 1) переменная или константа (символ нуль-местной функции);
- 2) $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где $f \in \Phi$, t_1, t_2, \dots, t_n – термы.

Опр. **Атомарной формулой** называется выражение

$A(t_1, t_2, \dots, t_n)$, где $A \in R$, t_1, t_2, \dots, t_n – термы.

Опр. **Формулой логики предикатов** называется выражение одного из двух видов:

1) атомарная формула;

2) $(F) \& (G)$, $(F) \vee (G)$, $\neg(F)$, $(F) \rightarrow (G)$, $(F) \leftrightarrow (G)$, $(\forall y)(F)$, $(\exists y)(F)$,
где F и G – формулы логики предикатов, y – переменная.

Опр. В формулах $(\forall y)(F)$, $(\exists y)(F)$, формула F называется **областью действия квантора по переменной y** .

Для уменьшения количества скобок договоримся о приоритетах операций: у кванторов выше, чем у связок, для связок так же, как в высказываниях.

§2. Интерпретация, равносильность. Законы логики предикатов. Логическое следствие.

Опр. Вхождение переменной в формулу называется **связанным**, если переменная стоит непосредственно за квантором, или входит в область действия квантора по этой переменной.

Вхождение переменной **свободное** – в противном случае.

Опр. Переменная называется **свободной в формуле**, если существует хотя бы одно свободное вхождение этой переменной в формулу.

Пример 1. $(\exists x)A(x) \& B(x, y)$.

2. $(\exists x)(A(x) \& B(x, y))$.

Опр. **Интерпретацией** формулы F на непустом множестве M называется отображение φ , ставящее в соответствие:
символу константы – элемент из M ,
символу n -местной функции f – некоторую функцию на M ,
символу n -местного предиката A – некоторый предикат, заданный на M .

Результатом $\varphi(F)$ интерпретации формулы является предикат $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, где переменные x_1, x_2, \dots, x_n являются свободными в формуле F .

Замечание: интерпретация формулы F в модели $(M, \{\text{множество конкретных предикатов}\}, \varphi)$ – высказывание, полученное из предиката $\varphi(F)$ при замене свободных переменных элементами из M .

Пример. $F = (\exists x)(A(x) \& B(x, y))$.

Пусть $M = \mathbb{N}$. Отображение φ ставит в соответствие:

$A(x)$ – «Число x простое»,

$B(x, y)$ – « $x < y$ ».

$\varphi(F)$ = «Существует число x , простое и меньшее y ».

Модель $(\mathbb{N}, \{ A(x) \text{ – «Число } x \text{ простое», } B(x, y) \text{ – «} x < y \text{»})$.

Интерпретация в этой модели: «Существует число, простое и меньшее 5» = 1.

Далее у формул будем указывать, какие свободные переменные входят – $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Опр. Формулы $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называются **равносильными**, если для любой интерпретации φ на множестве M , и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$, значения истинности высказываний $\varphi(F(a_1, a_2, \dots, a_n))$ и $\varphi(G(a_1, a_2, \dots, a_n))$ совпадают.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv G(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Опр. Формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **тождественно истинной**, если для любой интерпретации φ на множестве M , и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$, высказывание $\varphi(F(a_1, a_2, \dots, a_n))$ истинно.

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 1$$

Теорема. $F \equiv G \Leftrightarrow F \leftrightarrow G \equiv 1$.

Законы логики предикатов:

1) – 21) аналогичны законам логики высказываний.

$$22) (\forall x)(F(x) \& G(x)) \equiv (\forall x)F(x) \& (\forall x)G(x);$$

$$23) (\exists x)(F(x) \vee G(x)) \equiv (\exists x)F(x) \vee (\exists x)G(x);$$

Доказательство 22) $(\forall x)(F(x) \& G(x)) \equiv (\forall x)F(x) \& (\forall x)G(x)$:

$\varphi((\forall x)(F(x) \& G(x))) = 1 \Leftrightarrow$ для любого элемента a , принадлежащего M , выполняется $\varphi(F(a) \& G(a)) = 1 \Leftrightarrow \varphi(F(a)) = 1$ и $\varphi(G(a)) = 1$.

Т.е. $\varphi((\forall x)F(x)) = 1$ и $\varphi((\forall x)G(x)) = 1 \Leftrightarrow$
 $\varphi((\forall x)F(x) \& (\forall x)G(x)) = 1$.

Замечание:

$$1. (\forall x)(F(x) \vee G(x)) \not\equiv (\forall x)F(x) \vee (\forall x)G(x).$$

Для доказательства неравносильности можно привести контрпример.

Пусть $F(x) = \langle\langle \text{Число } x \text{ чётное} \rangle\rangle$, $G(x) = \langle\langle \text{Число } x \text{ нечётное} \rangle\rangle$ –
одноместные предикаты на \mathbb{N} .

Тогда и левая часть, и правая часть равенства являются
высказываниями:

л.ч. = $\langle\langle \text{Для любого натурального числа } x \text{ выполняется, что } x \text{ чётное} \text{ или } x \text{ нечётное} \rangle\rangle = 1$;

п.ч. = $\langle\langle \text{Любое натуральное число чётное или любое натуральное} \text{ число нечётное} \rangle\rangle = 0 \vee 0 = 0$.

$$2. (\exists x)(F(x) \& G(x)) \neq (\exists x)F(x) \& (\exists x)G(x);$$

Доказательством служит такая же интерпретация, как в предыдущем случае.

л.ч. = «Существует натуральное число x , такое, что выполняется x чётное и x нечётное» = 0;

п.ч. = «Существует натуральное число чётное и существует натуральное число нечётное» = 1 & 1 = 1.

$$24) (\forall x)(\forall y)F(x, y) \equiv (\forall y)(\forall x)F(x, y) ;$$

$$25) (\exists x)(\exists y)F(x, y) \equiv (\exists y)(\exists x)F(x, y) ;$$

Замечание: $(\forall x)(\exists y)F(x, y) \not\equiv (\exists y)(\forall x)F(x, y)$.

Для доказательства неравносильности можно привести контрпример.

Пусть $F(x, y) = \langle x \leq y \rangle$ – двухместный предикат на \mathbb{N} .

л.ч. = «Для любого числа x существует y , превышающий или равный x » = 1.

п.ч. = «Существует число y , такое, что для любого x выполняется $x \leq y$ » = 0.

$$26) \neg(\forall x)F(x) \equiv (\exists x)\neg F(x);$$

$$27) \neg(\exists x)F(x) \equiv (\forall x)\neg F(x);$$

$$28) (\forall x)(F(x) \vee G) \equiv (\forall x)F(x) \vee G;$$

$$29) (\exists x)(F(x) \& G) \equiv (\exists x)F(x) \& G;$$

Пусть $Q_1, Q_2 \in \{\forall, \exists\}$, $F(x)$ не содержит y , $G(y)$ не содержит x .

$$30) (Q_1x)(Q_2y)(F(x) \& G(y)) \equiv (Q_1x)F(x) \& (Q_2y)G(y);$$

$$31) (Q_1x)(Q_2y)(F(x) \vee G(y)) \equiv (Q_1x)F(x) \vee (Q_2y)G(y);$$

$$32) (\forall x)F(x) \equiv (\forall z)F(z);$$

$$33) (\exists x)F(x) \equiv (\exists z)F(z).$$

Опр. Формула $G(x_1, x_2, \dots, x_n)$ называется **логическим следствием** формул $F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, если для любой интерпретации φ на множестве M , и любых элементов $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$, из того, что все значения $\varphi(F_1(a_1, a_2, \dots, a_n)), \dots, \varphi(F_k(a_1, a_2, \dots, a_n))$ истинны, следует, что значение $\varphi(G(a_1, a_2, \dots, a_n))$ истинно.

Опр. Множество формул

$F_1(x_1, x_2, \dots, x_n), F_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, F_m(x_1, x_2, \dots, x_n)$ **выполнимо**, если существует интерпретация φ на множестве M , и существуют элементы $a_1, a_2, \dots, a_n \in M$, такие, что все значения $\varphi(F_1(a_1, a_2, \dots, a_n)), \dots, \varphi(F_m(a_1, a_2, \dots, a_n))$ истинны.

Невыполнимо – в противном случае.

Теорема.

Формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \dots, F_n \Leftrightarrow$ множество формул $\{F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G\}$ не выполнимо.

Замечание: выполнимость формулы на конечных моделях и бесконечных могут не совпадать.