§7. Аксиоматическая теория исчисления высказываний

Один случай формальной теории, совпадающей с логикой высказываний.

Опр. **Алфавитом** теории **Т** называется множество, содержащее заглавные латинские буквы, с индексом или без, скобки (и), символы $\neg$ и $\rightarrow$.

Опр. **Формулой** теории **Т** называется слово над алфавитом теории, являющееся формулой логики высказываний.

Замечания:
1) логические переменные – латинские буквы;
связки – $\neg$ и $\rightarrow$;

2) Формулой называется либо логическая переменная, либо выражение $(\neg F)$, $(F \to G)$.

Опр. **Аксиомой** теории **T** называется каждая из формул:
(A1) $F \to (G \to F)$;
(A2) $(F \to (G \to H)) \to ((F \to G) \to (F \to H))$;
(A3) $(\neg G \to \neg F) \to ((\neg G \to F) \to G)$;
где F и G – формулы теории **T**.

Замечание: можно считать, что аксиом бесконечно много, но каждая построена по одному из трех шаблонов.

Опр. **Правилом вывода** в теории **Т** называется правило *modus ponens*:
из двух формул F, $(F \to G)$ непосредственным следствием является формула G.

Краткое обозначение: $\dfrac{F,(F \to G)}{G}$.

Опр. **Теория Т –** набор из алфавита, множества всех возможных формул, множества аксиом, правила вывода *modus ponens*.

Опр. Пусть Г – подмножество формул теории **Т**. Формула F_n выводится из Г, если существует последовательность формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, такая, что каждая F_i либо является аксиомой, либо принадлежит Г, либо получена по правилу вывода из формул среди $F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}$.

Обозначение: Г $\vdash F_n$.

<u>Замечание</u>: формулы множества Г удобно называть **гипотезами**.

Опр. Формула F_n называется **теоремой**, если существует последовательность формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, такая, что каждая F_i либо является аксиомой, либо получена по правилу вывода из формул среди $F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}$, т.е. F_n выводится из пустого множества.

Обозначение: $\vdash F_n$.

Замечание: любую теорему можно использовать как аксиому при построении вывода.

Опр. Аксиоматическая теория называется **непротиворечивой**, если не существует формулы P, такой, что и P и $\neg P$ являются теоремами.

Опр. Аксиоматическая теория называется **разрешимой**, если существует алгоритм, проверяющий для любой формулы P, является ли P теоремой.

Лемма 1. Формула $(F \to F)$ – теорема теории **Т.**

Доказательство:

1. В аксиому (А2) подставим вместо G – $(F \to F)$; вместо H – F:
$(F \to ((F \to F) \to F)) \to ((F \to (F \to F)) \to (F \to F))$.
2. В аксиому (А1) подставим вместо G – $(F \to F)$:
$F \to ((F \to F) \to F)$.
3. Из 1 и 2 следует по (*mp*) $(F \to (F \to F)) \to (F \to F)$.
4. В аксиому (А1) подставим вместо G – F:
$F \to (F \to F)$.
5. Из 3 и 4 следует по (*mp*) $(F \to F)$.

Лемма доказана.

Теорема о дедукции.
Если $\{\Gamma, F\} \vdash G$, то $\Gamma \vdash (F \to G)$.

(Частный случай) Теорема Эрбана.
Если $\{F\} \vdash G$, то $\vdash (F \to G)$.

Доказательство теоремы о дедукции:

Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_n = G$ вывод из $\{\Gamma, F\}$.
Индукцией по номеру i, где $1 \le i \le n$, докажем, что $\Gamma \vdash (F \to F_i)$.
Б.И. $i = 1$. Докажем, что $\Gamma \vdash (F \to F_1)$.
Формула F_1 либо принадлежит Γ, либо аксиома, либо совпадает с F.

В первых двух случаях $(F \to F_1)$ следует по (mp) из F_1 и аксиомы (A1) $F_1 \to (F \to F_1)$.

В третьем случае получаем теорему $(F \to F)$.

Ш.И. $i > 1$. Пусть для любого $k < i$ выполняется $\Gamma \vdash (F \to F_k)$.

Докажем, что $\Gamma \vdash (F \to F_i)$.

1 случай) F_i принадлежит Г или является аксиомой.

Тогда $(F \to F_i)$ следует по (mp) из F_i и аксиомы (A1) $F_i \to (F \to F_i)$.

2 случай) F_i совпадает с F.

Тогда получаем теорему $(F \to F)$.

3 случай) F_i следует по (*mp*) из F_j и F_m, $j < i$, $m < i$, $F_m = F_j \to F_i$.
По предположению индукции:
$\Gamma \vdash (F \to F_j)$; $\Gamma \vdash (F \to F_m)$, т.е. $\Gamma \vdash (F \to (F_j \to F_i))$.
Из последней формулы и аксиомы (А2)
$(F \to (F_j \to F_i)) \to ((F \to F_j) \to (F \to F_i))$ по (*mp*) следует
$((F \to F_j) \to (F \to F_i))$.

Из последней формулы и $(F \to F_j)$ по (*mp*) следует $(F \to F_i)$.

Теорема доказана.

Следствия:

1. $(F \to G), (G \to H) \vdash (F \to H)$; (правило силлогизма)
2. $(F \to (G \to H)), G \vdash (F \to H)$.

Доказательство 1:

F, $(F \to G)$, G по (mp), $(G \to H)$, H по (mp).

$\Rightarrow (F \to G), (G \to H), F \vdash H$.

По теореме о дедукции $(F \to G), (G \to H) \vdash (F \to H)$.

Доказательство 2:

1) F, $(F \to (G \to H))$;

$(G \to H)$ по (mp),

2) $(G \to H)$,G;

H по (mp) $\Rightarrow (F \to (G \to H)), G, F \vdash H$.

По теореме дедукции $(F \to (G \to H)), G \vdash (F \to H)$.

<u>Лемма 2.</u> (следствия из теоремы о дедукции)
(доказательство на практике)
1) $\vdash \neg\neg F \to F$ (или по ТД $\neg\neg F \vdash F$) (удаление $\neg$);
2) $\vdash F \to \neg\neg F$ (или по ТД $F \vdash \neg\neg F$) (введение $\neg$);
3) $\vdash (\neg G \to \neg F) \to (F \to G)$ (или по ТД $\neg\neg F \vdash F$) (контрапозиция);
4) $\vdash (F \to G) \to (\neg G \to \neg F)$ (или по ТД $(F \to G) \vdash (\neg G \to \neg F)$);
5) $\vdash \neg F \to (F \to G)$ (или по ТД $\neg F, F \vdash G$) (из лжи следует всё, что угодно);
6) $\vdash F \to (\neg G \to \neg (F \to G))$ (или по ТД $F, \neg G \vdash \neg (F \to G)$));
7) $\vdash (F \to G) \to ((\neg F \to G) \to G)$ (или по ТД $(F \to G), (\neg F \to G) \vdash G$).

Замечания

1. $F \vdash G \Leftrightarrow \neg G \vdash \neg F$.
2. Если $F \vdash G$ и $G \vdash H$, то $F \vdash H$.

Доказательство утверждения 1 замечания следует из следствий 3,4, а доказательство утверждения 2 – из следствия - правила силлогизма.

Определим новые связки:

$(F \,\&\, G)$ означает $\neg\, (F \to \neg G)$;

$(F \vee G)$ означает $(\neg\, F) \to G$;

$(F \leftrightarrow G)$ означает $(F \to G) \,\&\, (G \to F)$.

Теорема (о полноте).

Формула F теории **T** является теоремой $\Leftrightarrow$ формула логики высказываний F тождественно истинная.

Следствие.

Теория **T –** непротиворечивая и разрешимая.

Теперь мы сформулировали теорему о полноте, полученную К.Гёделем в 1930г. Она показывает равнообъёмность семантического свойства тождественной истинности и синтаксического свойства выводимости.
Более того, теоремой о полноте называют утверждение о выводимости любой тождественно истинной формулы, показывающей полноту нашего исчисления, т.е. возможность вывести или доказать в нашей дедуктивной системе любую тождественно истинную формулу.

Теорема о полноте, адекватности, выполнимости и компактности для ФЛВ

Теорема о полноте

Любая формула тождественно истинна тогда и только тогда, когда она выводима

$$\boxed{\models \varphi \Leftrightarrow \vdash \varphi}$$

Теорема об адекватности

Формула φ логически следует из множества формул Φ тогда и только тогда, когда она выводима

$$\boxed{\Phi \models \varphi \Leftrightarrow \Phi \vdash \varphi}$$

Теорема выполнимости

Множество формул выполнимо тогда и только тогда, когда это множество непротиворечиво.

<u>Теорема о компактности</u>

Множество формул выполнимо, если выполнимо каждое его конечное подмножество.

<u>Доказательство теоремы о полноте</u>.

(Достаточность). Если $\vdash \varphi$, то, очевидно, $\vDash \varphi$, поскольку правило MP из тождественно истинных формул получает тожественно истинные формулы и, кроме того, легко проверить при помощи таблиц истинности, все аксиомы тождественно истинны.

(Необходимость). Докажем сначала лемму. Через $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)^{\alpha}$ будем обозначать $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, если $\alpha = 1$, и $\neg f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$, если $\alpha = 0$.

Лемма. (•) $x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} \vdash f\left(x_1,\ldots,x_n\right)^{f\left(x_1,\ldots,x_n\right)}$ для любых $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathbb{B}$. (Доказательство проводится индукцией по длине формулы $f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$. (Домашняя контрольная работа № 2 «Исчисление высказываний»).

Пусть $\vDash \varphi$, т.е. для любого вектора $\bar{\alpha} \in \mathbb{B}^n, \quad \varphi\left(\bar{\alpha}\right)=1 \Rightarrow$ для любых $\bar{\alpha} \in \mathbb{B}^n, \quad x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} \vdash \varphi\left(\bar{x}\right)$ по лемме $\Rightarrow x_1^{\alpha_1},\ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, x_n \vdash \varphi$ и $\Rightarrow x_1^{\alpha_1},\ldots x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \neg x_n \vdash \varphi \Rightarrow$ по теореме о дедукции

Далее:

$x_n \vdash \psi$ и $\neg x_n \vdash \psi$, где $\psi = x_1^{\alpha_1} \to \left(x_2^{\alpha_2} \to \cdots \to \left(x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \to \varphi\right)\ldots\right) \Rightarrow$ по заданию 2б (введение дизъюнкции) $\left(\mathrm{A} \vdash \mathrm{C}, \mathrm{B} \vdash \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{A} \vee \mathrm{B} \vdash \mathrm{C}\right)$ из дом. контр. раб. (введение $\vee$), имеем, $\neg x_n \vee x_n \vdash \psi$. Поскольку $\vdash \neg x_n \vee x_n$

(задание 15a), то по замечанию 2 $\vdash\psi$, т.е. по теореме о дедукции $x_1^{\alpha_1},\ldots,x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\vdash\varphi$ и т.д. Следовательно, $\vdash\varphi$.

<u>Доказательство теоремы об адекватности</u> приведём для <u>конечного множества формул Ф</u>

Пусть Ф=$\{\varphi_1,\ldots\varphi_n\}$, тогда Ф$\vDash\varphi$ равносильно

$\varphi_1,\ldots,\varphi_n\vDash\varphi\Leftrightarrow\vDash\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n\to\varphi\Leftrightarrow\vDash\varphi_1\to\left(\varphi_2\to\cdots\to\left(\varphi_n\to\varphi\right)\ldots\right)$ (*)

Аналогично, Ф$\vdash\varphi$ равносильно $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\vdash\varphi\Leftrightarrow$ по теореме о дедукции $\vdash\varphi_1\to\left(\varphi_2\to\cdots\to\left(\varphi_n\to\varphi\right)\ldots\right)$ (**)

Но по теореме о полноте из (*) следует (**). Теорема доказана.

Доказательство теоремы о выполнимости покажем для конечного множества Ф

Если Ф противоречиво, то $\Phi \vdash \psi$ и $\Phi \vdash \neg\psi$, т.е. по 1б (введение конъюнкции) $(\mathrm{A} \vdash \mathrm{B}, \mathrm{A} \vdash \mathrm{C} \Rightarrow \mathrm{A} \vdash \mathrm{B} \wedge \mathrm{C})$, имеем $\Phi \vdash \psi \wedge \neg\psi \Rightarrow$ по теореме о полноте $\Phi \vDash \psi \wedge \neg\psi$, но $\psi \wedge \neg\psi \equiv 0 \Rightarrow \Phi$ невыполнимо. Итак, из выполнимости Ф следует его непротиворечивость.

Доказательство для произвольного Ф приведём для формул логики предикатов, включающих в себя формулы логики высказываний.

Доказательство леммы.

Б.И. $f(x) = x$

$\alpha = 0 \Rightarrow x^{\alpha} = \neg x,\ f(\alpha) = 0,\ f(x)^{f(\alpha)} = \neg x \Rightarrow \neg x \vdash \neg x,$ т.е. $x^{\alpha} \vdash f(x)^{f(\alpha)}$.

$\alpha = 1 \Rightarrow x^{\alpha} = x,\ f(\alpha) = 1,\ f(x)^{f(\alpha)} = x \Rightarrow x \vdash x,$ т.е. $x^{\alpha} \vdash f(x)^{f(\alpha)}$.

Ш.И. 1) $f(\overline{x}) = \neg g(\overline{x})$.

По предположению индукции

$x_1^{\alpha_1},\dots,x_n^{\alpha_n} \vdash g\left(\overline{x}\right)^{f(\overline{x})}$ (*)

1.1) Пусть $f(\overline{\alpha}) = 1$, тогда

$$g(\overline{\alpha}) = 0 \Rightarrow g(\overline{x})^{g(\overline{\alpha})} = \neg g(\overline{x}),\ f(\overline{x})^{f(\overline{\alpha})} = f(\overline{x}) = \neg g(\overline{x}).$$

Из (*) следует требуемое.

1.2) Пусть $f(\overline{\alpha}) = 0$, тогда

$$g(\overline{\alpha}) = 1 \Rightarrow g(\overline{x})^{g(\overline{\alpha})} = g(\overline{x}),\ f(\overline{x})^{f(\overline{\alpha})} = \neg f(\overline{x}) = \neg\neg g(\overline{x}).$$

Из (*) и $g(\overline{x}) \vdash \neg\neg g(\overline{x})$ (следствия 1,2 теоремы о дедукции) по замечанию 2 имеем $(\bullet)$.

2) $f(\overline{x}) = g(\overline{x}) \to h(x)$ и к $g(\overline{x}), h(x)$ применимо предположение индукции

$x_1^{\alpha_1},\dots,x_n^{\alpha_n} \vdash g\left(\overline{x}\right)^{g(\overline{\alpha})}$ (**)

$x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} \vdash h\left(\overline{x}\right)^{h(\overline{\alpha})}$ (***)

2.1) Пусть $g(\overline{\alpha})=0,$ тогда

$$f(\overline{\alpha})=1 \Rightarrow g(\overline{x})^{g(\overline{\alpha})} = \neg g(\overline{x}),\ f(\overline{x})^{f(\overline{\alpha})} = f(\overline{x}) = g(\overline{x}) \to h(x) \Rightarrow$$

Из (**) тогда $x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} \vdash \neg g\left(\overline{x}\right).$ Из следствия 5 теоремы о дедукции

$\vdash \neg g(\overline{x}) \to (g(\overline{x}) \to h(\overline{x})),$ т.е $\neg g(\overline{x}) \vdash g(\overline{x}) \to h(\overline{x}) \Rightarrow$ по замечанию2 $x_1^{\alpha_1},\ldots,x_n^{\alpha_n} \vdash g\left(\overline{x}\right) \to h(\overline{x}),$ т.е. справедливо $(\bullet)$.

2.2) Пусть $g(\overline{\alpha})=1,$

2.2.1)

$$g(\overline{\alpha})=1, h(\overline{\alpha})=1 \Rightarrow f(\overline{\alpha})=1 \Rightarrow f(\overline{x})^{f(\overline{\alpha})} = f(\overline{x}) = g(\overline{x}) \to h(\overline{x})$$

$h(\bar{x})^{h(\bar{\alpha})} = h(\bar{x})$. По (A1) $\vdash h(\bar{x}) \to (g(\bar{x}) \to h(\bar{x}))$, по теореме о дедукции $h(\bar{x}) \vdash (g(\bar{x}) \to h(\bar{x})) = f(\bar{x}) \Rightarrow$ по (***) по замечанию 2 имеем $(\bullet)$.

2.2.2)

$g(\bar{\alpha}) = 1, h(\bar{\alpha}) = 0 \Rightarrow f(\bar{\alpha}) = 0 \Rightarrow f(\bar{x})^{f(\bar{\alpha})} = \neg f(\bar{x}) = \neg(g(\bar{x}) \to h(\bar{x}))$.

$h(\bar{x})^{h(\bar{\alpha})} = \neg h(\bar{x}), g(\bar{x})^{g(\bar{\alpha})} = g(\bar{x})$.

По следствию 6 $\vdash g(\bar{x}) \to (\neg h(\bar{x}) \to \neg(g(\bar{x}) \to h(\bar{x})))$, по теореме о дедукции $g(\bar{x}), \neg h(\bar{x}) \vdash \neg(g(\bar{x}) \to h(\bar{x}))$. Из (**) и (***) и замечания 2 тогда имеем $(\bullet)$.

Лемма доказана.

2. Покажем, что если формулы F и $(F \to G)$ тождественно истинные, то полученная по (mp) формула G – тоже тождественно истинная.

(от противного) Предположим, что существует интерпретация φ в узком смысле, такая, что $\varphi(G) = 0$. Тогда $\varphi(F) = 1$, и $\varphi(F \to G) = 0$. Противоречие с тем, что $(F \to G)$ тождественно истинная.

Следовательно, G тождественно истинная.

3. Пусть последовательность $F_1, F_2, \ldots, F_n$ – вывод теоремы F_n. Тогда все формулы в последовательности тождественно истинные.

Необходимость доказана.