§5. Метод резолюций в логике высказываний

Метод резолюций применяется для доказательства того, что формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$. При этом доказывается невыполнимость множества формул $\{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$. Напомним, что множество формул **выполнимо**, если существует интерпретация, при которой все формулы истинны и **невыполнимо** в противном случае (в каком?)

<u>Опр</u> (повторно). **Литерал –** атомарная формула (кроме 0 и 1), или ее отрицание.

Дизъюнкт (элементарная дизъюнкция) – литерал или дизъюнкция литералов.

<u>Опр</u>. **Пустой дизъюнкт** – дизъюнкт, не содержащий литералов.

□. Пустой дизъюнкт ложен при любой интерпретации.

Опр. **Противоположные литералы** – литералы X и $\neg X$.

Опр. **Правилом резолюций** в логике высказываний называется: из двух дизъюнктов $(X \vee H_1)$ и $(\neg X \vee H_2)$ выводится дизъюнкт $(H_1 \vee H_2)$.

Пример 1. $\dfrac{\neg X \vee Y \vee Z,\ X \vee \neg Y}{Y \vee Z \vee \neg Y}$; $\dfrac{\neg X \vee Y \vee Z,\ X \vee \neg Y}{X \vee Z \vee \neg X}$

Упр. Доказать корректность вывода, т.е. доказать, что при выводе получается равносильные формулы.

Опр. Пусть S множество дизъюнктов. Будем говорить, что дизъюнкт D_n **выводится** из S, если существует последовательность дизъюнктов

$D_1, D_2, \dots, D_n$, такая, что каждый D_i принадлежит S или получен по правилу резолюций из дизъюнктов среди $D_1, D_2, \dots, D_{i-1}$.

Вывод D_n из S – эта последовательность $D_1, D_2, \dots, D_n$.

<u>Пример 2.</u> $S = \{\neg X \vee Y \vee \neg Z, X \vee \neg U, \neg Y \vee U\}$

$$D_1 = \neg X \vee Y \vee \neg Z, D_2 = X \vee \neg U, D_3 = \neg Y \vee U,$$
$$D_4 = \underline{Y} \vee \neg Z \vee \neg U, D_5 = X \vee \underline{\neg Y}, D_6 = \underline{\underline{\neg X}} \vee \neg Z \vee U,$$
$$\underline{D_7} = \underline{\underline{X}} \vee \neg Z \vee \neg U, \underline{\underline{D_8}} = \neg Z \vee U \vee \neg U \vee \neg Z \equiv 1$$

Теорема 1. Множество дизъюнктов S невыполнимо $\Leftrightarrow$ из S выводится пустой дизъюнкт.

Доказательство:
$\Leftarrow$) Дано: из S выводится пустой дизъюнкт.

Заметим, что правило резолюций сохраняет истинность при некоторой интерпретации φ, т.к. если $\varphi(X \vee H_1) = 1$ и $\varphi(\neg X \vee H_2) = 1$, то

либо $\varphi(H_1) = 1 \Rightarrow \varphi(H_1 \vee H_2) = 1$;

либо $\varphi(H_1) = 0 \Rightarrow \varphi(X) = 1 \Rightarrow \varphi(\neg X) = 0 \Rightarrow \varphi(H_2) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi(H_1 \vee H_2) = 1$.

(от противного) Предположим S выполнимо, т.е. существует интерпретация φ, при которой все дизъюнкты в S истинны. Тогда истинны все дизъюнкты в последовательности $D_1, D_2, \ldots, D_{n-1}, \square$.

Т.е. $\varphi(\square) = 1$ – противоречие.
S невыполнимо.

$\Rightarrow$) Доказательство проведём индукцией по количеству различных предметных символов, фигурирующих в записях дизъюнктов. Обозначим это количество через n. БОО – это переменные x_1, x_2, …, x_n.
<u>Б.И.</u> $n = 1$, т.е. все дизъюнкты состоят из одного литерала, каждый из которых x_1 или $\neg x_1$. Тогда невыполнимость означает, что оба таких литерала присутствуют. Из этой пары выводим $\square$.

Ш.И. Пусть для невыполнимых множеств дизъюнктов с $n-1$ предметными символами теорема уже доказана. Рассмотрим противоречивое множество S с n предметными символами. Пусть

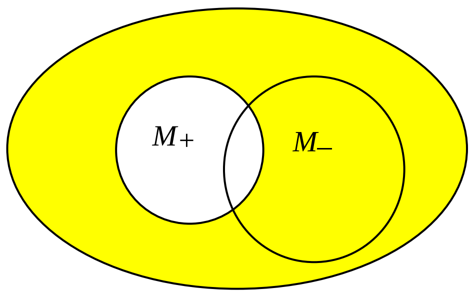
M_+ – множество дизъюнктов из M, которые не содержат $\neg x_n$, а

M_- – множество дизъюнктов из M, которые не содержат x_n.

($M_+ \cap M_-$ может быть непустым). Через $\breve{M}_+$ обозначим множество дизъюнктов, получаемых из дизъюнктов множества M_+ вычёркиванием литерала x_n, а через $\breve{M}$ – множество дизъюнктов, получаемых из дизъюнктов множества M_- вычеркиванием литерала $\neg x_n$. Покажем, что каждое из множеств невыполнимо.

От противного. Пусть $\breve{M}_+$ выполнимо. Тогда существует такая интерпретация множества $\breve{M}_+$ $\mu:\{x_1,\ldots,x_{n-1}\}\to\mathbb{B}$, что каждый дизъюнкт $D_i\in\breve{M}_+$ имеет значение $\mu(D_i)=1$. Построим такую интерпретацию μ^* множества M $\mu^*:\{x_1,\ldots,x_n\}\to\mathbb{B}$, что $\mu^*(x_i)=\mu(x_i)$ для $1\le i\le n-1$ и $\mu^*(x_n)=0$. Поскольку $a\vee 0=a$, то μ^* выполняет все дизъюнкты из M_+. Тогда множество $\overline{M}_+=\mathbb{S}\backslash M_+$ тоже выполнимо, т.к. оно содержит $\neg x_n$, а $\mu^*(\neg x_n)=1 \quad (1\vee a=1)\Rightarrow\mu^*$ выполняет все дизъюнкты из $\mathbb{S}$, но $\mathbb{S}$ невыполнимо. Противоречие.

Аналогично доказывается (*докажите самостоятельно*), что M_- также невыполнимо. Из предположения индукции и невыполнимости M_+ и M_- следует, что из $\breve{M}_+$ и $\breve{M}_-$ есть вывод $\square$. Если мы восстановим опущенный литерал x_n в выводе из $\breve{M}_+$ пустого $\square$, то получим вывод из $\mathbb{S}$ литерала x_n. Аналогично, получаем вывод из $\mathbb{S}$



литерала $\neg x_n$. Ещё раз применив правило резолюции, получим $\square$. Теорема доказана.

<u>Пример 3.</u> (демонстрация доказательства теоремы)

$\mathbb{S} = \{\overline{X_1} \vee X_2 \vee X_3, X_1 \vee X_3, \overline{X_2} \vee X_3, \overline{X_3}\}$

$M_+ = \{\overline{X_1} \vee X_2 \vee \boxed{X_3}, X_1 \vee \boxed{X_3}, \overline{X_2} \vee \boxed{X_3}\}$ – не содержат $\overline{X}_3$, т.е.

$\breve{M}_+ = \{\overline{X_1} \vee X_2, X_1, \overline{X_2}\}$

(+) $\underbrace{\overline{X_1} \vee X_2, X_1}_{X_2}, \underbrace{\overline{X_2}; X_2,}_{\square}$ $\square$ – вывод $\square$ из $\breve{M}_+$.

$M_- = \{\overline{X_3}\}$ – не содержит X_3 (в данном случае $M_+ \cap M_- = \emptyset$), $\breve{M}_- = \emptyset$

(–) $\square$

Получаем из (+) вывод в $\mathbb{S}$:

(++) $\underbrace{\overline{X_1} \vee X_2 \vee X_3, X_1 \vee X_3}_{X_2 \vee X_3}, \underbrace{\overline{X_2} \vee X_3; X_2 \vee X_3}_{X_3}, X_3$

Из (–) получаем вывод в $\mathbb{S}$: (– –) $\overline{X}_3$. Добавляя к (++) (– –), получаем $\square$.

<u>Доказательство невыполнимости (демонстрация)</u> для $\breve{M}_+$ и $\breve{M}_-$. Если бы $\breve{M}_+$ было бы выполнимо, то существовала бы интерпретация $\mu: \{x_1, x_2\} \to \mathbb{B}$, т.ч.
$\mu(\overline{X}_1 \vee X_2) = \mu(X_1) = \mu(\overline{X}_2) = 1 \Rightarrow \mu * \left(\overline{X}_1 \vee X_2 \vee X_3\right) = \mu\left(\overline{X}_1 \vee X_2 \vee 0\right) = 1$,
$\mu * (X_1 \vee X_3) = \mu(X_1 \vee 0) = 1 \Rightarrow \mu * (X_2 \vee X_3) = 1 \Rightarrow M_+$ было бы выполнимо при $\mu *$.
$\mu * (\overline{X}_3) = \mu * (1) = 1 \Rightarrow \overline{M}_+$ было бы выполнимо при $\mu * \Rightarrow S$ было бы выполнимо при $\mu *$.
$\breve{M}_-$ невыполнимо, поскольку оно пустое.

Схема применения метода резолюций для доказательства логического следования.

Дано: $F_1, F_2, \ldots, F_n, G$.

1. Формулы $F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G$ приводятся к КНФ.
2. Все получившиеся дизъюнкты собирают во множество S.
3. Строится вывод $\square$ из S.

Доказательство. $F_1, F_2, \ldots, F_n \models G \;\Leftrightarrow\; \models F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \to G \;\Leftrightarrow$
$\neg(F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \to G\,) - \textit{противорчие} \Leftrightarrow$
$F_1 \wedge F_2 \wedge \ldots \wedge F_n \wedge \neg G - \textit{противорчие},$
т.е. множество $F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G - \textit{невыполнимо} \Leftrightarrow \mathbb{S} - \textit{невыполнимо}$

Пример 4. Необходимо проверить логическое следование

$F_1, F_2, F_3 \models G,$ где
$F_1 = X \to Y \vee Z,\ F_2 = Z \to W,\ F_3 = \neg W,\ G = X \to Y$.

1. $F_1 \equiv \neg X \vee Y \vee Z$ (Один дизъюнкт)

$F_2 \equiv \neg Z \vee W$ (Один дизъюнкт)

$F_3 = \neg W$ (Один дизъюнкт)

$\neg G \equiv \neg(\neg X \vee Y) \equiv X \,\&\, \neg Y$. (Два дизъюнкта)

2. $S \equiv \{\neg X \vee Y \vee Z,\ \neg Z \vee W,\ \neg W,\ X,\ \neg Y\}$

3. $\neg X \vee Y \vee Z,\ \neg Z \vee W,\ \neg W, X, \neg Y; \neg X \vee Y \vee W, \neg X \vee Y,\ Y, \square$

$$\neg X \vee Y \vee Z,\ \neg Z \vee W,\ \neg W,\ X,\ \neg Y;\ \neg X \vee Y \vee W,\ \neg X \vee Y,\ Y,\ \square.$$

$$\neg X \vee Y \vee W \qquad \neg X \vee Y$$

$$Y$$

$$\square$$

<u>Пример 5</u>.

Необходимо проверить логическое следование

$F_1, F_2, F_3, F_4 \models G,$ где

$F_1 = D \leftrightarrow X,\ F_2 = X \to (Y \vee \overline{D}) \wedge (\overline{Y} \vee D),\ F_3 = \overline{Y} \to X \wedge Z,\ F_4 = Z \to Y \vee \overline{D},$

$G = Y.$

$$F_1 = (X \vee \overline{D}) \wedge (\overline{X} \vee D),$$

$$F_2 = \overline{X} \vee [(Y \vee \overline{D}) \wedge (\overline{Y} \vee D)] \equiv (\overline{X} \vee Y \vee \overline{D}) \wedge (\overline{X} \vee \overline{Y} \vee D),$$

$$F_3 = \overline{Y} \to X \wedge Z = Y \vee X \wedge Z \equiv (Y \vee X) \wedge (Y \vee Z),$$

$$F_4 = Z \to Y \vee \overline{D} \equiv \overline{Z} \vee Y \vee \overline{D} \qquad \overline{G} = \overline{Y}$$

$X \vee \overline{D}$ (1); $\overline{X} \vee D$ (2); $\overline{X} \vee Y \vee \overline{D}$ (3);

$\overline{X} \vee \overline{Y} \vee D$ (4); $Y \vee X$ (5); $Y \vee Z$ (6);

$\overline{Z} \vee Y \vee \overline{D}$ (7); $\overline{Y}$ (8).

Z (6) u (8) (9)

$Y \vee \overline{D}$ (7) u (9) (10)

$\overline{X} \vee Y$ (2) u (10) (11)

Y (5) u (11) (12)

$\square$ (8) u (12)

Пример 7. Решить текстовую задачу

Теперь у нас снова есть варенье, - обратился Король к Королеве, - и ты сможешь, наконец, испечь кренделей.
- Как я могу печь крендели, когда у меня нет муки? - спросила Королева.
- Уж не хочешь ли ты сказать, что муку тоже украли?! - вскричал Король.
- Вот именно! - сказала Королева. - Найди того, кто это сделал, и отруби ему голову!
- Ну-ну! - пробормотал Король. - К чему такая спешка?

Стали искать муку, и после некоторых поисков обнаружили ее в домике, где жили Мартовский Заяц, Болванщик и Соня. Разумеется, все трое были арестованы и предстали перед судом.

На суде Мартовский Заяц заявил, что муку украл Болванщик. В свою очередь Болванщик и Соня дали показания, которые по каким-то причинам не были записаны, поэтому сообщить вам, о чем они говорили, я просто не в силах. В ходе судебного заседания выяснилось, что муку украл лишь один из трех подсудимых и что только он дал правдивые показания. **Кто украл муку?**

Решение.

h – Мартовский заяц украл муку

b – Болванщик украл

s – Соня украла

$(h \vee b \vee s) \wedge (\overline{h} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{s} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{h} \vee \overline{s})$ – украл только один

b – показания Мартовского зайца

$F_1 = h \Leftrightarrow b = \left(h \vee \overline{b}\right) \wedge \left(\overline{h} \vee b\right)$ – «Кто украл, тот говорит правду» для Мартовского зайца. А для Сони и Болванщика это нельзя записать, так как их показания неизвестны.

$$F_2 = \left(h \vee b \vee s\right) \wedge \overline{h \wedge b} \wedge \overline{h \wedge s} \wedge \overline{s \wedge b} \equiv$$
$$\equiv \left(h \vee b \vee s\right) \wedge \left(\overline{h} \vee \overline{b}\right) \wedge \left(\overline{h} \vee \overline{s}\right) \wedge \left(\overline{s} \vee \overline{b}\right)$$
– украл только один.

$$\mathbb{S}=\left\{\underbrace{h\vee b\vee s}_{(1)},\underset{(2)}{\bar{h}\vee\bar{b}},\underset{(3)}{\bar{h}\vee\bar{s}},\underset{(4)}{\bar{s}\vee\bar{b}},\underset{(5)}{h\vee\bar{b}},\underset{(6)}{\bar{h}\vee b}\right\}$$

(2) и (5): $\bar{b}$ (7)

(1) и (6): $b\vee s$ (8)

(7) и (8): s (9) – украла Соня

(3) и (9): $\bar{h}$ (10) – Мартовский заяц не крал

(4) и (9): $\bar{b}$ (11) – Болванщик не крал

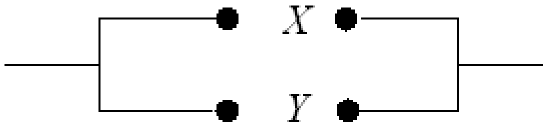
<u>Ответ: украла Соня.</u>

§6. Контактные схемы.

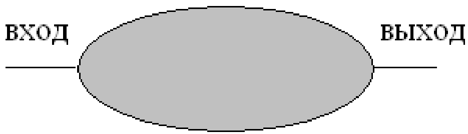
<u>Опр</u>. **Контактом** называется устройство, которое может находиться в одном из двух состояний: замкнут или разомкнут.

<u>Опр</u>. **Последовательным соединением** двух контактов называется соединение вида:

<u>Опр</u>. **Параллельным соединением** двух контактов называется соединение вида:



Опр. **Контактной схемой** называется набор контактов, соединенных между собой, в котором выделены вход и выход:



Пусть состояние «контакт X замкнут» соответствует значению 1, «контакт X разомкнут» соответствует значению 0, т.е. значению истинности атомарной формулы X.

Тогда *последовательное соединение* соответствует $(X \& Y)$, *параллельное соединение* соответствует $(X \vee Y)$.

Вся контактная схема соответствует формуле логики высказываний.

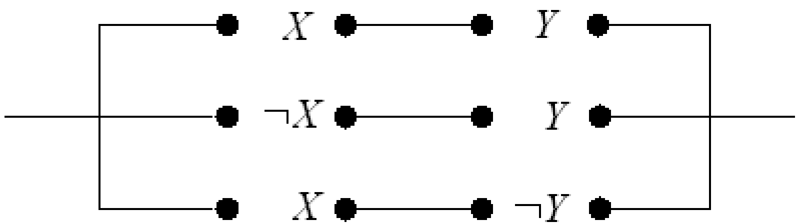
Замечание 1: любая формула соответствует контактной схеме, при условии, что отрицание атомарной формулы – это тоже контакт.

Замечание 2: минимальной контактной схеме соответствует формула с наименьшим числом литералов.

<u>Опр.</u> Две контактные схемы называются **эквивалентными**, если они соответствуют равносильным формулам.

Типовая задача 1: для данной контактной схемы найти эквивалентную схему, содержащую меньше контактов.

<u>*Пример 2.*</u>

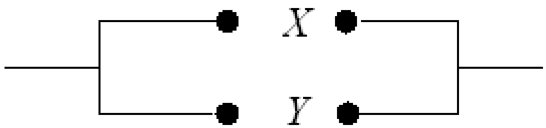


Схеме соответствует формула
$F = (X \,\&\, Y) \vee (\neg X \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, \neg Y)$.

$F = (X \,\&\, Y) \vee (\neg X \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, \neg Y) \equiv ((X \vee \neg X) \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, \neg Y) \equiv$

$\equiv (1 \,\&\, Y) \vee (X \,\&\, \neg Y) \equiv Y \vee (X \,\&\, \neg Y) \equiv$

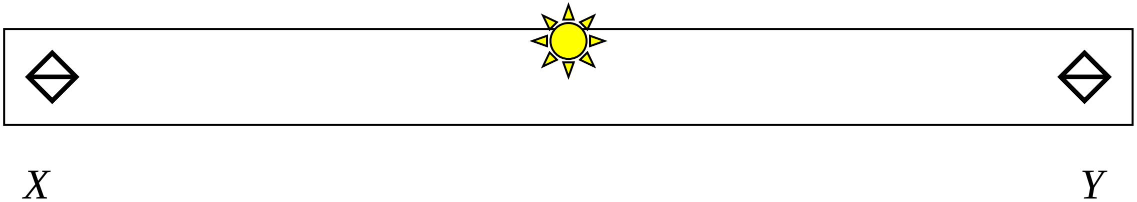
$\equiv (Y \vee X) \,\&\, (Y \vee \neg Y) \equiv Y \vee X$.



Типовая задача 2: составить наименьшую контактную схему, управляющую электрическим освещением или замком.

Пример 3.

В длинном коридоре имеются два выключателя для освещения. Составить контактную схему, которая позволяет включать или выключать свет с любого выключателя.



Пусть X и Y – атомарные переменные, соответствующие выключателю 1 и 2.

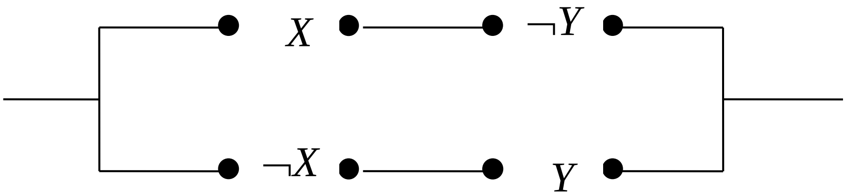
Тогда искомая контактная схема соответствует формуле F, зависящей от X и Y.

Составим таблицу истинности для F.

X	Y	F
0	0	1
0	1	0
1	1	1
1	0	0

Тогда $F = (X \ \&\ \ Y) \vee (\neg X \ \&\ \neg Y)$.

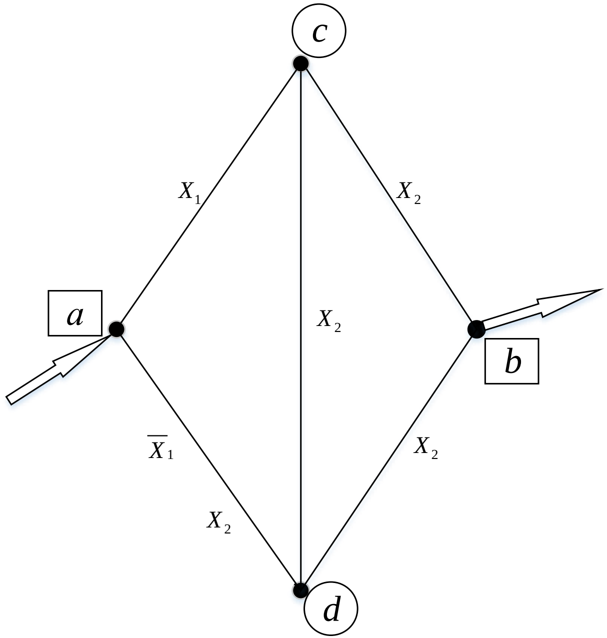
Получилась та же формула, что и в задаче про город правдивцев и лжецов.
Заметим, что можно было получить другую схему (формулу), если взять $F(0,0)=0$.



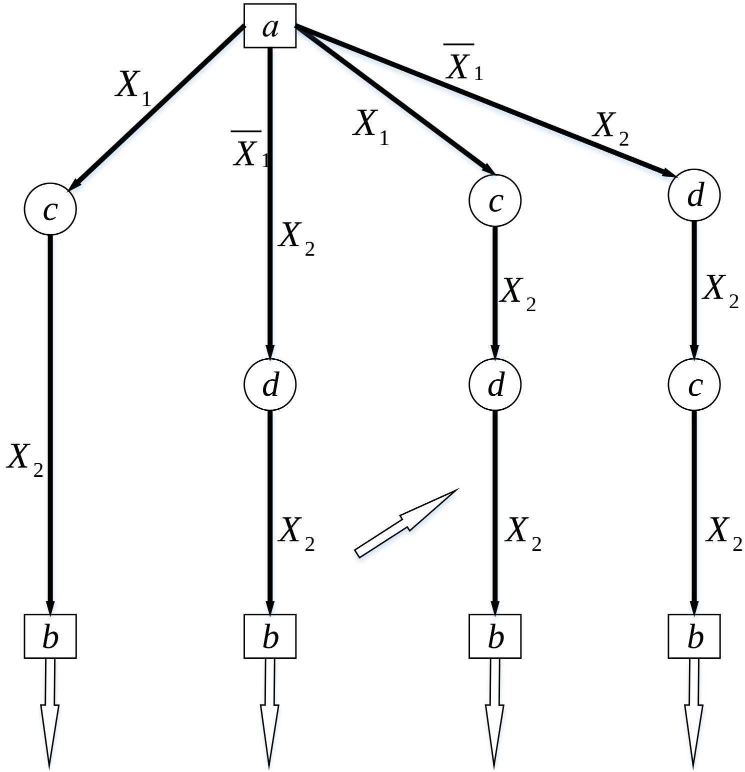
Это схема с меньшим числом контактов.

Иногда в электротехнике используют так называемые «мостовые схемы», не являющиеся параллельно-последовательными. Дли них тоже можно решать типовую задачу 1.

Пример 4.
По данной мостовой схеме построить схему с меньшим числом контактов.



Рисуем дерево путей из узла ***a*** в узел ***b*** и по нему записываем формулу.


a
X_1
$\overline{X}_1$
X_1
$\overline{X}_1$
X_2
c
c
d
X_2
X_2
X_2
d
d
c
X_2
X_2
X_2
X_2
b
b
b
b

$$f\left(x_1, x_2\right) = x_1x_2x_2 \vee x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_2x_2 \vee \overline{x}_1x_2x_2x_2 \equiv x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1x_2 \equiv$$

$$\equiv x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_2 \equiv x_2$$

Получаем схему с наименьшим числом контактов.