Математическая логика (спецкурс для математиков)

Глава I. Логика высказываний.

Глава II. Логика предикатов.

Литература

1. Замятин А.П. Математическая логика.
2. Мендельсон Эллиот. Введение в математическую логику.
3. Важенин Ю.М. Множества, логика, алгоритмы.
4. Мощенский В.А. Избранные главы математики в утверждениях и упражнениях.
5. В.Б. Репницкий, А.Я. Овсянников. Основы математической логики.

Глава I. Логика высказываний

§1. Высказывания и операции с ними. Формулы логики высказываний

Опр. **Высказывание** – повествовательное предложение, о котором можно сказать: истинно оно или ложно.

Опр. **Значение истинности высказывания** – истина или ложь.

и	л
1	0

Высказывания делятся на **простые** и **составные**.

Опр. **Составное высказывание** получено из простых при помощи операций (**связок**).

Операции:

конъюнкция	$X \,\&\, Y \; (X \wedge Y)$
дизъюнкция	$X \vee Y$
отрицание	$\neg X \; \left(\overline{X}\right)$
импликация	$X \rightarrow Y$
эквиваленция	$X \leftrightarrow Y$

Опр. **Конъюнкция** высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «и», т.е. «…X... и …Y…».
$X \,\&\, Y$

Опр. **Дизъюнкция** высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «или», т.е. «…X... или …Y…».
$X \vee Y$

Опр. **Отрицание** высказывания X – высказывание, полученное при помощи приставки «не», т.е. «не …X...».
$\neg X$

Опр. **Импликация** высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи конструкции «Если …X..., то …Y…».

$X \to Y$

Опр. **Эквиваленция** высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи конструкции «…X..., если и только если …Y…».

$X \leftrightarrow Y$

Таблицы истинности операций

X	$\neg X$
0	1
1	0

X	Y	$X \& Y$	$X \vee Y$	$X \rightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Правило:
1) из ложной посылки можно вывести что угодно;
2) импликация ложна, только если из истинной посылки получается ложное заключение.

Пример 1. Высказывание «если дважды два пять, то вы будете летать» истинно, поскольку посылка импликации истинна.

Операцию **или** не путать с операцией **«исключающего или»**
Замечание: операция **«исключающее или»:**

X	Y	X xor Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Она совпадает с конструкцией $(X \mathbin{\&} \neg Y) \vee (\neg X \mathbin{\&} Y)$.

Пример. Экзамен я либо сдам, либо не сдам (исключающее или).
Этот студент из Мт-201 или Мт-202 (исключающее или).
На десерт принесут торты или конфеты (обычное или).

Опр. **Атомарная формула логики высказываний** – заглавная буква латинского алфавита, с индексом или без, а также символ 0 или 1.

Пример 2. X, Y, 0,1 – атомарные ФЛВ.

Опр. **Формула логики высказываний (ФЛВ)** – выражение одного из двух видов:

1) атомарная формула;
2) $(F \,\&\, G)$, $(F \vee G)$, $(\neg F)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$,
где F и G – формулы логики высказываний.

На первый взгляд, может показаться, что определение содержит «порочный круг»; понятие ФЛВ определяется само через себя. На самом деле – это индуктивное определение по **длине** формулы. Формула логики высказываний 1)-го вида имеют длину 1, а 2)-го вида – сумму длин формул F и G плюс 1, если это формула $(F \,\&\, G)$, $(F \vee G)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$ и длину формулы F плюс 1, если это формула $(\neg F)$.

Замечание. Если строго следовать определению, то в формуле надо писать много скобок.
Например, в формуле $(((\neg X) \,\&\, Y) \to Z)$.

Для уменьшения количества скобок, условимся, во первых, атомарные формулы в скобки не заключать, а во-вторых, договоримся приоритетах операций:

$\neg$	наивысший
&	
$\vee$	
$\rightarrow$	
$\leftrightarrow$	низший

Пример 3:

Формула $\neg X \,\&\, Y \rightarrow Z$ *означает* $(((\neg X) \,\&\, Y) \rightarrow Z)$.

Заметим, что длина и той и другой формулы одинакова и равна 6.

§2. Интерпретация, равносильность. Законы логики высказываний

Опр. **Интерпретация формулы** F **в широком смысле** – это отображение $\varphi : \Omega_F \to W$

из множества Ω_F всех атомарных формул (т.е. переменных), входящих в F, во множество W всех высказываний.
(0 – ложное высказывание, 1 – истинное высказывание).

При этом $\varphi(F)$ является составным высказыванием, соответствующим формуле F при этой интерпретации.

<u>Пример 4</u>. «Если капиталовложения останутся постоянными, то возрастут правительственные расходы или увеличится безработица. Если правительственные расходы не возрастут, то налоги будут снижены. Если налоги будут снижены и капиталовложения останутся постоянными, то безработица не увеличится. Безработица не возрастёт. Следовательно, правительственные расходы не возрастут.” – это составное высказывание $\varphi(F)$*, где*

$\varphi(X) =$ "*капиталовложения останутся постоянными*";

$\varphi(Y) =$ "*возрастут правительственные расходы*";

$\varphi(Z) =$ "*увеличится безработица*";

$\varphi(U) =$ "*налоги будут снижены*";

$\Omega_F = \{X, Y, Z, U\}$ – простые высказывания.

$$F = (X \to Y \vee Z) \wedge (\neg Y \to U) \wedge (U \wedge X \to \neg Z) \wedge \neg Z \to \neg Y.$$

Опр. **Интерпретация формулы F в узком смысле** – это отображение $\varphi:\ (\Omega_F \setminus \{0,1\}) \ \to \{0,1\}$

из множества $\varphi:\ (\Omega_F \setminus \{0,1\}) \ \to \{0,1\}$ всех атомарных формул (т.е. переменных), входящих в F, кроме 0 и 1, в множество значений истинности.

При этом $\varphi(F)$ является значением истинности формулы F при этой интерпретации.

Пример 5.

$\Omega_F = \{X, Y, Z, U\}, \quad \varphi(X), \varphi(Y), \varphi(Z), \varphi(U) \in \{0,1\}.$

$\varphi(F) = (X \to Y \vee Z) \wedge (\neg Y \to U) \wedge (U \wedge X \to \neg Z) \wedge \neg Z \to \neg Y.$

<u>Опр.</u> Формулы F и G называются **равносильными**, если для любой интерпретации φ (в узком смысле) значения истинности $\varphi(F)$ и $\varphi(G)$ совпадают.
<u>Обозн.</u> $F \equiv G$ или $F = G$ (или $F \mid\!=\!\mid G$)

<u>Опр.</u> Формула F называется **тождественно истинной (тавтологией)**, если для любой интерпретации φ (в узком смысле) значение истинности $\varphi(F)$ равно 1 (т.е. $F \equiv 1$).

<u>Теорема.</u> $F \equiv G \iff F \leftrightarrow G \equiv 1$.
Док-во следует из опр. эквиваленции и опр.равносильности формул.

Законы логики высказываний:

1) $F \,\&\, 1 \equiv F$ 2) $F \vee 1 \equiv 1$

3) $F \,\&\, 0 \equiv 0$ 4) $F \vee 0 \equiv F$

5) $F \,\&\, F \equiv F$ 6) $F \vee F \equiv F$ Идемпотентность

7) $F \,\&\, G \equiv G \,\&\, F$ 8) $F \vee G \equiv G \vee F$ Коммутативность

9) $(F \,\&\, G) \,\&\, H \equiv F \,\&\, (G \,\&\, H)$

10) $(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$

Ассоциативность

11) $F \,\&\, (G \vee H) \equiv (F \,\&\, G) \vee (F \,\&\, H)$

Дистрибутивность

12) $F \vee (G \,\&\, H) \equiv (F \vee G) \,\&\, (F \vee H)$

13) $F \,\&\, (F \vee H) \equiv F$

Законы поглощения

14) $F \vee (F \,\&\, H) \equiv F$

15) $F \,\&\, \neg F \equiv 0$ Закон противоречия

16) $F \vee \neg F \equiv 1$ Закон исключенного третьего

17) $\neg(F \,\&\, G) \equiv \neg F \vee \neg G$

Законы де Моргана

18) $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \,\&\, \neg G$

19) $\neg\neg F \equiv F$ Закон двойного отрицания

20) $F \to G \equiv \neg F \vee G$ Выражение импликации

21) $F \leftrightarrow G \equiv (F \to G)\ \&\ (G \to F)$ Выражение эквиваленции

Пример 6 *доказательства равносильности формул:*

F	G	$F \to G$	$\neg F \vee G$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Пример 7. 1) $F \leftrightarrow G \equiv (F \wedge G) \vee (\overline{F} \wedge \overline{G})$.

2) $F \leftrightarrow G \equiv (F \vee \overline{G}) \wedge (\overline{F} \vee G)$.

Решение. 1) легко проверить при помощи таблицы истинности.
2) получается из 1) при помощи последовательного применения законов 15, 16 и 1.