Линейные отображения

Матрица линейного отображения

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2023/2024 учебный год

Теорема существования и единственности линейного отображения

Пусть V *и* W *– векторные пространства над полем* F*, причем* $\dim V = n > 0$. *Пусть* $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ *– базис пространства* V*, а* $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n$ *– произвольные вектора из* W*. Тогда существует единственное линейное отображение* $\mathcal{A}\colon V \to W$ *такой, что* $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{w}_i$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots, n$.

Смысл теоремы: линейное отображение из n-мерного пространства V в какое-то пространство W однозначно определяется тем, как оно действует на базисных векторах $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ пространства V.
Если и пространство W конечномерно, то для того, чтобы иметь полную информацию о линейном отображении, достаточно знать координаты образов векторов $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ в каком-нибудь базисе пространства W.
Собирая эти координаты в прямоугольную таблицу, приходим к понятию *матрицы линейного отображения*.

Пусть F – поле, а k и n – натуральные числа. *Матрица размера* $k \times n$ над F – это прямоугольная таблица с k строками и n столбцами, заполненная элементами из F:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} := (a_{ij})_{k\times n}.$$

Такие матрицы складывают и умножают на элементы из F покомпонентно:

$$(a_{ij})_{k\times n} + (b_{ij})_{k\times n} := (a_{ij} + b_{ij})_{k\times n}, \quad t(a_{ij})_{k\times n} := (ta_{ij})_{k\times n}.$$

Множество $F^{k\times n}$ всех матриц размера $k \times n$ над F является векторным пространством относительно операций сложения матриц и умножения матриц на скаляры из F. Нулевым вектором этого пространства является нулевая матрица размера $k \times n$.

Базис пространства $F^{k\times n}$ образуют всевозможные матричные единицы E_{ij}, где $1 \leqslant i \leqslant k$ и $1 \leqslant j \leqslant n$. Размерность пространства $F^{k\times n}$ равна kn.

Определение

Пусть V и W – векторные пространства над полем F, причем $\dim V = n > 0$, $\dim W = k > 0$. Пусть $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ – базис пространства V, а $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ – базис пространства W. *Матрицей линейного отображения* $\mathcal{A}\colon V \to W$ *в базисах* P и Q называется $k \times n$-матрица, i-й столбец которой состоит из координат вектора $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ в базисе Q, $i = 1, 2, \dots, n$. Эта матрица обозначается $A_{P,Q}$ или просто A, если базисы зафиксированы.

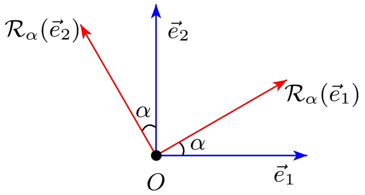
Итак, если

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}(\mathbf{p}_1) &=& a_{11}\mathbf{q}_1 + a_{21}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{k1}\mathbf{q}_k, \\ \mathcal{A}(\mathbf{p}_2) &=& a_{12}\mathbf{q}_1 + a_{22}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{k2}\mathbf{q}_k, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \mathcal{A}(\mathbf{p}_n) &=& a_{1n}\mathbf{q}_1 + a_{2n}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{kn}\mathbf{q}_k, \end{array}$$

то $A_{P,Q} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{k \times n}$.

Если $W = V$ и $Q = P$, то говорят о *матрице отображения в базисе* P.

Вычислим матрицу отображения $\mathcal{R}_\alpha$ – поворота плоскости вокруг начала координат на угол α в ортонормированном базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ этой плоскости.



Поворот на угол α

Вектор $\mathcal{R}_\alpha(\vec{e}_1)$ имеет в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ координаты $(\cos\alpha, \sin\alpha)$, а вектор $\mathcal{R}_\alpha(\vec{e}_2)$ – координаты $\left(\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha), \sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)\right) = (-\sin\alpha, \cos\alpha)$. Следовательно, матрица отображения $\mathcal{R}_\alpha$ имеет вид

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Пример: матрица дифференцирования

Вычислим матрицу дифференцирования $\mathcal{D}$ пространстве $\mathbb{R}_3[x]$ всех многочленов степени $\leqslant 3$ над $\mathbb{R}$ в стандартном базисе 1, x, x^2, x^3 этого пространства.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}(1) &= \ 0 \ = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3\\
\mathcal{D}(x) &= \ 1 \ = 1\cdot 1 + 0\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3\\
\mathcal{D}(x^2) &= 2x \ = 0\cdot 1 + 2\cdot x + 0\cdot x^2 + 0\cdot x^3\\
\mathcal{D}(x^3) &= 3x^2 = 0\cdot 1 + 0\cdot x + 3\cdot x^2 + 0\cdot x^3
\end{aligned}
$$

Видим, что матрица отображения $\mathcal{D}$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Упражнение: Если рассматривать поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ как векторное пространство над $\mathbb{R}$, то умножение на данное комплексное число z будет линейным отображением на этом пространстве. Найти матрицу этого отображения в стандартном базисе $1, i$ пространства $\mathbb{C}$.
Указание: запишите число z в тригонометрической форме.

Нахождение образа вектора с помощью матрицы отображения

Если V – векторное пространство, $\dim V = n$, P – базис в V, а $\mathbf{x} \in V$, будем обозначать через $[\mathbf{x}]_P$ столбец высоты n, в котором записаны координаты вектора $\mathbf{x}$ в базисе P.
Пусть $\mathcal{A}\colon V \to W$ – линейное отображение и $A_{P,Q} = (a_{ij})$ – его матрица в базисах $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n\}$ и $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_k\}$. Пусть вектор $\mathbf{x} \in V$ имеет координаты $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в базисе P. Как найти координаты вектора $\mathbf{y} := \mathcal{A}(\mathbf{x})$ в базисе Q? Обозначим эти координаты через $(y_1, y_2, \ldots, y_k)$. Тогда

$$\begin{aligned} y_1\mathbf{q}_1 + y_2\mathbf{q}_2 + \cdots + y_k\mathbf{q}_k = \mathbf{y} = \mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + \cdots + x_n\mathbf{p}_n) = \\ = x_1\mathcal{A}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{p}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{p}_n). \end{aligned}$$

Поскольку столбцы матрицы $A_{P,Q}$ – это координаты векторов $\mathcal{A}(\mathbf{p}_1)$, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_2)$, …, $\mathcal{A}(\mathbf{p}_n)$ в базисе Q, выполнены равенства

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{A}(\mathbf{p}_1) & = & a_{11}\mathbf{q}_1 + a_{21}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{k1}\mathbf{q}_k, \\ \mathcal{A}(\mathbf{p}_2) & = & a_{12}\mathbf{q}_1 + a_{22}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{k2}\mathbf{q}_k, \\ \multicolumn{3}{c}{\dotfill} \\ \mathcal{A}(\mathbf{p}_n) & = & a_{1n}\mathbf{q}_1 + a_{2n}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{kn}\mathbf{q}_k. \end{array}$$

Нахождение образа вектора с помощью матрицы отображения (2)

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
y_1\mathbf{q}_1 + y_2\mathbf{q}_2 + \cdots + y_k\mathbf{q}_k &= x_1\mathcal{A}(\mathbf{p}_1) + x_2\mathcal{A}(\mathbf{p}_2) + \cdots + x_n\mathcal{A}(\mathbf{p}_n) = \\
&= \ x_1(a_{11}\mathbf{q}_1 + a_{21}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{k1}\mathbf{q}_k) \ + \\
&+ \ x_2(a_{12}\mathbf{q}_1 + a_{22}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{k2}\mathbf{q}_k) \ + \\
&\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \ x_n(a_{1n}\mathbf{q}_1 + a_{2n}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{kn}\mathbf{q}_k) \ = \\
&= \ (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n)\mathbf{q}_1 \ + \\
&+ \ (a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n)\mathbf{q}_2 \ + \\
&\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \ (a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n)\mathbf{q}_k \ .
\end{aligned}
$$

В силу единственности разложения вектора по базису это означает, что

$$
\begin{cases}
y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\
y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \cdots + a_{kn}x_n.
\end{cases}
$$

Эту систему равенств можно переписать в виде

$$
\big[\mathcal{A}(\mathbf{x})\big]_Q = A_{P,Q} \cdot [\mathbf{x}]_P .
$$

Выводы

$$\big[\mathcal{A}(\mathbf{x})\big]_Q = A_{P,Q} \cdot [\mathbf{x}]_P.$$

Если мы знаем матрицу отображения, мы знаем и то, как действует отображение!

Линейные отображения конечномерных пространств можно (и нужно!) изучать с помощью матриц.

На матрицы можно смотреть как на «координаты» линейных отображений.

Оставшаяся часть лекции посвящена уточнению этой идеи.

Определение

Пусть V и W – векторные пространства над полем F, а $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – линейные отображения из V в W. *Суммой* отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется отображение $\mathcal{S}\colon V \to W$, задаваемое правилом $\mathcal{S}(\mathbf{x}) := \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in V$. Сумма отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ обозначается через $\mathcal{A} + \mathcal{B}$.

Множество всех линейных отображений из V в W обозначается $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Предложение о свойствах суммы отображений

Сумма линейных отображений является линейным отображением. Множество $\mathrm{Hom}(V, W)$ с операцией сложения отображений является абелевой группой.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$ и $\mathcal{S} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $t \in F$ имеем

$$\mathcal{S}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{y}) =$$
$$= \big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})\big) + \big(\mathcal{A}(\mathbf{y}) + \mathcal{B}(\mathbf{y})\big) = \mathcal{S}(\mathbf{x}) + \mathcal{S}(\mathbf{y}) \quad \text{и}$$
$$\mathcal{S}(t\mathbf{x}) = \mathcal{A}(t\mathbf{x}) + \mathcal{B}(t\mathbf{x}) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) + t\mathcal{B}(\mathbf{x}) = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{B}(\mathbf{x})\big) = t\mathcal{S}(\mathbf{x}).$$

Следовательно, отображение $\mathcal{S}$ линейно.

Далее, если $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C} \in \mathrm{Hom}(V, W)$, то

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x}) &= \mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x}) = \mathcal{B}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{x}) = (\mathcal{B}+\mathcal{A})(\mathbf{x}) \quad \text{и} \\ \big((\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}\big)(\mathbf{x}) &= (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})+\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \big(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x})\big)+\mathcal{C}(\mathbf{x}) = \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{x})+\big(\mathcal{B}(\mathbf{x})+\mathcal{C}(\mathbf{x})\big) = \mathcal{A}(\mathbf{x})+(\mathcal{B}+\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \\ &= \big(\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})\big)(\mathbf{x}),\end{aligned}$$

откуда $\mathcal{A}+\mathcal{B}=\mathcal{B}+\mathcal{A}$ и $(\mathcal{A}+\mathcal{B})+\mathcal{C}=\mathcal{A}+(\mathcal{B}+\mathcal{C})$. Нейтральным элементом по сложению является нулевое отображение $\mathcal{O}$, поскольку

$$(\mathcal{A}+\mathcal{O})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{O}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathbf{0} = \mathcal{A}(\mathbf{x}).$$

Обратным по сложению элементом к отображению $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(V, W)$ является отображение $-\mathcal{A}$, определяемое правилом $(-\mathcal{A})(\mathbf{x}) := -\mathcal{A}(\mathbf{x})$, поскольку

$$\begin{aligned}\big(\mathcal{A}+(-\mathcal{A})\big)(\mathbf{x}) &= \mathcal{A}(\mathbf{x})+(-\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{x})+\big(-\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = \\ &= \mathcal{A}(\mathbf{x})-\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} = \mathcal{O}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Предложение доказано. $\square$

Определение

Пусть V и W – векторные пространства над полем F, $\mathcal{A}\colon V \to W$ – линейное отображение, а $t \in F$. *Произведением отображения $\mathcal{A}$ на скаляр t* называется отображение $\mathcal{B}\colon V \to W$, задаваемое правилом $\mathcal{B}(\mathbf{x}) := t\mathcal{A}(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in V$. Произведение отображения $\mathcal{A}$ на скаляр t обозначается через $t\mathcal{A}$.

Предложение о пространстве линейных отображений

Произведение линейного отображения на скаляр является линейным отображением. Множество $\mathrm{Hom}(V, W)$ с операциями сложения отображений и умножения отображения на скаляр является векторным пространством.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ и $t, s \in F$. Тогда:

$$(t\mathcal{A})(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y})\big) = t(\mathcal{A}(\mathbf{x}) + \mathcal{A}(\mathbf{y})\big) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) + t\mathcal{A}(\mathbf{y}) =$$
$$= (t\mathcal{A})(\mathbf{x}) + (t\mathcal{A})(\mathbf{y}) \text{ и}$$
$$(t\mathcal{A})(s\mathbf{x}) = t\big(\mathcal{A}(s\mathbf{x})\big) = t\big(s\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = (ts)\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = s\big(t\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = s\big((t\mathcal{A})(\mathbf{x})\big).$$

Следовательно, $t\mathcal{A}$ – линейное отображение.

Умножение линейного отображения на скаляр (2)

Далее,

$$\big(t(\mathcal{A}+\mathcal{B})\big)(\mathbf{x}) = t\big((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})\big) = t\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x})\big) = \\ = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) + t\mathcal{B}(\mathbf{x}) = (t\mathcal{A})(\mathbf{x}) + (t\mathcal{B})(\mathbf{x}),$$

т. е. $t(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = t\mathcal{A}+t\mathcal{B}$;

$$\big((t+s)\mathcal{A}\big)(\mathbf{x}) = (t+s)\mathcal{A}(\mathbf{x}) = t\mathcal{A}(\mathbf{x}) + s\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \\ = (t\mathcal{A})(\mathbf{x}) + (s\mathcal{A})(\mathbf{x}) = (t\mathcal{A}+s\mathcal{A})(\mathbf{x}),$$

т. е. $t\mathcal{A}+s\mathcal{A} = (t+s)\mathcal{A}$;

$$\big(t(s\mathcal{A})\big)(\mathbf{x}) = t\big((s\mathcal{A})(\mathbf{x})\big) = (ts)\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = \big((ts)\mathcal{A}\big)(\mathbf{x}),$$

т. е. $t(s\mathcal{A}) = (ts)\mathcal{A}$; наконец,

$$(1\cdot\mathcal{A})(\mathbf{x}) = 1\cdot\big(\mathcal{A}(\mathbf{x})\big) = \mathcal{A}(\mathbf{x}),$$

т. е. $1\cdot\mathcal{A} = \mathcal{A}$. С учетом свойств суммы отображений, мы получаем, что в $\mathrm{Hom}(V,W)$ выполнены все аксиомы векторного пространства. $\square$

Теорема о пространствах линейных отображений и матриц

Если V и W – векторные пространства над полем F, $\dim V = n$ и $\dim W = k$, то векторные пространства $Hom(V, W)$ и $F^{k\times n}$ изоморфны.

Доказательство. Зафиксируем в V базис $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$, а в W – базис $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$. Определим отображение $\varphi\colon \mathrm{Hom}(V, W) \to F^{k\times n}$ правилом: если $\mathcal{A}\colon V \to W$ – линейное отображение, то $\varphi(\mathcal{A})$ – матрица отображения A в базисах P и Q. Пусть $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V)$ и $t \in F$. Надо проверить, что отображение φ биективно и выполнены равенства

$$\varphi(\mathcal{A} + \mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{A}) + \varphi(\mathcal{B}) \text{ и } \varphi(t\mathcal{A}) = t\varphi(\mathcal{A}) \qquad (*).$$

В матрице $\varphi(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ по столбцам записаны координаты векторов $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathbf{p}_i)$ в базисе Q, а в матрицах $\varphi(\mathcal{A})$ и $\varphi(\mathcal{B})$ – координаты векторов $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{p}_i)$ соответственно в том же базисе. Поскольку $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathbf{p}_i) = \mathcal{A}(\mathbf{p}_i) + \mathcal{B}(\mathbf{p}_i)$, координаты вектора $(\mathcal{A} + \mathcal{B})(\mathbf{p}_i)$ равны сумме координат векторов $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i)$ и $\mathcal{B}(\mathbf{p}_i)$. Первое из равенств $(*)$ доказано. Второе из них проверяется вполне аналогично.

Изоморфизм пространств линейных отображений и матриц (2)

Проверим, что отображение φ биективно. Если $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathrm{Hom}(V, W)$ и $\varphi(\mathcal{A}) = \varphi(\mathcal{B})$, то из определения матрицы линейного отображения вытекает, что отображения $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ одинаково действуют на базисных векторах пространства V. Но тогда $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, так как линейное отображение однозначно определяется своим действием на базисных векторах. Следовательно, отображение φ инъективно.

Осталось доказать, что φ сюръективно. Пусть $A = (a_{ij})$ – произвольная матрица размера $k \times n$. Для всякого $j = 1, 2, \ldots, n$ положим $\mathbf{w}_j = a_{1j}\mathbf{q}_1 + a_{2j}\mathbf{q}_2 + \cdots + a_{kj}\mathbf{q}_k$. В силу теоремы существования и единственности линейного отображения существует линейное отображение $\mathcal{A}$, такое, что $\mathcal{A}(\mathbf{p}_i) = \mathbf{w}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Из определения матрицы отображения вытекает, что $A_{P,Q} = A$, т.е. $\varphi(\mathcal{A}) = A$. Следовательно, отображение φ сюръективно. □

Как отмечалось, размерность пространства матриц размера $k \times n$ равна kn. Поэтому из доказанной теоремы вытекает

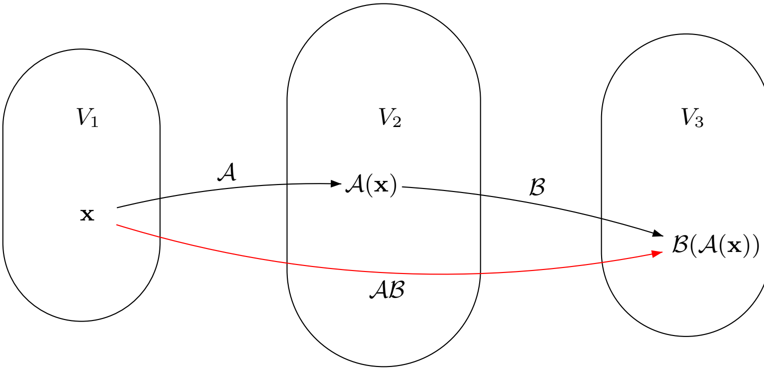
Следствие о размерности пространства линейных отображений

Если V и W – векторные пространства над полем F, $\dim V = n$ и $\dim W = k$, то $\dim \mathrm{Hom}(V, W) = kn$. □

Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства над одним и тем же полем F. Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные отображения, то определена их композиция $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$, действующая по правилу

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}) := \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})) \quad \text{для всех} \quad \mathbf{x} \in V_1.$$

Мы называем $\mathcal{AB}$ *произведением* отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.



Линейность произведения отображений

Предложение

Произведение линейных отображений – линейное отображение.

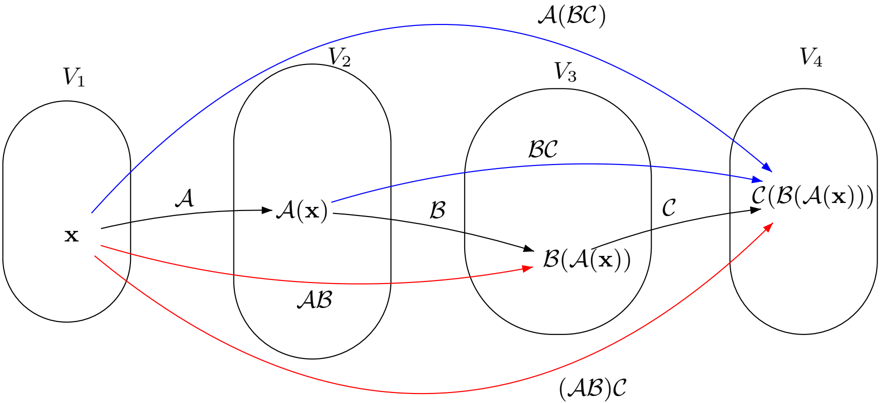
Доказательство. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ имеем

$$\mathcal{AB}(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{A}(\mathbf{y}))=\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{y}))=\mathcal{AB}(\mathbf{x})+\mathcal{AB}(\mathbf{y}).$$

Так же проверяется, что $\mathcal{AB}(t\mathbf{x}) = t\mathcal{AB}(\mathbf{x})$ для всех $\mathbf{x} \in V_1$ и $t \in F$. $\square$

Ассоциативность. Пусть V_1, V_2, V_3, V_4 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_3 \to V_4$ – линейные отображения. Тогда

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{A}(\mathcal{B}\mathcal{C}).$$



Ассоциативность – свойство композиции произвольных отображений.

Дистрибутивность справа. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные отображения. Тогда

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C} = \mathcal{AC} + \mathcal{BC}.$$

Дистрибутивность слева. Пусть V_1, V_2, V_3 – векторные пространства, $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$, $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ и $\mathcal{C}\colon V_2 \to V_3$ – линейные отображения. Тогда

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}+\mathcal{C}) = \mathcal{AB} + \mathcal{AC}.$$

Доказательство. Для любого $\mathbf{x} \in V_1$ имеем

$$((\mathcal{A}+\mathcal{B})\mathcal{C})(\mathbf{x}) = \mathcal{C}((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x})+\mathcal{B}(\mathbf{x})) = \mathcal{C}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))+\mathcal{C}(\mathcal{B}(\mathbf{x}))$$

$$= \mathcal{AC}(\mathbf{x}) + \mathcal{BC}(\mathbf{x}) = (\mathcal{AC}+\mathcal{BC})(\mathbf{x}).$$

Аналогично проверяется дистрибутивность справа. $\square$

Дистрибутивность уже использует специфику линейных отображений; скажем, при композиции произвольных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ ее нет. (*Докажите!*)

Следствие

Множество $\mathrm{Hom}(V,V)$ *всех линейных отображений пространства* V *является ассоциативным кольцом относительно операций сложения и умножения линейных отображений.*

Упражнения. 1. На пространстве $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов над полем $\mathbb{R}$ рассмотрим отображение дифференцирования: $\mathcal{D}(p) := p'$, где p' – производная многочлена p. Как действует квадрат отображения $\mathcal{D}$?

2. Пусть $\mathcal{R}_\alpha$ – поворот плоскости $\mathbb{R}^2$ вокруг начала координат на угол α. Как действует произведение $\mathcal{R}_\alpha \mathcal{R}_\beta$?

3. Приведите пример двух линейных отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ плоскости $\mathbb{R}^2$, таких, что $\mathcal{AB} \neq \mathcal{BA}$.

Пусть $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ и $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ – линейные отображения, а пространства V_1, V_2, V_3 конечномерны и имеют размерности n, k и m соответственно. Зафиксируем базисы $P = \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$ в V_1, $Q = \{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_k\}$ в V_2 и $R = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_m\}$ в V_3. Тогда можно построить матрицу $A = (a_{ij})_{k\times n}$ отображения $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ в базисах P и Q и матрицу $B = (b_{ij})_{m\times k}$ отображения $\mathcal{B}\colon V_2 \to V_3$ в базисах Q и R. Теперь подсчитаем матрицу $C = (c_{ij})_{m\times n}$ произведения $\mathcal{AB}\colon V_1 \to V_3$ в базисах P и R.

Из выражения для образа вектора через матрицу отображения имеем:

$$C[\mathbf{x}]_P = \bigl[\mathcal{AB}(\mathbf{x})\bigr]_R = \bigl[\mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathbf{x}))\bigr]_R = B\bigl[\mathcal{A}(\mathbf{x})\bigr]_Q = B(A[\mathbf{x}]_P).$$

Напомним, что произведение матрицы на столбец было определено выше:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n \end{bmatrix}.$$

Возьмем $\mathbf{x} = \mathbf{p}_1$ в равенстве $C[\mathbf{x}]_P = B(A[\mathbf{x}]_P)$. Тогда $[\mathbf{p}_1]_P = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$.

Поэтому $A[\mathbf{p}_1]_P$ – это первый столбец матрицы A, а $C[\mathbf{p}_1]_P$ – это первый столбец матрицы C. Итак, первый столбец матрицы C есть произведение матрицы B на первый столбец матрицы A.
Полагая в том же равенстве $\mathbf{x} = \mathbf{p}_2$ и т.д., получим, что каждый столбец матрицы C есть произведение B на столбец матрицы A с тем же номером. Другими словами, элемент матрицы C, стоящий на месте i, j есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы B на соответствующие элементы j-го столбца матрицы A (правило «строка на столбец»).

Видим, что матрица произведения линейных отображений получается по правилу «строка на столбец» из матриц сомножителей. Именно поэтому произведение матриц *определяют* правилом «строка на столбец»!

Итак, произведение матриц G и H определено тогда и только тогда, когда число столбцов G равно числу строк H. Если $G = (g_{ij})_{p\times\ell}$, а $H = (h_{ij})_{\ell\times q}$, то *произведением* матриц G и H называется матрица $GH = (f_{ij})_{p\times q}$, где f_{ij} есть сумма произведений элементов i-й строки матрицы G на соответствующие элементы j-го столбца матрицы H:

$$f_{ij} := g_{i1}h_{1j} + g_{i2}h_{2j} + \cdots + g_{i\ell}h_{\ell j} \ \text{ для всех } i = 1, 2, \ldots, p \text{ и } j = 1, 2, \ldots, q.$$

Возвращаясь к произведениям линейных отображений, заключаем, что при соответствии, которое сопоставляет линейному отображению его матрицу, выполнено равенство

$$[\mathcal{AB}]_{P,R} = [\mathcal{B}]_{Q,R}[\mathcal{A}]_{P,Q}.$$

⚠ Матрицы отображений перемножаются в порядке, обратном тому, в котором записаны отображения.

Свойства умножения матриц

Пусть A, B и C — матрицы. Тогда:

1) если произведения AB и BC определены, то $(AB)C = A(BC)$ (*ассоциативность*);
2) если A и B одного и того же размера и произведение AC определено, то $(A+B)C = AC + BC$ (*дистрибутивность справа*);
3) если B и C одного и того же размера и произведение AB определено, то $A(B+C) = AB + AC$ (*дистрибутивность слева*);
4) если произведение AB определено, то $(AB)^T = B^T A^T$.

Умножение матриц некоммутативно! Даже для квадратных матриц A и B одинакового размера, когда оба произведения AB и BA определены, как правило, $AB \neq BA$.

Упражнение: составьте две 2×2-матрицы из цифр даты своего рождения. Например, для даты 01.02.2003 эти матрицы будут $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Перемножьте эти матрицы в разном порядке и сравните результаты.

Свойства 1)–3) следуют из соответствующих свойств умножения линейных отображений. Можно проверить их и прямыми вычислениями.

Альтернативное доказательство ассоциативности. Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$, $B = (b_{ij})_{n\times r}$ и $C = (c_{ij})_{r\times s}$. Положим $AB = (d_{ij})_{m\times r}$ и $BC = (f_{ij})_{n\times s}$. Далее, положим $(AB)C = (g_{ij})_{m\times s}$ и $A(BC) = (h_{ij})_{m\times s}$. Требуется доказать, что $g_{ij} = h_{ij}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, s$. В самом деле:

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{r} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{r}\left[\left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}\right)\cdot c_{kj}\right] = \sum_{k=1}^{r}\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} =$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} a_{i\ell}b_{\ell k}c_{kj} = \sum_{\ell=1}^{n}\left[a_{i\ell}\cdot\left(\sum_{k=1}^{r} b_{\ell k}c_{kj}\right)\right] = \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}f_{\ell j} = h_{ij}. \qquad \square$$

Упражнение: докажите свойство 4): если произведение AB определено, то

$$(AB)^T = B^T A^T.$$

Определение

Квадратная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны 1, а все остальные элементы равны 0, называется *единичной матрицей*. Единичная матрица обозначается E (или E_n, если важен порядок).

Таким образом, единичная матрица выглядит следующим образом:
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$. Это не что иное как матрица единичного отображения $\mathcal{E}$.
Можно также записать $E_n = (\delta_{ij})_{n\times n}$, используя *символ Кронекера*

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Свойство единичной матрицы

Если произведение AE [соответственно EA] определено, то $AE = A$ [соответственно $EA = A$].

Напомним, что отображение $f\colon M_1 \to M_2$ *обратимо* тогда и только тогда, когда f – взаимно однозначное отображение M_1 на M_2.

Предложение

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, то обратное отображение $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ также является линейным.

Доказательство. Рассмотрим произвольные вектора $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \in V_2$ и пусть $\mathbf{x}_1 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1)$, $\mathbf{x}_2 := \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$. Тогда $\mathcal{A}(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = \mathcal{A}(\mathbf{x}_1)+\mathcal{A}(\mathbf{x}_2) = \mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2$, откуда $\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1+\mathbf{y}_2) = \mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2 = \mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_1)+\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y}_2)$.
Так же проверяется, что $\mathcal{A}^{-1}(t\mathbf{y}) = t\mathcal{A}^{-1}(\mathbf{y})$ для всех $\mathbf{y} \in V_2$ и $t \in F$. $\square$

Вспомним, что взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2 мы называли *изоморфизмом*. У изоморфных пространств одинаковы размерности, поэтому матрица обратимого линейного отображения будет *квадратной*.

Если $\mathcal{A}\colon V_1 \to V_2$ – взаимно однозначное линейное отображение векторного пространства V_1 на векторное пространство V_2, а $\mathcal{A}^{-1}\colon V_2 \to V_1$ – обратное отображение, то произведение $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}$ – единичное отображение пространства V_1, а произведение $\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$ – единичное отображение пространства V_2.

Переходя к матрицам, имеем $[\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}] = E$ и $[\mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}] = E$, где E – единичная матрица. Отсюда $[\mathcal{A}^{-1}][\mathcal{A}] = E$ и $[\mathcal{A}][\mathcal{A}^{-1}] = E$.

Если обозначить $A := [\mathcal{A}]$, $B := [\mathcal{A}^{-1}]$, то $AB = E$ и $BA = E$. Вспомним, что в любой полугруппе с единицей e элемент b такой, что $ab = ba = e$ называется *обратным* к элементу a. В курсе «Введение в математику» было проверено, что для данного a обратный к нему, если существует, определяется однозначно, что оправдывает обозначение a^{-1}. В соответствии с этим, матрица B такая, что $AB = BA = E$ для данной матрицы A называется *обратной* к матрице A и обозначается через A^{-1}.

Возникает два естественных вопроса:

1. Как узнать, имеет ли данная квадратная матрица обратную?
2. Если матрица A имеет обратную, то как вычислить A^{-1}?