Лекция. Решение несовместных систем линейных уравнений.

Пусть дана несовместная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\ \dots \\ \alpha_{m1}x_1 + \alpha_{m2}x_2 + \cdots + \alpha_{mn}x_n = \beta_m \end{cases}.$$

Обозначим через A матрицу $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ & \dots & & \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$, через x – вектор $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$, через b – вектор $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_m \end{pmatrix}$. Тогда в матричной форме эта система может быть записана как $Ax = b$.

Будем на матрицу A смотреть как на матрицу линейного отображения n-мерного пространства L_1 в m-мерное пространство L_2. Тогда множество $\{ A(x) \mid x \in L_1\}$ – это $\mathrm{Im}(A)$, т.е. подпространство в L_2. Если бы $b \in \mathrm{Im}(A)$,то система имела бы решение. Значит, $b \notin \mathrm{Im}(A)$ и потому естественно разыскивать такой вектор $x \in L_1$, для которого значение $|b - A(x)|$ было бы минимальным. Мы знаем, что минимальное значение данной величины достигается на ортогональной проекции вектора b на подпространство $\mathrm{Im}(A)$. Обозначим эту проекцию через y.

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – базис пространства L_1. Тогда $c_1 = A(a_1)$, $c_1 = A(a_2)$, …, $c_n = A(a_n)$ – система образующих пространства $\mathrm{Im}(A)$. Вектор y разыскивается как решение системы уравнений $\begin{cases} (c_1, b - y) = 0 \\ (c_2, b - y) = 0 \\ \dots \\ (c_n, b - y) = 0 \end{cases}$, которая эквивалентна системе равнений

$$\begin{cases} (c_1, y) = (c_1, b) \\ (c_2, y) = (c_2, b) \\ \dots \\ (c_n, y) = (c_n, b) \end{cases}.$$

Пусть задача решения несовместной системы рассматривается над полем $\boldsymbol{R}$. Переходя к координатной форме записи скалярного произведения и вспомнив происхождение векторов $c_1 = A(a_1)$, $c_1 = A(a_2)$, …, $c_n = A(a_n)$ и $y = A(x)$, получаем

$$\begin{cases} (A[a_1])^t Ax = (A[a_1])^t b \\ (A[a_2])^t Ax = (A[a_2])^t b \\ \dots \\ (A[a_n])^t Ax = (A[a_n])^t b \end{cases} \text{ или } \begin{cases} [a_1]^t A^t Ax = [a_1]^t A^t b \\ [a_2]^t A^t Ax = [a_2]^t A^t b \\ \dots \\ [a_n]^t A^t Ax = [a_n]^t A^t b \end{cases}.$$

Уравнение $[a_1]^t A^t Ax = [a_1]^t A^t b$, т.е. уравнение (1; 0; …; 0) $A^t Ax$ = (1; 0; …; 0) $A^t b$, означает, что первые координаты векторов $A^t Ax$ и $A^t b$ равны. Уравнение

$[a_2]^t A^t Ax = [a_2]^t A^t b$, т.е. уравнение (0; 1; …; 0) $A^t Ax$ = (0; 1; …; 0) $A^t b$, означает, что вторые координаты векторов $A^t Ax$ и $A^t b$ равны. … Уравнение $[a_n]^t A^t Ax = [a_n]^t A^t b$, т.е. уравнение (0; 0; …; 1) $A^t Ax$ = (0; 0; …; 1) $A^t b$, означает, что n-е координаты векторов $(A^t A)x$ и $A^t b$ равны. Это значит, что имеет место равенство $(A^t A)x = A^t b$. Это новая система уравнений для вектора неизвестных x, в которой матрицей системы служит матрица $A^t A$, а столбцом правых частей – вектор $A^t b$. Ввиду существования проекции вектора b на пространство Im(A) эта система заведомо имеет решение.

Если же система рассматривается над полем $\boldsymbol{C}$, то в записи скалярного произведения для второго вектора надо использовать операцию сопряжения. Проводя аналогичные вычисления, получаем равенство $A^t \overline{Ax} = A^t \overline{b}$. Выполнив ещё раз операцию комплексного сопряжения, получаем $\overline{(A^t}A)x = \overline{A^t}b$. Матрицу $\overline{A^t}$ обозначают A* и называют *сопряжённо транспонированной* к матрице A. Тем самым для поиска вектора x имеем всегда совместную систему уравнений $(A^* A)x = A^* b$.