Однозначные грамматики

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

Деревья вывода

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ — вывод, тогда **деревом вывода цепочки w** называется корневое дерево, построенное по следующим правилам:

Деревья вывода

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ — вывод, тогда деревом вывода цепочки w называется корневое дерево, построенное по следующим правилам:

- Корень дерева помечен аксиомой,

Деревья вывода

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ — вывод, тогда деревом вывода цепочки w называется корневое дерево, построенное по следующим правилам:

- Корень дерева помечен аксиомой,
- Все внутренние узлы дерева помечены нетерминалами, при этом если внутренний узел помечен нетерминалом A и $A \to X_1 X_2 \ldots X_s$ — правило вывода, которое было применно в выводе, тогда у этого узла сыновьями будут узлы, помеченные $X_1, X_2, \ldots X_s$ в указанном порядке слева направо,

Деревья вывода

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ — вывод, тогда деревом вывода цепочки w называется корневое дерево, построенное по следующим правилам:

- Корень дерева помечен аксиомой,
- Все внутренние узлы дерева помечены нетерминалами, при этом если внутренний узел помечен нетерминалом A и $A \to X_1 X_2 \ldots X_s$ — правило вывода, которое было применно в выводе, тогда у этого узла сыновьями будут узлы, помеченные $X_1, X_2, \ldots X_s$ в указанном порядке слева направо,
- Листья дерева помечены терминалами или ε, при этом если узел помечен ε, то у него нет братьев.

Деревья вывода

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ — вывод, тогда деревом вывода цепочки w называется корневое дерево, построенное по следующим правилам:

- Корень дерева помечен аксиомой,
- Все внутренние узлы дерева помечены нетерминалами, при этом если внутренний узел помечен нетерминалом A и $A \to X_1 X_2 \ldots X_s$ — правило вывода, которое было применно в выводе, тогда у этого узла сыновьями будут узлы, помеченные $X_1, X_2, \ldots X_s$ в указанном порядке слева направо,
- Листья дерева помечены терминалами или ε, при этом если узел помечен ε, то у него нет братьев.

Пример

- Рассмотрим грамматику
  $S \to AB, A \to aA \mid \varepsilon, B \to Bb \mid \varepsilon$.
- Построим вывод цепочки abb:

$$S \Rightarrow AB$$

Деревья вывода

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ — вывод, тогда деревом вывода цепочки w называется корневое дерево, построенное по следующим правилам:

- Корень дерева помечен аксиомой,
- Все внутренние узлы дерева помечены нетерминалами, при этом если внутренний узел помечен нетерминалом A и $A \to X_1X_2\ldots X_s$ — правило вывода, которое было применно в выводе, тогда у этого узла сыновьями будут узлы, помеченные $X_1, X_2, \ldots X_s$ в указанном порядке слева направо,
- Листья дерева помечены терминалами или ε, при этом если узел помечен ε, то у него нет братьев.

Пример

- Рассмотрим грамматику
  $S \to AB, A \to aA \mid \varepsilon, B \to Bb \mid \varepsilon.$
- Построим вывод цепочки abb:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAB$$

Деревья вывода

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ — вывод, тогда деревом вывода цепочки w называется корневое дерево, построенное по следующим правилам:

- Корень дерева помечен аксиомой,
- Все внутренние узлы дерева помечены нетерминалами, при этом если внутренний узел помечен нетерминалом A и $A \to X_1X_2\ldots X_s$ — правило вывода, которое было применно в выводе, тогда у этого узла сыновьями будут узлы, помеченные $X_1, X_2, \ldots X_s$ в указанном порядке слева направо,
- Листья дерева помечены терминалами или ε, при этом если узел помечен ε, то у него нет братьев.

Пример

- Рассмотрим грамматику
  $S \to AB, A \to aA \mid \varepsilon, B \to Bb \mid \varepsilon.$
- Построим вывод цепочки abb:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aB$$

Деревья вывода

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ — вывод, тогда деревом вывода цепочки w называется корневое дерево, построенное по следующим правилам:

- Корень дерева помечен аксиомой,
- Все внутренние узлы дерева помечены нетерминалами, при этом если внутренний узел помечен нетерминалом A и $A \to X_1X_2 \ldots X_s$ — правило вывода, которое было применно в выводе, тогда у этого узла сыновьями будут узлы, помеченные $X_1, X_2, \ldots X_s$ в указанном порядке слева направо,
- Листья дерева помечены терминалами или ε, при этом если узел помечен ε, то у него нет братьев.

Пример

- Рассмотрим грамматику
  $S \to AB, A \to aA \mid \varepsilon, B \to Bb \mid \varepsilon$.
- Построим вывод цепочки abb:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aB \Rightarrow aBb$$

Деревья вывода

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ — вывод, тогда деревом вывода цепочки w называется корневое дерево, построенное по следующим правилам:

- Корень дерева помечен аксиомой,
- Все внутренние узлы дерева помечены нетерминалами, при этом если внутренний узел помечен нетерминалом A и $A \to X_1 X_2 \ldots X_s$ — правило вывода, которое было применно в выводе, тогда у этого узла сыновьями будут узлы, помеченные $X_1, X_2, \ldots X_s$ в указанном порядке слева направо,
- Листья дерева помечены терминалами или ε, при этом если узел помечен ε, то у него нет братьев.

Пример

- Рассмотрим грамматику
  $S \to AB, A \to aA \mid \varepsilon, B \to Bb \mid \varepsilon.$
- Построим вывод цепочки abb:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aB \Rightarrow aBb \Rightarrow aBbb$$

Деревья вывода

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ — вывод, тогда деревом вывода цепочки w называется корневое дерево, построенное по следующим правилам:

- Корень дерева помечен аксиомой,
- Все внутренние узлы дерева помечены нетерминалами, при этом если внутренний узел помечен нетерминалом A и $A \to X_1 X_2 \ldots X_s$ — правило вывода, которое было применно в выводе, тогда у этого узла сыновьями будут узлы, помеченные $X_1, X_2, \ldots X_s$ в указанном порядке слева направо,
- Листья дерева помечены терминалами или ε, при этом если узел помечен ε, то у него нет братьев.

Пример

- Рассмотрим грамматику
  $S \to AB, A \to aA \mid \varepsilon, B \to Bb \mid \varepsilon$.
- Построим вывод цепочки abb:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aB \Rightarrow aBb \Rightarrow aBbb \Rightarrow abb$$

Деревья вывода

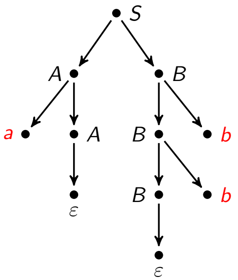
Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ — вывод, тогда деревом вывода цепочки w называется корневое дерево, построенное по следующим правилам:

- Корень дерева помечен аксиомой,
- Все внутренние узлы дерева помечены нетерминалами, при этом если внутренний узел помечен нетерминалом A и $A \to X_1 X_2 \ldots X_s$ — правило вывода, которое было применно в выводе, тогда у этого узла сыновьями будут узлы, помеченные $X_1, X_2, \ldots X_s$ в указанном порядке слева направо,
- Листья дерева помечены терминалами или ε, при этом если узел помечен ε, то у него нет братьев.

Пример

- Рассмотрим грамматику
  $S \to AB, A \to aA \mid \varepsilon, B \to Bb \mid \varepsilon.$
- Построим вывод цепочки abb:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aB \Rightarrow aBb \Rightarrow aBbb \Rightarrow abb$$



Деревья вывода

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, $S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ — вывод, тогда деревом вывода цепочки w называется корневое дерево, построенное по следующим правилам:

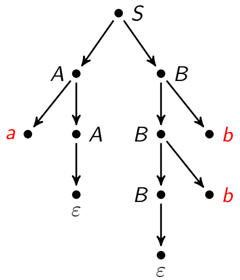
- Корень дерева помечен аксиомой,
- Все внутренние узлы дерева помечены нетерминалами, при этом если внутренний узел помечен нетерминалом A и $A \to X_1 X_2 \ldots X_s$ — правило вывода, которое было применно в выводе, тогда у этого узла сыновьями будут узлы, помеченные $X_1, X_2, \ldots X_s$ в указанном порядке слева направо,
- Листья дерева помечены терминалами или ε, при этом если узел помечен ε, то у него нет братьев.

Пример

- Рассмотрим грамматику $S \to AB, A \to aA \mid \varepsilon, B \to Bb \mid \varepsilon.$
- Построим вывод цепочки abb:

$$S \Rightarrow AB \Rightarrow aAB \Rightarrow aB \Rightarrow aBb \Rightarrow aBbb \Rightarrow abb$$

- Теперь цепочку abb можно прочитать на листьях дерева при их обходе слева направо.



Пример

Рассмотрим грамматику

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x$$

Пример

Рассмотрим грамматику

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x$$

- Постройте дерево вывода цепочки $x + x * x$.

Пример

Рассмотрим грамматику

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x$$

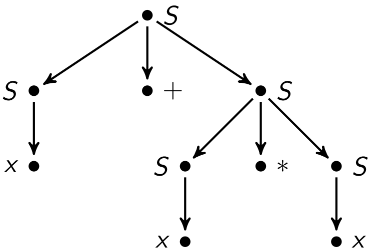
- Постройте дерево вывода цепочки $x + x * x$.
- Какое дерево получилось?

Пример

Рассмотрим грамматику

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x$$

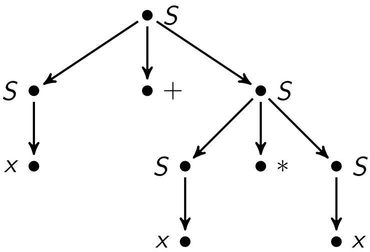
- Постройте дерево вывода цепочки $x + x * x$.
- Какое дерево получилось?

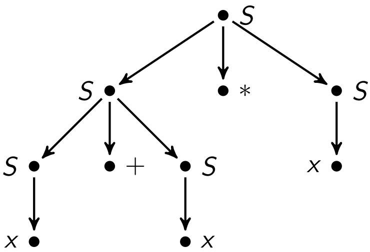


Рассмотрим грамматику

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x$$

- Постройте дерево вывода цепочки $x + x * x$.
- Какое дерево получилось?



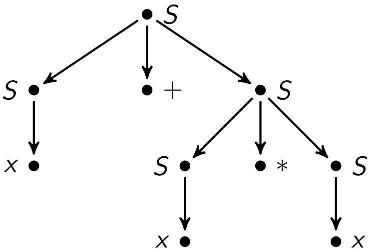


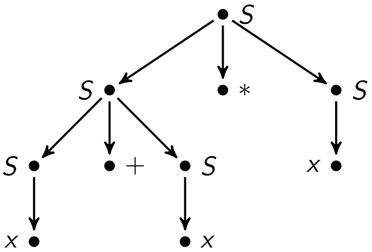
Пример

Рассмотрим грамматику

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x$$

- Постройте дерево вывода цепочки $x + x * x$.
- Какое дерево получилось?





- Почему левое дерево “правильное”?

Однозначные грамматики

- КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется однозначной, если $\forall w \in L(G)$ существует ровно одно дерево вывода для w.

Однозначные грамматики

- КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется однозначной, если $\forall w \in L(G)$ существует ровно одно дерево вывода для w.
- Плохие новости: нет алгоритма, который строил бы однозначную грамматику, распознающую тот же язык.

Однозначные грамматики

- КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется однозначной, если $\forall w \in L(G)$ существует ровно одно дерево вывода для w.
- Плохие новости: нет алгоритма, который строил бы однозначную грамматику, распознающую тот же язык.

- Пример Построим однозначную грамматику, распознающую тот же язык, что и грамматика

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x$$

Однозначные грамматики

- КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется однозначной, если $\forall w \in L(G)$ существует ровно одно дерево вывода для w.
- Плохие новости: нет алгоритма, который строил бы однозначную грамматику, распознающую тот же язык.

- Пример Построим однозначную грамматику, распознающую тот же язык, что и грамматика

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x$$

- Эта грамматика распознает язык всех арифметических выражений с операндом x и операторами $+, *$, где скобки нужны для изменения порядка вычисления выражения. Будем записывать выражение с учетом приоритета операций.

Однозначные грамматики

- КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется однозначной, если $\forall w \in L(G)$ существует ровно одно дерево вывода для w.
- Плохие новости: нет алгоритма, который строил бы однозначную грамматику, распознающую тот же язык.

- Пример Построим однозначную грамматику, распознающую тот же язык, что и грамматика

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x$$

- Эта грамматика распознает язык всех арифметических выражений с операндом x и операторами $+, *$, где скобки нужны для изменения порядка вычисления выражения. Будем записывать выражение с учетом приоритета операций.
- Каждое такое выражение имеет вид $u_1 + u_2 + \ldots + u_k$, где каждая строка u_i если и содержит знак $+$, то он находится внутри скобок. Тогда $S \to S + A \mid A$ выводит сумму, а каждое из u_i выведем из A.

Однозначные грамматики

- КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется однозначной, если $\forall w \in L(G)$ существует ровно одно дерево вывода для w.
- Плохие новости: нет алгоритма, который строил бы однозначную грамматику, распознающую тот же язык.

- Пример Построим однозначную грамматику, распознающую тот же язык, что и грамматика

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x$$

- Эта грамматика распознает язык всех арифметических выражений с операндом x и операторами $+, *$, где скобки нужны для изменения порядка вычисления выражения. Будем записывать выражение с учетом приоритета операций.
- Каждое такое выражение имеет вид $u_1 + u_2 + \ldots + u_k$, где каждая строка u_i если и содержит знак $+$, то он находится внутри скобок. Тогда $S \to S + A \mid A$ выводит сумму, а каждое из u_i выведем из A.
- Каждое из выражений, выводимых из A имеет вид $v_1 * v_2 \ldots * v_s$, где каждое v_i — это либо x, либо выражение в скобках, тогда $A \to A * B \mid B$

Однозначные грамматики

- КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется однозначной, если $\forall w \in L(G)$ существует ровно одно дерево вывода для w.
- Плохие новости: нет алгоритма, который строил бы однозначную грамматику, распознающую тот же язык.

- Пример Построим однозначную грамматику, распознающую тот же язык, что и грамматика

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x$$

- Эта грамматика распознает язык всех арифметических выражений с операндом x и операторами $+, *$, где скобки нужны для изменения порядка вычисления выражения. Будем записывать выражение с учетом приоритета операций.
- Каждое такое выражение имеет вид $u_1 + u_2 + \ldots + u_k$, где каждая строка u_i если и содержит знак $+$, то он находится внутри скобок. Тогда $S \to S + A \mid A$ выводит сумму, а каждое из u_i выведем из A.
- Каждое из выражений, выводимых из A имеет вид $v_1 * v_2 \ldots * v_s$, где каждое v_i — это либо x, либо выражение в скобках, тогда $A \to A * B \mid B$
- Выражение, стоящее в скобках, может быть любым, поэтому $B \to x \mid (S)$

Однозначные грамматики

- КС грамматика $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ называется однозначной, если $\forall w \in L(G)$ существует ровно одно дерево вывода для w.
- Плохие новости: нет алгоритма, который строил бы однозначную грамматику, распознающую тот же язык.

- Пример Построим однозначную грамматику, распознающую тот же язык, что и грамматика

$$S \to S + S \mid S * S \mid (S) \mid x$$

- Эта грамматика распознает язык всех арифметических выражений с операндом x и операторами $+, *$, где скобки нужны для изменения порядка вычисления выражения. Будем записывать выражение с учетом приоритета операций.
- Каждое такое выражение имеет вид $u_1 + u_2 + \ldots + u_k$, где каждая строка u_i если и содержит знак $+$, то он находится внутри скобок. Тогда $S \to S + A \mid A$ выводит сумму, а каждое из u_i выведем из A.
- Каждое из выражений, выводимых из A имеет вид $v_1 * v_2 \ldots * v_s$, где каждое v_i — это либо x, либо выражение в скобках, тогда $A \to A * B \mid B$
- Выражение, стоящее в скобках, может быть любым, поэтому $B \to x \mid (S)$
- В итоге получим грамматику

$$S \to S + A \mid A$$
$$A \to A * B \mid B$$
$$B \to x \mid (S)$$