Порождающие грамматики

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

Грамматики

Порождающей грамматикой(грамматикой) называется $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$, где

- Γ — алфавит нетерминалов,
- Σ — алфавит терминалов,
- P — множество правил вывода, то есть $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$ и в α **есть хотя бы один нетерминал**,
- $S \in \Gamma$ — аксиома грамматики.

Грамматики

Порождающей грамматикой(грамматикой) называется $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$, где

- Γ — алфавит нетерминалов,
- Σ — алфавит терминалов,
- P — множество правил вывода, то есть $\alpha \to \beta$, где $\alpha, \beta \in (\Sigma \cup \Gamma)^*$ и в α **есть хотя бы один нетерминал**,
- $S \in \Gamma$ — аксиома грамматики.

Договоримся, что

- Цепочка — то же самое, что слово,
- A, B, C будут обозначать нетерминалы, a, b, c будут обозначать терминалы,
- X, Y будут обозначать грамматические символы, то есть элементы $\Sigma \cup \Gamma$,
- α, β, γ будут обозначать цепочки над алфавитом $\Sigma \cup \Gamma$, u, v, w — цепочки из терминалов,
- ε — пустое слово

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — грамматика, $\alpha \to \beta \in P$ — правило вывода. Тогда говорят, что цепочка γ_2 непосредственно выводится из цепочки γ_1 в грамматике G, если

$$\gamma_1 = \delta_1\alpha\delta_2, \gamma_2 = \delta_1\beta\delta_2$$

Запись: $\delta_1\alpha\delta_2 \Rightarrow_G \delta_1\beta\delta_2$. При этом если ясно про вывод в какой грамматике идет речь, то используется значок $\Rightarrow$.

Вывод в грамматике

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — грамматика, $\alpha \to \beta \in P$ — правило вывода. Тогда говорят, что цепочка γ_2 непосредственно выводится из цепочки γ_1 в грамматике G, если

$$\gamma_1 = \delta_1 \alpha \delta_2, \gamma_2 = \delta_1 \beta \delta_2$$

Запись: $\delta_1 \alpha \delta_2 \Rightarrow_G \delta_1 \beta \delta_2$. При этом если ясно про вывод в какой грамматике идет речь, то используется значок $\Rightarrow$.

Пример 1 Рассмотрим грамматику $G = (\{S\}, \{x, +, *\}, P, S)$ с множеством правил вывода $P = \{S \to S + S, S \to S * S, S \to x\}$.

Вывод в грамматике

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — грамматика, $\alpha \to \beta \in P$ — правило вывода. Тогда говорят, что цепочка γ_2 непосредственно выводится из цепочки γ_1 в грамматике G, если

$$\gamma_1 = \delta_1\alpha\delta_2, \gamma_2 = \delta_1\beta\delta_2$$

Запись: $\delta_1\alpha\delta_2 \Rightarrow_G \delta_1\beta\delta_2$. При этом если ясно про вывод в какой грамматике идет речь, то используется значок $\Rightarrow$.

Пример 1 Рассмотрим грамматику $G = (\{S\}, \{x, +, *\}, P, S)$ с множеством правил вывода $P = \{S \to S + S, S \to S * S, S \to x\}$.

- Далее будем писать только правила вывода в виде:

$$S \to S + S \mid S * S \mid x$$

Правила с одинаковой левой частью называются альтернативами.

Вывод в грамматике

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — грамматика, $\alpha \to \beta \in P$ — правило вывода. Тогда говорят, что цепочка γ_2 непосредственно выводится из цепочки γ_1 в грамматике G, если

$$\gamma_1 = \delta_1\alpha\delta_2, \gamma_2 = \delta_1\beta\delta_2$$

Запись: $\delta_1\alpha\delta_2 \Rightarrow_G \delta_1\beta\delta_2$. При этом если ясно про вывод в какой грамматике идет речь, то используется значок $\Rightarrow$.

Пример 1 Рассмотрим грамматику $G = (\{S\}, \{x, +, *\}, P, S)$ с множеством правил вывода $P = \{S \to S + S, S \to S * S, S \to x\}$.

- Далее будем писать только правила вывода в виде:

  $$S \to S + S \mid S * S \mid x$$

  Правила с одинаковой левой частью называются альтернативами.
- Тогда $S + S \Rightarrow S * S + S$,

Вывод в грамматике

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — грамматика, $\alpha \to \beta \in P$ — правило вывода. Тогда говорят, что цепочка γ_2 непосредственно выводится из цепочки γ_1 в грамматике G, если

$$\gamma_1 = \delta_1 \alpha \delta_2, \gamma_2 = \delta_1 \beta \delta_2$$

Запись: $\delta_1 \alpha \delta_2 \Rightarrow_G \delta_1 \beta \delta_2$. При этом если ясно про вывод в какой грамматике идет речь, то используется значок $\Rightarrow$.

Пример 1 Рассмотрим грамматику $G = (\{S\}, \{x, +, *\}, P, S)$ с множеством правил вывода $P = \{S \to S + S, S \to S * S, S \to x\}$.

- Далее будем писать только правила вывода в виде:

$$S \to S + S \mid S * S \mid x$$

  Правила с одинаковой левой частью называются альтернативами.
- Тогда $S + S \Rightarrow S * S + S$,
- Или $S + S \Rightarrow S + S + S$.

Вывод в грамматике

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — грамматика, $\alpha \to \beta \in P$ — правило вывода. Тогда говорят, что цепочка γ_2 непосредственно выводится из цепочки γ_1 в грамматике G, если

$$\gamma_1 = \delta_1 \alpha \delta_2, \gamma_2 = \delta_1 \beta \delta_2$$

Запись: $\delta_1 \alpha \delta_2 \Rightarrow_G \delta_1 \beta \delta_2$. При этом если ясно про вывод в какой грамматике идет речь, то используется значок $\Rightarrow$.

Пример 2 Рассмотрим грамматику

$$\begin{aligned} S &\to aaAb \mid \varepsilon, \\ aA &\to aSb \end{aligned}$$

Вывод в грамматике

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — грамматика, $\alpha \to \beta \in P$ — правило вывода. Тогда говорят, что цепочка γ_2 непосредственно выводится из цепочки γ_1 в грамматике G, если

$$\gamma_1 = \delta_1 \alpha \delta_2, \gamma_2 = \delta_1 \beta \delta_2$$

Запись: $\delta_1 \alpha \delta_2 \Rightarrow_G \delta_1 \beta \delta_2$. При этом если ясно про вывод в какой грамматике идет речь, то используется значок $\Rightarrow$.

Пример 2 Рассмотрим грамматику

$$\begin{aligned} S &\to aaAb \mid \varepsilon, \\ aA &\to aSb \end{aligned}$$

- Тогда $S \Rightarrow aaAb$

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — грамматика, $\alpha \to \beta \in P$ — правило вывода. Тогда говорят, что цепочка γ_2 непосредственно выводится из цепочки γ_1 в грамматике G, если

$$\gamma_1 = \delta_1\alpha\delta_2, \gamma_2 = \delta_1\beta\delta_2$$

Запись: $\delta_1\alpha\delta_2 \Rightarrow_G \delta_1\beta\delta_2$. При этом если ясно про вывод в какой грамматике идет речь, то используется значок $\Rightarrow$.

Пример 2 Рассмотрим грамматику

$$S \to aaAb \mid \varepsilon,$$
$$aA \to aSb$$

- Тогда $S \Rightarrow aaAb$
- И еще шаг: $aaAb \Rightarrow aaSbb$,

Вывод в грамматике

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — грамматика, $\alpha \to \beta \in P$ — правило вывода. Тогда говорят, что цепочка γ_2 непосредственно выводится из цепочки γ_1 в грамматике G, если

$$\gamma_1 = \delta_1 \alpha \delta_2, \gamma_2 = \delta_1 \beta \delta_2$$

Запись: $\delta_1 \alpha \delta_2 \Rightarrow_G \delta_1 \beta \delta_2$. При этом если ясно про вывод в какой грамматике идет речь, то используется значок $\Rightarrow$.

Пример 2 Рассмотрим грамматику

$$S \to aaAb \mid \varepsilon,$$
$$aA \to aSb$$

- Тогда $S \Rightarrow aaAb$
- И еще шаг: $aaAb \Rightarrow aaSbb$,
- И еще: $aaSbb \Rightarrow aabb$

Язык, порождаемый грамматикой

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ грамматика. Говорят, что цепочка γ выводится из цепочки δ в грамматике G, если либо $\delta = \gamma$, либо существует последовательность цепочек $\delta = \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n = \gamma$ таких, что

$$\eta_0 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma$$

Запись: $\delta \Rightarrow_G^* \gamma$

Язык, порождаемый грамматикой

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ грамматика. Говорят, что цепочка γ выводится из цепочки δ в грамматике G, если либо $\delta = \gamma$, либо существует последовательность цепочек $\delta = \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n = \gamma$ таких, что

$$\eta_0 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma$$

Запись: $\delta \Rightarrow_G^* \gamma$

Пример В грамматике

$$\begin{aligned} S &\to aaAb \mid \varepsilon, \\ aA &\to aSb \end{aligned}$$

имеем $S \Rightarrow aaAb \Rightarrow aabb$, поэтому $S \Rightarrow aabb$.

Язык, порождаемый грамматикой

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ грамматика. Говорят, что цепочка γ выводится из цепочки δ в грамматике G, если либо $\delta = \gamma$, либо существует последовательность цепочек $\delta = \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n = \gamma$ таких, что

$$\eta_0 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma$$

Запись: $\delta \Rightarrow_G^* \gamma$

- Слово $w \in \Sigma^*$ выводимо в грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$, если $S \Rightarrow_G^* w$.

Язык, порождаемый грамматикой

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ грамматика. Говорят, что цепочка γ выводится из цепочки δ в грамматике G, если либо $\delta = \gamma$, либо существует последовательность цепочек $\delta = \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n = \gamma$ таких, что

$$\eta_0 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma$$

Запись: $\delta \Rightarrow_G^* \gamma$

- Слово $w \in \Sigma^*$ выводимо в грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$, если $S \Rightarrow_G^* w$.
- Последовательность цепочек $S = \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n = w$ такая, что $S = \eta_0 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \eta_n = w$ называется выводом w.

Язык, порождаемый грамматикой

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ грамматика. Говорят, что цепочка γ выводится из цепочки δ в грамматике G, если либо $\delta = \gamma$, либо существует последовательность цепочек $\delta = \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n = \gamma$ таких, что

$$\eta_0 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \gamma$$

Запись: $\delta \Rightarrow_G^* \gamma$

- Слово $w \in \Sigma^*$ выводимо в грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$, если $S \Rightarrow_G^* w$.
- Последовательность цепочек $S = \eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n = w$ такая, что $S = \eta_0 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \eta_n = w$ называется выводом w.
- Языком, порождаемым грамматикой G называется множество всех слов, выводимых в этой грамматике.

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

Язык, порождаемый грамматикой

Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ грамматика. Говорят, что цепочка γ выводится из цепочки δ в грамматике G, если либо $\delta = \gamma$, либо существует последовательность цепочек $\delta = \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n = \gamma$ таких, что

$$\eta_0 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \gamma$$

Запись: $\delta \Rightarrow_G^* \gamma$

- Слово $w \in \Sigma^*$ выводимо в грамматике $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$, если $S \Rightarrow_G^* w$.
- Последовательность цепочек $S = \eta_0, \eta_1, \dots, \eta_n = w$ такая, что $S = \eta_0 \Rightarrow \eta_1 \Rightarrow \dots \Rightarrow \eta_n = w$ называется выводом w.
- Языком, порождаемым грамматикой G называется множество всех слов, выводимых в этой грамматике.

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow_G^* w\}$$

- Грамматики G и G' эквивалентны, если они порождают один и тот же язык.

Пример 1

Определить, какой язык порождается грамматикой

$$S \to aSb \mid \varepsilon$$

Пример 1

Определить, какой язык порождается грамматикой

$$S \to aSb \mid \varepsilon$$

- Очевидно, что $\varepsilon \in L(G)$

Пример 1

Определить, какой язык порождается грамматикой

$$S \to aSb \mid \varepsilon$$

- Очевидно, что $\varepsilon \in L(G)$
- Построим какой-нибудь вывод, применяя первое правило:

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \ldots \Rightarrow a^n Sb^n \Rightarrow a^n b^n$$

Пример 1

Определить, какой язык порождается грамматикой

$$S \to aSb \mid \varepsilon$$

- Очевидно, что $\varepsilon \in L(G)$
- Построим какой-нибудь вывод, применяя первое правило:

$$S \Rightarrow aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \ldots \Rightarrow a^n S b^n \Rightarrow a^n b^n$$

- $L(G) = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

Пример 2

Постройте грамматику, которая порождает язык всех правильных скобочных последовательностей

Пример 2

Постройте грамматику, которая порождает язык всех правильных скобочных последовательностей

Определение

Правильной скобочной последовательностью называется множество слов над алфавитом $\{(,)\}$ таких, что

- $()$ — правильная скобочная последовательность,

Пример 2

Постройте грамматику, которая порождает язык всех правильных скобочных последовательностей

Определение

Правильной скобочной последовательностью называется множество слов над алфавитом $\{(,)\}$ таких, что

- $()$ — правильная скобочная последовательность,
- Если u, v — правильные скобочные последовательности, то uv и (u) — правильные скобочные последовательности.

Пример 2

Постройте грамматику, которая порождает язык всех правильных скобочных последовательностей

Определение

Правильной скобочной последовательностью называется множество слов над алфавитом $\{(,)\}$ таких, что

- $()$ — правильная скобочная последовательность,
- Если u, v — правильные скобочные последовательности, то uv и (u) — правильные скобочные последовательности.

Воспользуемся этим определением, чтобы построить грамматику:

Пример 2

Постройте грамматику, которая порождает язык всех правильных скобочных последовательностей

Определение

Правильной скобочной последовательностью называется множество слов над алфавитом $\{(,)\}$ таких, что

- $()$ — правильная скобочная последовательность,
- Если u, v — правильные скобочные последовательности, то uv и (u) — правильные скобочные последовательности.

Воспользуемся этим определением, чтобы построить грамматику:

- $S \to ()$

Пример 2

Постройте грамматику, которая порождает язык всех правильных скобочных последовательностей

Определение

Правильной скобочной последовательностью называется множество слов над алфавитом $\{(,)\}$ таких, что

- $()$ — правильная скобочная последовательность,
- Если u, v — правильные скобочные последовательности, то uv и (u) — правильные скобочные последовательности.

Воспользуемся этим определением, чтобы построить грамматику:

- $S \to ()$
- Из S выводятся правильные скобочные последовательности, поэтому можно считать, что S — это "переменная", в которой хранится значение соотвествующих подпоследовательностей, поэтому

$$S \to SS, S \to (S)$$

Пример 2

Постройте грамматику, которая порождает язык всех правильных скобочных последовательностей

Определение

Правильной скобочной последовательностью называется множество слов над алфавитом $\{(,)\}$ таких, что

- $()$ — правильная скобочная последовательность,
- Если u, v — правильные скобочные последовательности, то uv и (u) — правильные скобочные последовательности.

Воспользуемся этим определением, чтобы построить грамматику:

- $S \to ()$
- Из S выводятся правильные скобочные последовательности, поэтому можно считать, что S — это "переменная", в которой хранится значение соотвествующих подпоследовательностей, поэтому

$$S \to SS, S \to (S)$$

- Искомая грамматика:

$$S \to SS \mid (S) \mid ()$$