Тема: Евклидовы пространства

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Практика по линейной алгебре для физиков

13.12.2023

Описание занятия

Задачи в аудитории

11.1.23 б), 11.1.4 а), 11.1.5 а), б), 11.1.6 а), б), 11.1.9 а), 11.1.10 а), 11.1.14 а), д), 11.1.22 а), 11.4.1 а), б).

Домашнее задание

11.1.23 а), 11.1.4 б), 11.1.5 в), 11.1.6 в), 11.1.9 б), 11.1.10 б), 11.1.14 б), е), 11.1.22 б), 11.4.1 г).

В треугольнике, порожденном векторами x, y, найти длины сторон x, y, $x-y$ и углы между ними. Выяснить, какие из углов естественно считать внутренними:
б) $x=(4,0,2,0,4)$, $y=(3,3,3,3,0)$.

$|x|=\sqrt{16+4+16}=6$; $|y|=\sqrt{9+9+9+9}=6$;
$x-y=(1,-3,-1,-3,4)$, $|x-y|=\sqrt{1+9+1+9+16}=6$;
$\cos\widehat{(x,y)}=\dfrac{(x,y)}{|x|\cdot|y|}=\dfrac{12+6}{36}=\dfrac{1}{2}$, угол внутренний;
$\cos\widehat{(x,x-y)}=\dfrac{(x,x-y)}{|x|\cdot|x-y|}=\dfrac{4-2+16}{36}=\dfrac{1}{2}$, угол внутренний;
$\cos\widehat{(x-y,y)}=\dfrac{(x-y,y)}{|x-y|\cdot|y|}=\dfrac{3-9-3-9}{36}=-\dfrac{1}{2}$, угол внешний.

Доказать, что векторы приведенных ниже систем попарно ортогональны, и дополнить их до ортогональных базисов:
а) $(1,-2,2,-3)$, $(2,-3,2,4)$.

$a_1=(1,-2,2,-3)$, $a_2=(2,-3,2,4)$; $(a_1,a_2)=2+6+4-12=0$, $a_1\perp a_2$,
$c=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $c\perp a_1,a_2 \implies (c,a_1)=0$, $(c,a_2)=0$;
$(c,a_1)=x_1-2x_2+2x_3-3x_4$, $(c,a_2)=2x_1-3x_2+2x_3+4x_4$;

$$\begin{cases} x_1-2x_2+2x_3-3x_4=0,\\ 2x_1-3x_2+2x_3+4x_4=0;\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 2 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3\\ 0 & 1 & -2 & 10\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 17\\ 0 & 1 & -2 & 10\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1-2x_3+17x_4=0,\\ x_2-2x_3+10x_4=0;\end{cases}\quad \begin{cases} x_1=2x_3-17x_4,\\ x_2=2x_3-10x_4;\end{cases}\quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ 2 & 2 & 1 & 0\\ -17 & -10 & 0 & 1\end{array}$$

$c_1=(2,2,1,0)$, $c_2=(-17,-10,0,1)$; $(c_1,c_2)=-34-20=-54$,

$$b_1=c_1,\ b_2=c_2+\lambda b_1,\ \lambda=-\frac{(c_2,b_1)}{(b_1,b_1)}=-\frac{-54}{4+4+1}=6;$$

$b_2=c_2+6c_1=(-17,-10,0,1)+(12,12,6,0)=(-5,2,6,1)$.
Проверка: $(b_1,b_2)=-10+4+6=0$.
(a_1,a_2,b_1,b_2) – ортогональный базис.

Найти векторы, дополняющие приведенные ниже системы векторов до ортонормированных базисов:
а) $\frac{1}{3}(2,1,2),\ \frac{1}{3}(1,2,-2);$

$a_1 = \frac{1}{3}(2,1,2),\ a_2 = \frac{1}{3}(1,2,-2);\ |a_1| = \frac{1}{3}\sqrt{4+1+4} = 1,$
$|a_2| = \frac{1}{3}\sqrt{1+4+4} = 1;$

$$a_3 = [a_1, a_2] = \frac{1}{9}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{9}(-6,6,3) = \frac{1}{3}(-2,2,1).$$

(a_1, a_2, a_3) – ортонормированный базис.
Дополнить до ортонормированного базиса можно двумя способами.

Найти векторы, дополняющие приведенные ниже системы векторов до ортонормированных базисов:
б) $\frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $\frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$;

$a_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$, $a_2 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$;
$c = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $c \perp a_1$, $c \perp a_2$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0; \end{cases} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -x_2, \\ x_3 = -x_4; \end{cases} \quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}$$

$c_1 = (-1,1,0,0)$, $c_2 = (0,0,-1,1)$, $c_1 \perp c_2$;
$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0)$, $b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1)$;
(a_1, a_2, b_1, b_2) – ортонормированный базис. Дополнить до ортонормированного базиса можно бесконечным множеством способов.

Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис линейного подпространства, порожденного приведенными ниже системами векторов:
а) $(1, 2, 2, -1)$, $(1, 1, -5, 3)$, $(3, 2, 8, -7)$.

$a_1 = (1, 2, 2, -1)$, $a_2 = (1, 1, -5, 3)$, $a_3 = (3, 2, 8, -7)$;

$b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \lambda b_1$, $\lambda = -\dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\dfrac{1 + 2 - 10 - 3}{1 + 4 + 4 + 1} = 1$,

$b_2 = a_2 + b_1 = (2, 3, -3, 2)$, проверка: $(b_2, b_1) = 2 + 6 - 6 - 2 = 0$;

$b_3 = a_3 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$, $\lambda_1 = -\dfrac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\dfrac{3 + 4 + 16 + 7}{10} = -3$,

$\lambda_2 = -\dfrac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\dfrac{6 + 6 - 24 - 14}{4 + 9 + 9 + 4} = 1$;

$b_3 = a_3 - 3b_1 + b_2 = (3, 2, 8, -7) - (3, 6, 6, -3) + (2, 3, -3, 2) = (2, -1, -1, -2)$;

проверка: $(b_3, b_1) = 2 - 2 - 2 + 2 = 0$, $(b_3, b_2) = 4 - 3 + 3 - 4 = 0$.

(b_1, b_2, b_3) – ортогональный базис подпространства $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$.

Применяя процесс ортогонализации, построить ортогональный базис линейного подпространства, порожденного приведенными ниже системами векторов:
б) $(1, 1, -1, -2)$, $(5, 8, -2, -3)$, $(3, 9, 3, 8)$.

$a_1 = (1, 1, -1, -2),\ a_2 = (5, 8, -2, -3),\ a_3 = (3, 9, 3, 8);$
$b_1 = a_1,\ b_2 = a_2 + \lambda b_1,\ \lambda = -\dfrac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\dfrac{5+8+2+6}{1+1+1+4} = -3,$
$b_2 = a_2 - 3b_1 = (2, 5, 1, 3)$, проверка: $(b_2, b_1) = 2 + 5 - 1 - 6 = 0;$
$b_3 = a_3 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2,\ \lambda_1 = -\dfrac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} = -\dfrac{3+9-3-16}{7} = 1,$
$\lambda_2 = -\dfrac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} = -\dfrac{6+45+3+24}{4+25+1+9} = -2;$
$b_3 = a_3 + b_1 - 2b_2 = (3, 9, 3, 8) + (1, 1, -1, -2) - (4, 10, 2, 6) = (0, 0, 0, 0);$
$a_3 = -b_1 + 2b_2 = -a_1 + 2a_2 - 6a_1 = 2a_2 - 7a_1,$
$2(5, 8, -2, -3) - 7(1, 1, -1, -2) = (3, 9, 3, 8).$
(b_1, b_2) – ортогональный базис подпространства $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$.

Найти базис ортогонального дополнения подпространства, порожденного векторами:
а) $(1,0,2,1)$, $(2,1,2,3)$, $(0,1,-2,1)$.

$a_1=(1,0,2,1),\ a_2=(2,1,2,3),\ a_3=(0,1,-2,1);$
$\langle a_1,a_2,a_3\rangle^{\perp}=\{a_1,a_2,a_3\}^{\perp}=\{x\in\mathbb{R}^4|(a_i,x)=0,\ i=1,2,3\};$

$$\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=0,\\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=0,\\ x_2-2x_3+x_4=0;\end{cases}\quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_3+x_4=0,\\ x_2-2x_3+x_4=0;\end{cases}\quad \begin{cases} x_1=-2x_3-x_4,\\ x_2=2x_3-x_4;\end{cases}\quad \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4\\ -2 & 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & -1\end{array}$$

$b_1=(-2,2,1,0),\ b_2=(1,1,0,-1);$ (b_1,b_2) – базис ортогонального дополнения подпространства $\langle a_1,a_2,a_3\rangle$.

Найти систему линейных уравнений, задающую ортогональное дополнение к пространству решений приведенных ниже систем линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$

$a_1 = (2, 1, 3, -1)$, $a_2 = (3, 2, 0, -2)$, $a_3 = (3, 1, 9, -1)$, подпространство решений с.л.у. – $\{a_1, a_2, a_3\}^{\perp} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle^{\perp}$. Его ортогональное дополнение – $(\langle a_1, a_2, a_3\rangle^{\perp})^{\perp} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$. Таким образом, нужно найти систему линейных уравнений, задающую подпространство $\langle a_1, a_2, a_3\rangle$.

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0, \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 - \lambda_4 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_4 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 9\lambda_3 - \lambda_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 9 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 9 & 1 \\ 0 & -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 9 & 1 \end{pmatrix};$$

Окончание 11.1.10 а)

$$\begin{cases} \lambda_1 + 6\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_2 + 9\lambda_3 + \lambda_4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -6\lambda_3, \\ \lambda_2 = 9\lambda_3 + \lambda_4; \end{cases} \quad \begin{array}{cccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ 6 & -9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} 6x_1 - 9x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$ – искомая система линейных уравнений.

Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на линейное подпространство U в каждом из следующих случаев:
а) $x = (4, -1, -3, 4)$, $U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$.

Найдем базис U: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; $b_1 = (1, 0, 0, 3)$, $b_2 = (0, 1, 1, -2)$ – базис U.
$x = y + z$, $y \in U$, $z \in U^{\perp}$, $y = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2$,
$x = \alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + z$, $(x, b_1) = (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + z, b_1) = \alpha_1 (b_1, b_1) + \alpha_2 (b_2, b_1)$,
$(x, b_2) = (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2 + z, b_2) = \alpha_1 (b_1, b_2) + \alpha_2 (b_2, b_2)$,
$(x, b_1) = 16$, $(x, b_2) = -12$, $(b_1, b_1) = 10$, $(b_1, b_2) = -6$, $(b_2, b_2) = 6$;
$\begin{cases} 10\alpha_1 - 6\alpha_2 = 16, \\ -6\alpha_1 + 6\alpha_2 = -12; \end{cases}$ $\begin{cases} 4\alpha_1 = 4, \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} \alpha_1 = 1, \\ \alpha_2 = -1; \end{cases}$
$y = b_1 - b_2 = (1, -1, -1, 5)$, $z = x - y = (3, 0, -2, -1)$.
Проверка: $(z, b_1) = 3 - 3 = 0$; $(z, b_2) = -2 + 2 = 0$.

Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора x на линейное подпространство U в каждом из следующих случаев: д) $x = (7, -4, -1, 2)$, U задано системой уравнений
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9x_4 = 0; \end{cases}$$

$a_1 = (2, 1, 1, 3)$, $a_2 = (3, 2, 2, 1)$, $a_3 = (1, 2, 2, -9)$; $U = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle^{\perp}$;
$U^{\perp} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$; $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -9 \\ 0 & -3 & -3 & 21 \\ 0 & -4 & -4 & 28 \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -9 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$;
$c_1 = (1, 0, 0, 5)$, $c_2 = (0, 1, 1, -7)$ – базис $U^{\perp}$. $x = y + z$, $z = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$,
$x = y + \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2$,
$(x, c_1) = \alpha_1 (c_1, c_1) + \alpha_2 (c_2, c_1)$, $(x, c_2) = \alpha_1 (c_1, c_2) + \alpha_2 (c_2, c_2)$,
$(x, c_1) = 17$, $(x, c_2) = -19$, $(c_1, c_1) = 26$, $(c_1, c_2) = -35$, $(c_2, c_2) = 51$;
$$\begin{cases} 26\alpha_1 - 35\alpha_2 = 17, \\ -35\alpha_1 + 51\alpha_2 = -19; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 26\alpha_1 - 35\alpha_2 = 17, \\ -35\alpha_1 + 51\alpha_2 = -19; \end{cases}$$

$$\triangle = \begin{vmatrix} 26 & -35 \\ -35 & 51 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 16 \\ -35 & 51 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 16 \\ 1 & -13 \end{vmatrix} = 101;$$

$$\triangle_1 = \begin{vmatrix} 17 & -35 \\ -19 & 51 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 16 \\ -19 & 51 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 10 \\ -19 & -6 \end{vmatrix} = 202;$$

$$\triangle_2 = \begin{vmatrix} 26 & 17 \\ -35 & -19 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & -2 \\ -35 & -19 \end{vmatrix} = 101;$$

$\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 1,\ c_1 = (1, 0, 0, 5),\ c_2 = (0, 1, 1, -7),\ z = 2c_1 + c_2 = (2, 1, 1, 3)$

$y = x - z = (7, -4, -1, 2) - (2, 1, 1, 3) = (5, -5, -2, -1);$

Проверка: $(y, c_1) = 5 - 5 = 0;\ (y, c_2) = -5 - 2 + 7 = 0.$

Найти угол между вектором x и линейным подпространством, порожденным векторами $a_1, a_2, \dots, a_k$:
а) $x = (2,2,1,1)$, $a_1 = (3,4,-4,-1)$, $a_2 = (0,1,-1,2)$.

$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + z$, $U = \langle a_1, a_2 \rangle$, $y = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 \in U$, $z \in U^{\perp}$;
$(x, a_1) = \lambda_1 (a_1, a_1) + \lambda_2 (a_2, a_1)$, $(x, a_2) = \lambda_1 (a_2, a_1) + \lambda_2 (a_2, a_2)$;
$(x, a_1) = 9$, $(x, a_2) = 3$, $(a_1, a_1) = 42$, $(a_1, a_2) = 6$, $(a_2, a_2) = 6$;

$$\begin{cases} 42\lambda_1 + 6\lambda_2 = 9, \\ 6\lambda_1 + 6\lambda_2 = 3; \end{cases} \quad \begin{cases} 36\lambda_1 = 6, \\ \lambda_1 + \lambda_2 = \dfrac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{1}{6}, \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{3}; \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{6}a_1 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{1}{6}(a_1 + 2a_2) = \frac{1}{6}(3,6,-6,3) = \frac{1}{2}(1,2,-2,1);$$

$$\cos\widehat{(x, U)} = \cos\widehat{(x, 2y)} = \frac{(x, 2y)}{|x| \cdot |2y|} = \frac{2+4-2+1}{\sqrt{4+4+1+1}\sqrt{1+4+4+1}} = \frac{1}{2};$$

$\widehat{(x, U)} = \pi/3$.

Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для самосопряженного линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей A: а) $A = \begin{pmatrix} 11 & 2 & -8 \\ 2 & 2 & 10 \\ -8 & 10 & 5 \end{pmatrix}$.

$\mathcal{A} \longleftrightarrow A$;

$\chi_{\mathcal{A}}(x) = \begin{vmatrix} 11-x & 2 & -8 \\ 2 & 2-x & 10 \\ -8 & 10 & 5-x \end{vmatrix} = (11-x)\begin{vmatrix} 2-x & 10 \\ 10 & 5-x \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 10 \\ -8 & 5-x \end{vmatrix} -$
$8\begin{vmatrix} 2 & 2-x \\ -8 & 10 \end{vmatrix} = (11-x)(x^2-7x-90) - 2(90-2x) - 8(36-8x) =$
$11x^2 - 77x - 990 - x^3 + 7x^2 + 90x - 180 + 4x - 288 + 64x = -x^3 + 18x^2 + 81x - 1458$;
Целочисленные корни являются делителями свободного члена, т.е. числа $1458 = 2 \cdot 3^6$. Используем схему Горнера для вычисления значений многочлена от выбранных делителей.

	-1	18	81	-1458
6	-1	12	153	-540
9	-1	9	162	0

$-x^3 + 18x^2 + 81x - 1458 = (x-9)(-x^2+9x+162)$, $\lambda_1 = 9$, $x^2 - 9x - 162 = 0$,
$D = 81 + 4 \cdot 162 = 81 \cdot 9$, $\lambda_{2,3} = \dfrac{9 \pm 27}{2}$, $\lambda_2 = 18$, $\lambda_3 = -9$;

$$\lambda_1 = 9, \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 2 & -7 & 10 \\ -8 & 10 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 & -8 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 18 & -36 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \; x_1 = x_2 = 2x_3, \; a_1 = (2, 2, 1), \; |a_1| = 3, \; e_1 = \tfrac{1}{3}(2, 2, 1);$$

$$\lambda_2 = 18, \begin{pmatrix} -7 & 2 & -8 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 2 & -16 & 10 \\ -8 & 10 & -13 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -54 & 27 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -8 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \; x_1 = -2x_2, \; x_3 = 2x_2, \; a_2 = (-2, 1, 2), \; |a_2| = 3,$$

$$e_2 = \tfrac{1}{3}(-2, 1, 2);$$

$$e_3 = [e_1, e_2] = \tfrac{1}{9} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \tfrac{1}{9}(3, -6, 6) = \tfrac{1}{3}(1, -2, 2).$$

$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$ – матрица самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в базисе из собственных векторов (e_1, e_2, e_3).

Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для самосопряженного линейного оператора, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей A: б) $A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$

$\mathcal{A} \longleftrightarrow A$;

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 17-x & -8 & 4 \\ -8 & 17-x & -4 \\ 4 & -4 & 11-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9-x & 9-x & 0 \\ 0 & 9-x & 18-2x \\ 4 & -4 & 11-x \end{vmatrix} =$

$(9-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 11-x \end{vmatrix} = (9-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -8 & 11-x \end{vmatrix} = (9-x)^2(27-x)$;

$\lambda_{1,2} = 9$, $\lambda_3 = 27$;

$\begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$; (*) $x_3 = -2x_1 + 2x_2$;

$\begin{array}{ccc} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$; $a_1 = (1, 0, -2)$, $a_2 = (0, 1, 2)$, $(a_1, a_2) = -4$; $a_1 \not\perp a_2$, применяем к векторам a_1, a_2 процесс ортогонализации Грама-Шмидта: $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \mu b_1$,

$\mu = -\frac{-4}{5} = \frac{4}{5}$, $b_2 = a_2 + \frac{4}{5} a_1 = (\frac{4}{5}, 1, \frac{2}{5}) = \frac{1}{5}(4, 5, 2)$;

нормируем векторы b_1 и b_2: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, -2)$, $e_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}}(4, 5, 2)$;

вектор $a_3 = (2, -2, 1)$ ортогонален к векторам a_1, a_2; его координаты – коэффициенты уравнения (*). Поэтому $e_3 = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$.

Окончание 11.4.1 б)

$A_1 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}$ – матрица самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ в базисе из собственных векторов (e_1, e_2, e_3).