Тема 9: Общая теория систем линейных уравнений

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Лекции по линейной алгебре для физиков

Критерий совместности системы линейных уравнений

Пусть F – поле, $A \in F^{k\times n}$, $b \in F_k$, $x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ – столбец из n неизвестных. Рассмотрим систему линейных уравнений над полем F в матричной записи

$$Ax = b.$$

Определение совместной системы линейных уравнений см. на сл.4 т.1. Основная и расширенная матрицы системы линейных уравнений определяются на сл.36 т.1. Критерий совместности системы линейных уравнений дает

Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных уравнений $Ax = b$ совместна тогда и только тогда, когда $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A|b)$ (т.е. когда ранг основной матрицы этой системы равен рангу ее расширенной матрицы).

$\Downarrow$ Пусть $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$, $b = (\beta_1, \ldots, \beta_k)^\top$. Запишем систему линейных уравнений в развернутом виде:

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \ldots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k. \end{array}\right. \tag{1}$$

Как обычно, обозначим через $a_1, \ldots, a_n$ столбцы матрицы A. Тогда систему (1) можно записать так: $x_1a_1 + \ldots + x_na_n = b$. Отсюда следует, что система (1) совместна тогда и только тогда, когда $(a_1, \ldots, a_n) \vdash b$. В силу утверждения 5 сл.13 т.4 последнее условие равносильно равенству $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \langle a_1, \ldots, a_n, b\rangle$. Согласно теореме сл.6 т.8 это равенство с учетом включения $\langle a_1, \ldots, a_n\rangle \subseteq \langle a_1, \ldots, a_n, b\rangle$ равносильно равенству размерностей $\dim\langle a_1, \ldots, a_n\rangle = \dim\langle a_1, \ldots, a_n, b\rangle$, которое можно записать как $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A|b)$. По теореме сл.6 т.8 получаем требуемое утверждение. $\Uparrow$

Так как ранг основной матрицы может быть меньше ранга расширенной матрицы только на 1, получаем такое

Следствие

Система линейных уравнений $Ax = b$ несовместна тогда и только тогда, когда $\mathsf{r}(A) + 1 = \mathsf{r}(A|b)$.

При решении конкретных систем линейных уравнений теорема Кронекера-Капелли применяется при завершении прямого хода в методе Гаусса-Жордана, когда основная и расширенная матрицы приведены к ступенчатому виду, что дает возможность легко определить ранг каждой из этих матриц.

Определение

Рангом совместной системы линейных уравнений $Ax = b$ называется число r: $r = \mathsf{r}(A) = \mathsf{r}(A|b)$.

Определение крамеровской системы линейных уравнений см. на сл.44 т.3. В дополнение к теореме Крамера (сл.46 т.3) справедливо следующее

Предложение

Если в крамеровской системе линейных уравнений главный определитель равен нулю, а по крайней мере один из вспомогательных определителей отличен от нуля, то эта система несовместна.

$\Downarrow$ Из условия следует, что ранг по минорам основной матрицы меньше ее порядка, который обозначим через n. Вспомогательные определители отличаются от миноров порядка n расширенной матрицы быть может лишь знаком, поэтому ранг по минорам расширенной матрицы равен n. Следовательно, система несовместна. $\Uparrow$

Если в крамеровской системе линейных уравнений главный определитель и все вспомогательные определители равны нулю, то она может быть как несоместна, так и иметь бесконечное множество решений. Рекомендуется привести пример для каждой ситуации.

Рассмотрим совместную систему линейных уравнений (1) на сл.3. Пусть r – ее ранг. Выберем линейно независимую систему из r строк расширенной матрицы; без ограничения общности будем считать, что это первые r строк. Так как остальные строки расширенной матрицы линейно выражаются через выбранные r строк, соответствующие уравнения являются следствиями первых r уравнений, и система (1) оказывается равносильной системе

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r1}x_1 + \alpha_{r1}x_k + \ldots + \alpha_{rn}x_n = \beta_r. \end{cases}$$

Приводя эту систему к лестничной форме (см. сл.8 т.1) и при необходимости перенумеруя неизвестные, получим систему

$$\begin{cases} \gamma_{11}x_1 + \gamma_{12}x_2 + \ldots + \gamma_{1r}x_r + \ldots + \gamma_{1n}x_n = \delta_1, \\ \qquad\qquad \gamma_{22}x_2 + \ldots + \gamma_{2r}x_r + \ldots + \gamma_{2n}x_n = \delta_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \gamma_{rr}x_r + \ldots + \gamma_{rn}x_n = \delta_r, \end{cases}$$

в которой $\gamma_{jj} \neq 0$ при $j = 1, \ldots, r$. Если $r = n$, то последняя система имеет единственное решение; при $r < n$ она имеет бесконечное множество решений.

Общее решение совместной системы линейных уравнений

Выражая в последней системе линейных уравнений на сл.6 неизвестные $x_r, x_{r-1}, \ldots, x_1$ через $x_{r+1}, \ldots, x_n$ при $r < n$, получаем следующее

Определение

Общим решением совместной системы линейных уравнений (1) сл.3, имеющей ранг r, называется система линейных уравнений $(d = n - r)$

$$\begin{cases} x_1 = \lambda_{11}x_{r+1} + \ldots + \lambda_{1d}x_n + \mu_1, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \lambda_{r1}x_{r+1} + \ldots + \lambda_{rd}x_n + \mu_r. \end{cases}$$

Неизвестные $x_1, \ldots, x_r$ называются *базисными*, а неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ – *свободными*.

Отметим, что для упрощения обозначений неизвестные могли быть перенумерованы. При решении конкретной системы линейных уравнений общее решение характеризуется следующими основными чертами:

1. количество уравнений равно рангу системы;
2. каждое уравнение представляет собой выражение одной неизвестной через другие вида $x_j = \lambda_{j1}x_{i_1} + \ldots + \lambda_{jd}x_{i_d} + \mu_j$;
3. Множество всех неизвестных из левых частей уравнений и множество всех неизвестных из правых частей уравнений образуют разбиение множества всех неизвестных системы.

Определение

Напомним, что система линейных уравнений называется *определенной*, если она имеет единственное решение.

Из результатов сл. 7 и 8 вытекает следующая

Теорема

Совместная система линейных уравнений является определенной тогда и только тогда, когда ее ранг равен количеству неизвестных.

$\Downarrow$ В самом деле, у совместной системы линейных уравнений ранг равен рангу ее основной матрицы. Количество столбцов основной матрицы - это количество неизвестных системы. Ранг любой матрицы меньше либо равен количеству ее столбцов. Поэтому ранг системы может быть равен количеству неизвестных – тогда система определенная, или ранг системы может быть меньше количество неизвестных – тогда система имеет бесконечное множество решений. $\Uparrow$

Напомним, что система линейных уравнений называется *однородной*, если свободные члены во всех уравнениях этой системы равны нулю. Однородная система линейных уравнений всегда совместна и множество всех ее частных решений является подпространством (см. сл.5 т.8).

Определения

Это подпространство называется *пространством решений* однородной системы линейных уравнений, а любой базис этого подпространства – ее *фундаментальной системой решений* (ФСР).

Теорема

Пусть $Ax = O$ – матричная запись однородной системы линейных уравнений над полем F, где $A \in F^{k \times n}$ и U – пространство решений этой системы. Тогда $\dim U = n - \mathrm{r}(A)$.

$\Downarrow$ Положим $r = \mathrm{r}(A)$, $d = n - r$. Если $r = n$, то система имеет единственное решение (см. сл.6) – нулевое, т.е. $U = \{O\}$, и утверждение выполняется.

Пусть $r < n$. Рассмотрим общее решение нашей системы, перенумеруя при необходимости неизвестные: $\begin{cases} x_1 = \lambda_{11}x_{r+1} + \ldots + \lambda_{1d}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \lambda_{r1}x_{r+1} + \ldots + \lambda_{rd}x_n. \end{cases}$ Построим систему решений, придавая по очереди одному из свободных неизвестных значение 1, а остальным – значение 0. $\begin{array}{cccccc} x_1 & \ldots & x_r & x_{r+1} & \ldots & x_n \\ \lambda_{11} & \ldots & \lambda_{r1} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{1d} & \ldots & \lambda_{rd} & 0 & \ldots & 1 \end{array}$

Положим $f_j = (\lambda_{1j}, \ldots, \lambda_{rj}, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (здесь 1 на $(r+j)$-м месте, $j = 1, \ldots, d$) и докажем, что $(f_1, \ldots, f_d)$ – фундаментальная система решений. По построению $f_j \in U$. Так как ранг по минорам матрицы, составленной из строк $f_1, \ldots, f_d$, равен d, ее ранг по строкам также равен d, т.е. строки $(f_1, \ldots, f_d)$ линейно независимы. Покажем, что $U = \langle f_1, \ldots, f_d \rangle$. Пусть $(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in U$. Имеем $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (\lambda_{11}\xi_{r+1} + \ldots + \lambda_{1d}\xi_n, \ldots, \lambda_{r1}\xi_{r+1} + \ldots + \lambda_{rd}\xi_n, \xi_{r+1}, \ldots, \xi_n) =$ $(\lambda_{11}\xi_{r+1}, \ldots, \lambda_{r1}\xi_{r+1}, \xi_{r+1}, 0 \ldots, 0) + \ldots + (\lambda_{1d}\xi_n, \ldots, \lambda_{rd}\xi_n, 0, 0 \ldots, \xi_n) =$ $\xi_{r+1}f_1 + \ldots + \xi_n f_d$, что и требуется доказать. Таким образом, $(f_1, \ldots, f_d)$ – фундаментальная система решений и $\dim U = d = n - r$. Теорема доказана.$\Uparrow$

Алгоритм нахождения фундаментальной системы решений

Чтобы найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений $Ax = O$, следует сначала найти ее общее решение. Элементарные преобразования строк можно проводить в матрице A, так как нулевой столбец свободных членов при этих преобразованиях не изменяется. Если система имеет единственное (нулевое) решение, то ее подпространство решений – нулевое и фундаментальной системы решений не существует. Если в общем решении имеется d свободных неизвестных, то выбираем невырожденную матрицу S порядка d и по очереди придаем свободным неизвестным значения элементов одной строки матрицы S; значения базисных неизвестных определяем из общего решения. Полученные d строк и будут образовывать одну из фундаментальных систем решений.

В алгоритме получается система из d линейно независимых решений, так как матрица S невырожденная. Число d – размерность пространства решений. В силу утверждения 2 теоремы сл.6 т.6 эта система будет базисом пространства решений.

В качестве матрицы S удобно брать единичную матрицу или диагональную матрицу с ненулевыми элементами на диагонали.

Найти фундаментальную систему решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-x_4+2x_5=0, \\ 2x_1+3x_2-x_3-2x_4+5x_5=0, \\ 3x_1+4x_2-2x_3+x_4+x_5=0. \end{cases}$$

Преобразуем основную матрицу.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 & 5 \\ 3 & 4 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 4 & -5 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & 28 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 25 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & -5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & -7 \end{pmatrix} \begin{cases} 4x_1+25x_3+9x_5=0, \\ x_2-5x_3-x_5=0, \\ -3x_3+4x_4-7x_5=0. \end{cases}$$ Общее решение:

$$\begin{cases} x_1=-\frac{25}{4}x_3-\frac{9}{4}x_5, \\ x_2=5x_3+x_5, \\ x_4=\frac{3}{4}x_3+\frac{7}{4}x_5. \end{cases}$$ Свободные неизвестные: x_3, x_5. Матрица $S =$

$= \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$. ФСР:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
-25	20	4	3	0
-9	4	0	7	4

$f_1 = (-25, 20, 4, 3, 0)$
$f_2 = (-9, 4, 0, 7, 4)$

Связь между неоднородными и однородными системами линейных уравнений

Сопоставим совместной системе линейных уравнений над полем F

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_k + \ldots + \alpha_{kn}x_n = \beta_k \end{array}\right. \qquad (2)$$

однородную систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_k + \ldots + \alpha_{kn}x_n = 0. \end{array}\right. \qquad (3)$$

Обозначим множество всех частных решений системы (2) через L, а пространство решений однородной системы (3) – через U. Для любой строки $c \in F^n$ положим $c + U = \{c + u | u \in U\}$.

Предложение

Для любого решения $c \in L$ имеет место равенство $L = c + U$.

$\Downarrow$ Запишем системы (2) и (3) сл.12 в матричной форме: $Ax = b$, $Ax = O$. Тогда $L = \{c \in F^n | Ac^\top = b\}$, $U = \{u \in F^n | Au^\top = O\}$. Пусть $c \in L$. Для любого $u \in U$ имеем $A(c+u)^\top = Ac^\top + Au^\top = b + O = b$, т.е. $c + u \in L$. Таким образом, $c + U \subseteq L$. Убедимся, что $L \subseteq c + U$. Возьмем $x \in L$ и положим $u = x - c$. Так как $Ac^\top = b$, $Ax^\top = b$, имеем $A(x-c)^\top = Ax^\top - Ac^\top = O$, т.е. $u \in U$. Мы видим, что $x = c + u$ и $x \in c + U$. Следовательно, $L \subseteq c + U$. Предложение доказано.$\Uparrow$

Связь между неоднородной и однородной системой линейных уравнений, выражаемую формулой $L = c + U$, можно представить *векторной записью* общего решения неоднородной системы линейных уравнений. А именно, любое решение $x \in L$ может быть записано в виде $x = c + \lambda_1 f_1 + \ldots + \lambda_d f_d$, где c – фиксированное частное решение из L, $(f_1, \ldots, f_d)$ – базис U, т.е. фундаментальная система решений однородной системы (3), $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ – произвольные скаляры, независимо друг от друга пробегающие поле F.

Пример векторной записи общего решения системы линейных уравнений

Пусть неоднородная система линейных уравнений имеет общее решение

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_3 - x_5, \\ x_2 = 1 + 5x_3 + x_5, \\ x_4 = 3 - 4x_3 + 7x_5. \end{cases}$$

Записать общее решение этой системы в векторной форме.

Имеем
$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2 - x_3 - x_5, 1 + 5x_3 + x_5, x_3, 3 - 4x_3 + 7x_5, x_5) =$
$(2, 1, 0, 3, 0) + (-x_3, 5x_3, x_3, -4x_3, 0) + (-x_5, x_5, 0, 7x_5, x_5) =$
$(2, 1, 0, 3, 0) + x_3(-1, 5, 1, -4, 0) + x_5(-1, 1, 0, 7, 1)$. Векторная запись общего решения:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 1, 0, 3, 0) + \lambda(-1, 5, 1, -4, 0) + \mu(-1, 1, 0, 7, 1).$$

При этом $c = (2, 1, 0, 3, 0)$ — частное решение неоднородной системы, $f_1 = (-1, 5, 1, -4, 0)$, $f_2 = (-1, 1, 0, 7, 1)$ — ФСР соответствующей однородной системы линейных уравнений.

Задание подпространства однородной системой линейных уравнений

Будем говорить, что однородная система линейных уравнений задает (определяет) свое пространство решений. Возникает вопрос: любое ли подпространство пространства строк F^n задается некоторой однородной системой линейных уравнений от n неизвестных?

Теорема

Для любого подпространства $U \subseteq F^n$ существует однородная система линейных уравнений, которая задает U.

$\Downarrow$ Если $U = \{O\}$, то возьмем систему $x_j = 0$, $j = 1, \ldots, n$. Если $U = F^n$, то возьмем систему $0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$. Пусть $\{O\} \subset U \subset F^n$. Выберем в U базис из строк $u_1, \ldots, u_d$. Составим из этих строк матрицу A и рассмотрим однородную систему линейных уравнений $Ax = O$. Построим фундаментальную систему решений $(f_1, \ldots, f_r)$ $(r = n - d)$ этой системы. Составим из строк $f_1, \ldots, f_r$ матрицу B. Докажем, что однородная система линейных уравнений $Bx = O$ задает U. Обозначим через V пространство решений системы $Bx = O$. По построению матрицы B имеем $u_1, \ldots, u_d \in V$. Следовательно, $U \subseteq V$. Далее, $\dim U = d$ и $\dim V = n - \mathrm{r}(B) = n - r = d$. Поэтому $\dim U = \dim V$ и $U = V$. $\Uparrow$

Пример задания подпространства однородной системой линейных уравнений

Найти о.с.л.у., задающую подпространство $\langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$ в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^5$, где $a_1 = (1, 2, 3, 4, 5)$, $a_2 = (1, 3, 5, 7, 9)$, $a_3 = (2, 3, 4, 5, 6)$, $a_4 = (3, 5, 7, 9, 11)$.

Запишем однородное уравнение от 5 неизвестных: $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 + \alpha_5 x_5 = 0$. Векторы a_1, a_2, a_3, a_4 являются его частными решениями. Запишем получающуюся о.с.л.у.:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5 x_5 = 0, \\ \alpha_1 + 3\alpha_2 + 5\alpha_3 + 7\alpha_4 + 9\alpha_5 x_5 = 0, \\ 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 x_5 = 0, \\ 3\alpha_1 + 5\alpha_2 + 7\alpha_3 + 9\alpha_4 + 11\alpha_5 x_5 = 0. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса-Жордана:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 7 & 9 & 11 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Окончание примера

Получаем следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \alpha_1 - \alpha_3 - 2\alpha_4 - 3\alpha_5 x_5 = 0, \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4 + 4\alpha_5 x_5 = 0 \end{cases}$$

и общее решение исходной системы: $\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 x_5, \\ \alpha_2 = -2\alpha_3 - 3\alpha_4 - 4\alpha_5 x_5. \end{cases}$

Запишем фундаментальную систему решений:

α_1	α_2	$\dot{\alpha}_3$	$\dot{\alpha}_4$	$\dot{\alpha}_5$
1	−2	1	0	0
2	−3	0	1	0
3	−4	0	0	1

Запишем искомую систему линейных уравнений: $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_5 = 0. \end{cases}$