Тема 8: Ранг матрицы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Лекции по линейной алгебре для физиков

В этой и следующей темах рассматриваются применения теории линейных пространств для получения определенной информации о матрицах и системах линейных уравнений.

Пусть F – поле, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$ – произвольная матрица из $F^{k \times n}$.

Пусть F – поле, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$ – произвольная матрица из $F^{k \times n}$. Положим $a^{(i)} = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$ $(i = 1, \dots, k)$. Тогда $a^{(i)} \in F^n$, $(a^{(1)}, \dots, a^{(k)})$ – система строк матрицы A.

Пусть F – поле, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$ – произвольная матрица из $F^{k \times n}$. Положим $a^{(i)} = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$ $(i = 1, \dots, k)$. Тогда $a^{(i)} \in F^n$, $(a^{(1)}, \dots, a^{(k)})$ – система строк матрицы A.
Положим $a_j = (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{kj})^\top$ $(j = 1, \dots, n)$. Тогда $a_j \in F_k$, $(a_1, \dots, a_n)$ – система столбцов матрицы A.

Пусть F – поле, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$ – произвольная матрица из $F^{k\times n}$. Положим $a^{(i)} = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$ $(i = 1, \dots, k)$. Тогда $a^{(i)} \in F^n$, $(a^{(1)}, \dots, a^{(k)})$ – система строк матрицы A.
Положим $a_j = (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{kj})^\top$ $(j = 1, \dots, n)$. Тогда $a_j \in F_k$, $(a_1, \dots, a_n)$ – система столбцов матрицы A.

Определение

Рангом матрицы A *по строкам* (соотв. *по столбцам*) называется ранг (т.е. размерность линейной оболочки) системы строк (соотв. столбцов) матрицы A.

Пусть F – поле, $A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix}$ – произвольная матрица из $F^{k\times n}$. Положим $a^{(i)} = (\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \dots, \alpha_{in})$ $(i = 1, \dots, k)$. Тогда $a^{(i)} \in F^n$, $(a^{(1)}, \dots, a^{(k)})$ – система строк матрицы A.
Положим $a_j = (\alpha_{1j}, \dots, \alpha_{kj})^\top$ $(j = 1, \dots, n)$. Тогда $a_j \in F_k$, $(a_1, \dots, a_n)$ – система столбцов матрицы A.

Определение

Рангом матрицы A *по строкам* (соотв. *по столбцам*) называется ранг (т.е. размерность линейной оболочки) системы строк (соотв. столбцов) матрицы A.

Обозначения: $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A)$, $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A)$. Имеем

$$\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \dim\langle a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\rangle, \;\; \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \dim\langle a_1, \dots, a_n\rangle.$$

Можно сказать, что ранг по строкам (соотв. по столбцам) матрицы A есть максимальное число линейно независимых строк (соотв. столбцов) матрицы A.

Определение минора

Минором порядка m матрицы A называется определитель квадратной подматрицы порядка m матрицы A.

Определение минора

Минором порядка m матрицы A называется определитель квадратной подматрицы порядка m матрицы A.

Если $A = (\alpha_{ij})_{k \times n}$, то $m \le k, n$ и минор матрицы A порядка m есть

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 j_1} & \alpha_{i_1 j_2} & \dots & \alpha_{i_1 j_m} \\ \alpha_{i_2 j_1} & \alpha_{i_2 j_2} & \dots & \alpha_{i_2 j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_m j_1} & \alpha_{i_m j_2} & \dots & \alpha_{i_m j_m} \end{vmatrix},$$ где

$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le k$ и $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le n$.

Определение минора

Минором порядка m матрицы A называется определитель квадратной подматрицы порядка m матрицы A.

Если $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$, то $m \le k, n$ и минор матрицы A порядка m есть

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 j_1} & \alpha_{i_1 j_2} & \dots & \alpha_{i_1 j_m} \\ \alpha_{i_2 j_1} & \alpha_{i_2 j_2} & \dots & \alpha_{i_2 j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_m j_1} & \alpha_{i_m j_2} & \dots & \alpha_{i_m j_m} \end{vmatrix},$$ где

$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le k$ и $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le n$.

Минор 1-го порядка является элементом матрицы. У квадратной матрицы A порядка n единственным минором порядка n является ее определитель.

Определение минора

Минором порядка m матрицы A называется определитель квадратной подматрицы порядка m матрицы A.

Если $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$, то $m \le k, n$ и минор матрицы A порядка m есть

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{i_1 j_1} & \alpha_{i_1 j_2} & \dots & \alpha_{i_1 j_m} \\ \alpha_{i_2 j_1} & \alpha_{i_2 j_2} & \dots & \alpha_{i_2 j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_m j_1} & \alpha_{i_m j_2} & \dots & \alpha_{i_m j_m} \end{vmatrix},$$ где

$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le k$ и $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le n$.

Минор 1-го порядка является элементом матрицы. У квадратной матрицы A порядка n единственным минором порядка n является ее определитель.

Определение ранга матрицы по минорам

Рангом матрицы A *по минорам* называется число 0, если A – нулевая матрица и наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A, если A – ненулевая матрица.

Определение минора

Минором порядка m матрицы A называется определитель квадратной подматрицы порядка m матрицы A.

Если $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$, то $m \le k, n$ и минор матрицы A порядка m есть

$$A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_m \\ j_1 & j_2 & \dots & j_m \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_{i_1j_1} & \alpha_{i_1j_2} & \dots & \alpha_{i_1j_m} \\ \alpha_{i_2j_1} & \alpha_{i_2j_2} & \dots & \alpha_{i_2j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i_mj_1} & \alpha_{i_mj_2} & \dots & \alpha_{i_mj_m} \end{vmatrix},$$ где

$1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_m \le k$ и $1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le n$.

Минор 1-го порядка является элементом матрицы. У квадратной матрицы A порядка n единственным минором порядка n является ее определитель.

Определение ранга матрицы по минорам

Рангом матрицы A *по минорам* называется число 0, если A – нулевая матрица и наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы A, если A – ненулевая матрица.

Обозначение: $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ найти ранги по строкам, по столбцам и по минорам.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ найти ранги по строкам, по столбцам и по минорам.

Заметим, что $a^{(2)} = \frac{1}{2}(a^{(1)} + a^{(3)})$. Так как строки $a^{(1)}, a^{(3)}$ линейно независимы, имеем $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = 2$. По этой же причине все миноры 3-го порядка равны 0. Поскольку $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$, заключаем, что $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = 2$.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ найти ранги по строкам, по столбцам и по минорам.

Заметим, что $a^{(2)} = \frac{1}{2}(a^{(1)} + a^{(3)})$. Так как строки $a^{(1)}, a^{(3)}$ линейно независимы, имеем $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = 2$. По этой же причине все миноры 3-го порядка равны 0. Поскольку $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$, заключаем, что $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = 2$. Чтобы найти ранг матрицы A по столбцам, проведем элементарные преобразования ее строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ найти ранги по строкам, по столбцам и по минорам.

Заметим, что $a^{(2)} = \frac{1}{2}(a^{(1)} + a^{(3)})$. Так как строки $a^{(1)}, a^{(3)}$ линейно независимы, имеем $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = 2$. По этой же причине все миноры 3-го порядка равны 0. Поскольку $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$, заключаем, что $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = 2$. Чтобы найти ранг матрицы A по столбцам, проведем элементарные преобразования ее строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $a_3 = -a_1 + 2a_2$, $a_4 = -2a_1 + 3a_2$ и столбцы a_1, a_2 линейно независимы. Таким образом, $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = 2$.

Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ найти ранги по строкам, по столбцам и по минорам.

Заметим, что $a^{(2)} = \frac{1}{2}(a^{(1)} + a^{(3)})$. Так как строки $a^{(1)}, a^{(3)}$ линейно независимы, имеем $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = 2$. По этой же причине все миноры 3-го порядка равны 0. Поскольку $A\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$, заключаем, что $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = 2$. Чтобы найти ранг матрицы A по столбцам, проведем элементарные преобразования ее строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -4 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $a_3 = -a_1 + 2a_2$, $a_4 = -2a_1 + 3a_2$ и столбцы a_1, a_2 линейно независимы. Таким образом, $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = 2$.

Для рассматриваемой матрицы A имеют место равенства

$$\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A).$$

Теорема следующего слайда показывает, что это не случайное совпадение.

Теорема

Для любой матрицы $A \in F^{k \times n}$ имеют место равенства

$$\mathsf{r}_{\text{стр}}(A) = \mathsf{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathsf{r}_{\text{мин}}(A).$$

Теорема

Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеют место равенства
$$\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A).$$

Доказательство этого утверждения (см. сл.10) опирается на 4 леммы. С помощью этих лемм мы докажем, что $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$ и $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

Теорема

Для любой матрицы $A \in F^{k \times n}$ имеют место равенства

$$\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A).$$

Доказательство этого утверждения (см. сл.10) опирается на 4 леммы. С помощью этих лемм мы докажем, что $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$ и $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

Лемма 1

Если матрица A' получается из матрицы A с помощью элементарных преобразований строк, то $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стр}}(A')$ и $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A')$.

Теорема

Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеют место равенства

$$\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A).$$

Доказательство этого утверждения (см. сл.10) опирается на 4 леммы. С помощью этих лемм мы докажем, что $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$ и $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

Лемма 1

Если матрица A' получается из матрицы A с помощью элементарных преобразований строк, то $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стр}}(A')$ и $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A')$.

$\Downarrow$ Достаточно проверить утверждение леммы для одного элементарного преобразования. Если система векторов $(a^{'(1)}, \ldots, a^{'(k)})$ получается из системы $(a^{(1)}, \ldots, a^{(k)})$ с помощью одного элементарного преобразования, то очевидно, что $\langle a^{'(1)}, \ldots, a^{'(k)}\rangle = \langle a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}\rangle$, поэтому $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стр}}(A')$.

Теорема

Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеют место равенства

$$\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A).$$

Доказательство этого утверждения (см. сл.10) опирается на 4 леммы. С помощью этих лемм мы докажем, что $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$ и $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

Лемма 1

Если матрица A' получается из матрицы A с помощью элементарных преобразований строк, то $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стр}}(A')$ и $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A')$.

$\Downarrow$ Достаточно проверить утверждение леммы для одного элементарного преобразования. Если система векторов $(a^{'(1)}, \dots, a^{'(k)})$ получается из системы $(a^{(1)}, \dots, a^{(k)})$ с помощью одного элементарного преобразования, то очевидно, что $\langle a^{'(1)}, \dots, a^{'(k)}\rangle = \langle a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\rangle$, поэтому $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стр}}(A')$.
Докажем, что $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A')$. Если матрица A нулевая, то и матрица A' нулевая, и их ранги по минорам равны. Пусть матрица A ненулевая.

Продолжение доказательства леммы 1

Если матрица A' получается из A с помощью перестановки двух строк, то это преобразование можно выполнить при помощи прибавления к одной строки другой и умножения строки на -1, поэтому мы рассмотрим только следующие два элементарные преобразования.

Если матрица A' получается из A с помощью перестановки двух строк, то это преобразование можно выполнить при помощи прибавления к одной строки другой и умножения строки на -1, поэтому мы рассмотрим только следующие два элементарные преобразования.
Если матрица A' получается из A умножением одной строки на ненулевой скаляр λ, то миноры этих матриц $A\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ и $A'\begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_m \\ j_1 & \dots & j_m \end{pmatrix}$ либо совпадают, либо отличаются множителем λ, поэтому $\mathsf{r}_{\text{мин}}(A) = \mathsf{r}_{\text{мин}}(A')$.

Если матрица A' получается из A с помощью перестановки двух строк, то это преобразование можно выполнить при помощи прибавления к одной строки другой и умножения строки на -1, поэтому мы рассмотрим только следующие два элементарные преобразования.
Если матрица A' получается из A умножением одной строки на ненулевой скаляр λ, то миноры этих матриц $A\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j_m \end{pmatrix}$ и $A'\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j_m \end{pmatrix}$ либо совпадают, либо отличаются множителем λ, поэтому $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A')$.
Пусть матрица A' получается из A прибавлением к i-й строке ℓ-й строки, умноженной на скаляр λ. Тогда для миноров $A\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j_m \end{pmatrix}$ и $A'\begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j_m \end{pmatrix}$ этих матриц может выполняться одно и только одно из условий:

Окончание доказательства леммы 1

1. если $i \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$ или $i, \ell \in \{i_1, \ldots, i_m\}$, то миноры совпадают;

1. если $i \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$ или $i, \ell \in \{i_1, \ldots, i_m\}$, то миноры совпадают;
2. если $i \in \{i_1, \ldots, i_m\}$ и $\ell \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$, то минор $A' \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j & \ldots & j_m \end{pmatrix}$ равен сумме $A \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j & \ldots & j_m \end{pmatrix} + \lambda A \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & \ell & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j & \ldots & j_m \end{pmatrix}$, которая является линейной комбинацией миноров матрицы A порядка m.

1. если $i \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$ или $i, \ell \in \{i_1, \ldots, i_m\}$, то миноры совпадают;
2. если $i \in \{i_1, \ldots, i_m\}$ и $\ell \notin \{i_1, \ldots, i_m\}$, то минор $A' \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j & \ldots & j_m \end{pmatrix}$ равен сумме $A \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & i & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j & \ldots & j_m \end{pmatrix} + \lambda A \begin{pmatrix} i_1 & \ldots & \ell & \ldots & i_m \\ j_1 & \ldots & j & \ldots & j_m \end{pmatrix}$, которая является линейной комбинацией миноров матрицы A порядка m.

Отсюда следует, что $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A') \leq \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$, так как если все миноры порядка m матрицы A равны 0, то и все миноры порядка m матрицы A' равны 0. Поскольку матрица A может быть получена из матрицы A' с помощью прибавления к i-й строке ℓ-й строки, умноженной на скаляр $-\lambda$, имеем $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) \leq \mathrm{r}_{\text{мин}}(A')$. Следовательно, $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A') = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$. Лемма доказана.$\Uparrow$

Элементарные преобразования столбцов определяются так же, как и для строк (см. сл.26 т.1).

Элементарные преобразования столбцов определяются так же, как и для строк (см. сл.26 т.1). Аналогично лемме 1 доказывается следующая

Лемма 2

Если матрица A' получается из матрицы A с помощью элементарных преобразований столбцов, то $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A')$ и $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A')$.

Элементарные преобразования столбцов определяются так же, как и для строк (см. сл.26 т.1). Аналогично лемме 1 доказывается следующая

Лемма 2

Если матрица A' получается из матрицы A с помощью элементарных преобразований столбцов, то $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A')$ и $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A')$.

Аналогично ступенчатой по строкам матрице (см. сл.27 т.1) определяется *ступенчатая по столбцам матрица*. Точно так же, как теорема сл.30 темы 1, доказывается следующее

Предложение

Пусть F – поле. Любая матрица $A \in F^{k\times n}$ с помощью элементарных преобразований столбцов может быть приведена к ступенчатой по столбцам матрице.

Лемма 3

Пусть F – поле. Для любой ступенчатой по строкам матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

Лемма 3

Пусть F – поле. Для любой ступенчатой по строкам матрицы $A \in F^{k \times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

$\Downarrow$ Пусть $A = (\alpha_{ij})_{k \times n}$. Если матрица A нулевая, то доказывать нечего. Пусть $A \neq O$. Обозначим через r номер последней ненулевой строки матрицы A.

Лемма 3

Пусть F – поле. Для любой ступенчатой по строкам матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

$\Downarrow$ Пусть $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$. Если матрица A нулевая, то доказывать нечего. Пусть $A \neq O$. Обозначим через r номер последней ненулевой строки матрицы A. Как и в доказательстве предложения сл.17 т.5, для каждого $i = 1, \ldots, r$ обозначим через j_i наименьший индекс, для которого $\alpha_{ij_i} \neq 0$. Тогда при $1 < i \leq r$ и $1 \leq j < j_i$ имеем $\alpha_{ij} = 0$. Кроме того, $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$.

Лемма 3

Пусть F – поле. Для любой ступенчатой по строкам матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

$\Downarrow$ Пусть $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$. Если матрица A нулевая, то доказывать нечего. Пусть $A \neq O$. Обозначим через r номер последней ненулевой строки матрицы A. Как и в доказательстве предложения сл.17 т.5, для каждого $i = 1, \ldots, r$ обозначим через j_i наименьший индекс, для которого $\alpha_{ij_i} \neq 0$. Тогда при $1 < i \leq r$ и $1 \leq j < j_i$ имеем $\alpha_{ij} = 0$. Кроме того, $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. Возьмем минор в строках $1, \ldots, r$ и столбцах $j_1, \ldots, j_r$. Это определитель верхнетреугольной матрицы с ненулевыми элементами на главной диагонали, поэтому он отличен от нуля. Миноры более высоких порядков или содержат нулевую строку и потому равны нулю, или не существуют (если $r = k$). Поэтому $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = r$.

Лемма 3

Пусть F – поле. Для любой ступенчатой по строкам матрицы $A \in F^{k \times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

$\Downarrow$ Пусть $A = (\alpha_{ij})_{k \times n}$. Если матрица A нулевая, то доказывать нечего. Пусть $A \neq O$. Обозначим через r номер последней ненулевой строки матрицы A. Как и в доказательстве предложения сл.17 т.5, для каждого $i = 1, \ldots, r$ обозначим через j_i наименьший индекс, для которого $\alpha_{ij_i} \neq 0$. Тогда при $1 < i \leq r$ и $1 \leq j < j_i$ имеем $\alpha_{ij} = 0$. Кроме того, $j_1 < j_2 < \ldots < j_r$. Возьмем минор в строках $1, \ldots, r$ и столбцах $j_1, \ldots, j_r$. Это определитель верхнетреугольной матрицы с ненулевыми элементами на главной диагонали, поэтому он отличен от нуля. Миноры более высоких порядков или содержат нулевую строку и потому равны нулю, или не существуют (если $r = k$). Поэтому $\mathrm{r}_{\text{мин}}(A) = r$.
Так как ненулевые строки матрицы A в силу предложения сл.17 т.5 линейно независимы, их система образует базис пространства строк матрицы A. Поэтому $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = r$. Лемма доказана. $\Uparrow$

Аналогично лемме 3 доказывается

Лемма 4

Пусть F – поле. Для любой ступенчатой по столбцам матрицы $A \in F^{k \times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

Аналогично лемме 3 доказывается

Лемма 4

Пусть F – поле. Для любой ступенчатой по столбцам матрицы $A \in F^{k \times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

Теперь докажем теорему о ранге матрицы. Пусть $A \in F^{k \times n}$ – произвольная матрица. Приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому по строкам виду A'.

Аналогично лемме 3 доказывается

Лемма 4

Пусть F – поле. Для любой ступенчатой по столбцам матрицы $A \in F^{k \times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

Теперь докажем теорему о ранге матрицы. Пусть $A \in F^{k \times n}$ – произвольная матрица. Приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому по строкам виду A'. На основании лемм 1 и 3 заключаем, что $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стр}}(A') = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A') = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$, т.е. $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$. Используя предложение сл.8, приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований столбцов к ступенчатому по столбцам виду A''.

Аналогично лемме 3 доказывается

Лемма 4

Пусть F – поле. Для любой ступенчатой по столбцам матрицы $A \in F^{k \times n}$ имеет место равенство $\text{r}_{\text{стлб}}(A) = \text{r}_{\text{мин}}(A)$.

Теперь докажем теорему о ранге матрицы. Пусть $A \in F^{k \times n}$ – произвольная матрица. Приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому по строкам виду A'. На основании лемм 1 и 3 заключаем, что $\text{r}_{\text{стр}}(A) = \text{r}_{\text{стр}}(A') = \text{r}_{\text{мин}}(A') = \text{r}_{\text{мин}}(A)$, т.е. $\text{r}_{\text{стр}}(A) = \text{r}_{\text{мин}}(A)$. Используя предложение сл.8, приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований столбцов к ступенчатому по столбцам виду A''. На основании лемм 2 и 4 заключаем, что $\text{r}_{\text{стлб}}(A) = \text{r}_{\text{стлб}}(A'') = \text{r}_{\text{мин}}(A'') = \text{r}_{\text{мин}}(A)$, т.е. $\text{r}_{\text{стлб}}(A) = \text{r}_{\text{мин}}(A)$. Таким образом, теорема доказана.

Аналогично лемме 3 доказывается

Лемма 4

Пусть F – поле. Для любой ступенчатой по столбцам матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$.

Теперь докажем теорему о ранге матрицы. Пусть $A \in F^{k\times n}$ – произвольная матрица. Приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований строк к ступенчатому по строкам виду A'. На основании лемм 1 и 3 заключаем, что $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стр}}(A') = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A') = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$, т.е. $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$. Используя предложение сл.8, приведем матрицу A с помощью элементарных преобразований столбцов к ступенчатому по столбцам виду A''. На основании лемм 2 и 4 заключаем, что $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A'') = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A'') = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$, т.е. $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$. Таким образом, теорема доказана.

Определение ранга матрицы

Рангом матрицы $A \in F^{k\times n}$ называется число $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A) = \mathrm{r}_{\text{мин}}(A)$, обозначаемое через $\mathrm{r}(A)$.

Первое следствие вытекает из лемм 1 и 2.

Следствие 1

Элементарные преобразования строк или столбцов матрицы не изменяют ранга матрицы.

Первое следствие вытекает из лемм 1 и 2.

Следствие 1

Элементарные преобразования строк или столбцов матрицы не изменяют ранга матрицы.

Второе следствие получается из лемм 3 и 4.

Следствие 2

Ранг ступенчатой по строкам (соотв. по столбцам) матрицы равен количеству ненулевых строк (соотв. столбцов) этой матрицы.

Первое следствие вытекает из лемм 1 и 2.

Следствие 1

Элементарные преобразования строк или столбцов матрицы не изменяют ранга матрицы.

Второе следствие получается из лемм 3 и 4.

Следствие 2

Ранг ступенчатой по строкам (соотв. по столбцам) матрицы равен количеству ненулевых строк (соотв. столбцов) этой матрицы.

Из определения ранга по минорам получаем

Следствие 3

Ранг квадратной матрицы равен ее порядку тогда и только тогда, когда эта матрица невырожденная.

Первое следствие вытекает из лемм 1 и 2.

Следствие 1

Элементарные преобразования строк или столбцов матрицы не изменяют ранга матрицы.

Второе следствие получается из лемм 3 и 4.

Следствие 2

Ранг ступенчатой по строкам (соотв. по столбцам) матрицы равен количеству ненулевых строк (соотв. столбцов) этой матрицы.

Из определения ранга по минорам получаем

Следствие 3

Ранг квадратной матрицы равен ее порядку тогда и только тогда, когда эта матрица невырожденная.

В качестве последнего следствия отметим теорему сл.13 т.6.

Из следствий 1 и 2 получается следующий алгоритм.

Чтобы определить ранг ненулевой матрицы A, следует с помощью элементарных преобразований строк или столбцов привести ее к ступенчатому по строкам виду и подсчитать количество ненулевых строк полученной матрицы. Это и будет ранг матрицы A.

Из следствий 1 и 2 получается следующий алгоритм.

Чтобы определить ранг ненулевой матрицы A, следует с помощью элементарных преобразований строк или столбцов привести ее к ступенчатому по строкам виду и подсчитать количество ненулевых строк полученной матрицы. Это и будет ранг матрицы A.

Пример сл.5 показывает, как найти ранг согласно этому алгоритму. Нужно посмотреть часть, где производятся элементарные преобразования строк матрицы A.

Пусть F – поле.

Теорема

1. Для любых матриц $A, B \in F^{k \times n}$ имеет место $\mathsf{r}(A+B) \leq \mathsf{r}(A) + \mathsf{r}(B)$.

Пусть F – поле.

Теорема

1. Для любых матриц $A, B \in F^{k\times n}$ имеет место $\mathrm{r}(A+B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$.
2. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ и любого скаляра $\lambda \in F$ имеет место равенство $\mathrm{r}(\lambda A) = \begin{cases} \mathrm{r}(A), & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$.

Пусть F – поле.

Теорема

1. Для любых матриц $A, B \in F^{k\times n}$ имеет место $\mathrm{r}(A+B) \le \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$.
2. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ и любого скаляра $\lambda \in F$ имеет место равенство $\mathrm{r}(\lambda A) = \begin{cases} \mathrm{r}(A), & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$.
3. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^\top)$.

Пусть F – поле.

Теорема

1. Для любых матриц $A, B \in F^{k\times n}$ имеет место $\mathrm{r}(A+B) \le \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$.
2. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ и любого скаляра $\lambda \in F$ имеет место равенство $\mathrm{r}(\lambda A) = \begin{cases} \mathrm{r}(A), & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$.
3. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^\top)$.
4. Для любых матриц $A \in F^{k\times n}$, $B \in F^{n\times p}$ имеет место $\mathrm{r}(A\cdot B) \le \mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)$.

Свойства ранга матрицы

Пусть F – поле.

Теорема

1. Для любых матриц $A, B \in F^{k\times n}$ имеет место $\mathrm{r}(A+B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$.
2. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ и любого скаляра $\lambda \in F$ имеет место равенство $\mathrm{r}(\lambda A) = \begin{cases} \mathrm{r}(A), & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$.
3. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^\top)$.
4. Для любых матриц $A \in F^{k\times n}$, $B \in F^{n\times p}$ имеет место $\mathrm{r}(A \cdot B) \leq \mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)$.
5. Для любой невырожденной матрицы $A \in F^{n\times n}$ и любых матриц $B \in F^{n\times k}$, $C \in F^{k\times n}$ имеют место равенства $\mathrm{r}(A \cdot B) = \mathrm{r}(B)$, $\mathrm{r}(C \cdot A) = \mathrm{r}(C)$.

Пусть F – поле.

Теорема

1. Для любых матриц $A, B \in F^{k\times n}$ имеет место $\mathsf{r}(A+B) \leq \mathsf{r}(A) + \mathsf{r}(B)$.
2. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ и любого скаляра $\lambda \in F$ имеет место равенство $\mathsf{r}(\lambda A) = \begin{cases} \mathsf{r}(A), \text{ если } \lambda \neq 0, \\ 0, \text{ если } \lambda = 0. \end{cases}$.
3. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеет место равенство $\mathsf{r}(A) = \mathsf{r}(A^\top)$.
4. Для любых матриц $A \in F^{k\times n}$, $B \in F^{n\times p}$ имеет место $\mathsf{r}(A \cdot B) \leq \mathsf{r}(A), \mathsf{r}(B)$.
5. Для любой невырожденной матрицы $A \in F^{n\times n}$ и любых матриц $B \in F^{n\times k}$, $C \in F^{k\times n}$ имеют место равенства $\mathsf{r}(A \cdot B) = \mathsf{r}(B)$, $\mathsf{r}(C \cdot A) = \mathsf{r}(C)$.

$\Downarrow$ Докажем утверждение 1. Имеем $\mathsf{r}(A+B) = \mathsf{r}_{\text{стр}}(A+B) =$
$= \dim\langle a^{(1)} + b^{(1)}, \ldots, a^{(k)} + b^{(k)}\rangle$.

Пусть F – поле.

Теорема

1. Для любых матриц $A, B \in F^{k\times n}$ имеет место $\mathsf{r}(A+B) \leq \mathsf{r}(A) + \mathsf{r}(B)$.
2. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ и любого скаляра $\lambda \in F$ имеет место равенство $\mathsf{r}(\lambda A) = \begin{cases} \mathsf{r}(A), & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$.
3. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеет место равенство $\mathsf{r}(A) = \mathsf{r}(A^\top)$.
4. Для любых матриц $A \in F^{k\times n}$, $B \in F^{n\times p}$ имеет место $\mathsf{r}(A\cdot B) \leq \mathsf{r}(A), \mathsf{r}(B)$.
5. Для любой невырожденной матрицы $A \in F^{n\times n}$ и любых матриц $B \in F^{n\times k}$, $C \in F^{k\times n}$ имеют место равенства $\mathsf{r}(A\cdot B) = \mathsf{r}(B)$, $\mathsf{r}(C\cdot A) = \mathsf{r}(C)$.

$\Downarrow$ Докажем утверждение 1. Имеем $\mathsf{r}(A+B) = \mathsf{r}_{\text{стр}}(A+B) = \dim\langle a^{(1)} + b^{(1)}, \dots, a^{(k)} + b^{(k)}\rangle$. По определению суммы подпространств получаем $\langle a^{(1)} + b^{(1)}, \dots, a^{(k)} + b^{(k)}\rangle \subseteq \langle a^{(1)}, \dots, a^{(k)}\rangle + \langle b^{(1)}, \dots, b^{(k)}\rangle$.

Пусть F – поле.

Теорема

1. Для любых матриц $A, B \in F^{k\times n}$ имеет место $\mathrm{r}(A+B) \leq \mathrm{r}(A) + \mathrm{r}(B)$.
2. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ и любого скаляра $\lambda \in F$ имеет место равенство $\mathrm{r}(\lambda A) = \begin{cases} \mathrm{r}(A), & \text{если } \lambda \neq 0, \\ 0, & \text{если } \lambda = 0. \end{cases}$
3. Для любой матрицы $A \in F^{k\times n}$ имеет место равенство $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^\top)$.
4. Для любых матриц $A \in F^{k\times n}$, $B \in F^{n\times p}$ имеет место $\mathrm{r}(A \cdot B) \leq \mathrm{r}(A), \mathrm{r}(B)$.
5. Для любой невырожденной матрицы $A \in F^{n\times n}$ и любых матриц $B \in F^{n\times k}$, $C \in F^{k\times n}$ имеют место равенства $\mathrm{r}(A \cdot B) = \mathrm{r}(B)$, $\mathrm{r}(C \cdot A) = \mathrm{r}(C)$.

$\Downarrow$ Докажем утверждение 1. Имеем $\mathrm{r}(A+B) = \mathrm{r}_{\text{стр}}(A+B) =$
$= \dim\langle a^{(1)} + b^{(1)}, \ldots, a^{(k)} + b^{(k)}\rangle$. По определению суммы подпространств получаем $\langle a^{(1)} + b^{(1)}, \ldots, a^{(k)} + b^{(k)}\rangle \subseteq \langle a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}\rangle + \langle b^{(1)}, \ldots, b^{(k)}\rangle$.
Зна- чит,
$\dim\langle a^{(1)} + b^{(1)}, \ldots, a^{(k)} + b^{(k)}\rangle \leq \dim(\langle a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}\rangle + \langle b^{(1)}, \ldots, b^{(k)}\rangle)$,
откуда по формуле сл.12 т.7 следует
$\dim\langle a^{(1)} + b^{(1)}, \ldots, a^{(k)} + b^{(k)}\rangle \leq \dim\langle a^{(1)}, \ldots, a^{(k)}\rangle + \dim\langle b^{(1)}, \ldots, b^{(k)}\rangle$, т.е.

Окончание доказательства теоремы сл.13

Утверждение 2 следует из определения ранга матрицы по минорам: при умножении матрицы на скаляр λ все ее миноры порядка m умножаются на λ^m.

Окончание доказательства теоремы сл.13

Утверждение 2 следует из определения ранга матрицы по минорам: при умножении матрицы на скаляр λ все ее миноры порядка m умножаются на λ^m. Утверждение 3 следует из того, что $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A^\top)$.

Утверждение 2 следует из определения ранга матрицы по минорам: при умножении матрицы на скаляр λ все ее миноры порядка m умножаются на λ^m. Утверждение 3 следует из того, что $\mathsf{r}_{\mathsf{стр}}(A) = \mathsf{r}_{\mathsf{стлб}}(A^\top)$.
Для доказательства утверждения 4 рассмотрим матрицы $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$ и $B = (\beta_{ij})_{n\times p}$.

Утверждение 2 следует из определения ранга матрицы по минорам: при умножении матрицы на скаляр λ все ее миноры порядка m умножаются на λ^m. Утверждение 3 следует из того, что $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A^\top)$.

Для доказательства утверждения 4 рассмотрим матрицы $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$ и $B = (\beta_{ij})_{n\times p}$. Запишем произведение $C = A \cdot B$:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{np} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{n1} & \alpha_{11}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{11}\beta_{1p} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{np} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{n1} & \alpha_{21}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{21}\beta_{1p} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{np} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{kn}\beta_{n1} & \alpha_{k1}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{kn}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{k1}\beta_{1p} + \ldots + \alpha_{kn}\beta_{np} \end{pmatrix}$$

Утверждение 2 следует из определения ранга матрицы по минорам: при умножении матрицы на скаляр λ все ее миноры порядка m умножаются на λ^m. Утверждение 3 следует из того, что $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A^\top)$.
Для доказательства утверждения 4 рассмотрим матрицы $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$ и $B = (\beta_{ij})_{n\times p}$. Запишем произведение $C = A \cdot B$:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{np} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{n1} & \alpha_{11}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{11}\beta_{1p} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{np} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{n1} & \alpha_{21}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{21}\beta_{1p} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{np} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{kn}\beta_{n1} & \alpha_{k1}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{kn}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{k1}\beta_{1p} + \ldots + \alpha_{kn}\beta_{np} \end{pmatrix}$$

Заметим, что i-я строка матрицы C равна линейной комбинации строк матрицы B: $c^{(i)} = \alpha_{i1}b^{(1)} + \ldots + \alpha_{in}b^{(n)}$, поэтому $\mathrm{r}_{\text{стр}}(C) \leq \mathrm{r}_{\text{стр}}(B)$.
Кроме того, j-й столбец матрицы C равен линейной комбинации столбцов матрицы A: $c_j = \beta_{1j}a_1 + \ldots + \beta_{nj}a_n$, поэтому $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(C) \leq \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A)$.

Утверждение 2 следует из определения ранга матрицы по минорам: при умножении матрицы на скаляр λ все ее миноры порядка m умножаются на λ^m. Утверждение 3 следует из того, что $\mathrm{r}_{\text{стр}}(A) = \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A^\top)$.
Для доказательства утверждения 4 рассмотрим матрицы $A = (\alpha_{ij})_{k\times n}$ и $B = (\beta_{ij})_{n\times p}$. Запишем произведение $C = A \cdot B$:

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1} & \alpha_{k2} & \dots & \alpha_{kn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \dots & \beta_{1p} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \dots & \beta_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{np} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{n1} & \alpha_{11}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{11}\beta_{1p} + \ldots + \alpha_{1n}\beta_{np} \\ \alpha_{21}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{n1} & \alpha_{21}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{21}\beta_{1p} + \ldots + \alpha_{2n}\beta_{np} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{k1}\beta_{11} + \ldots + \alpha_{kn}\beta_{n1} & \alpha_{k1}\beta_{12} + \ldots + \alpha_{kn}\beta_{n2} & \dots & \alpha_{k1}\beta_{1p} + \ldots + \alpha_{kn}\beta_{np} \end{pmatrix}$$

Заметим, что i-я строка матрицы C равна линейной комбинации строк матрицы B: $c^{(i)} = \alpha_{i1}b^{(1)} + \ldots + \alpha_{in}b^{(n)}$, поэтому $\mathrm{r}_{\text{стр}}(C) \leq \mathrm{r}_{\text{стр}}(B)$.
Кроме того, j-й столбец матрицы C равен линейной комбинации столбцов матрицы A: $c_j = \beta_{1j}a_1 + \ldots + \beta_{nj}a_n$, поэтому $\mathrm{r}_{\text{стлб}}(C) \leq \mathrm{r}_{\text{стлб}}(A)$.
Докажем утверждение 5. Согласно утверждению 4 имеем $\mathrm{r}(A\cdot B) \leq \mathrm{r}(B)$.
Так как матрица A невырожденная, согласно теореме сл.36 т.2 она обратимая и $B = A^{-1}\cdot(A\cdot B)$, поэтому по утверждению 4 $\mathrm{r}(B) \leq \mathrm{r}(A\cdot B)$.
Значит, $\mathrm{r}(A\cdot B) = \mathrm{r}(B)$. Аналогично доказывается, что $\mathrm{r}(C\cdot A) = \mathrm{r}(A)$.
Теорема доказана. $\Uparrow$