Тема 6: Базис и размерность линейного пространства

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Лекции по линейной алгебре для физиков

Определение

Линейное пространство V над полем F называется *конечномерным*, если $V = \langle a_1, \dots, a_k \rangle$ для некоторой системы векторов $a_1, \dots, a_k \in V$. При этом говорят, что линейное пространство V *порождается* системой векторов $(a_1, \dots, a_k)$.

Таким образом, каждый вектор конечномерного линейного пространства V является линейной комбинацией векторов $a_1, \dots, a_k$.

Очевидными примерами конечномерных пространств являются:

1. нулевое пространство $\{0_V\}$;
2. пространства геометрических векторов на прямой V_ℓ, на плоскости V_π, всех геометрических векторов V_g;
3. пространства матриц $F^{k \times n}$.

Примеры пространств, не являющихся конечномерными, будут приведены ниже (сл.8).

Определение базиса

Базисом линейного пространства V называется система векторов $B = (b_1, \ldots, b_n)$ из V такая что

1. B упорядочена, т.е. при перестановке векторов в системе мы получим другой базис;
2. B линейно независима;
3. B порождает V, т.е. $V = \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$.

Из определения базиса следует, что линейное пространство, имеющее базис, является конечномерным. Из предложения сл.10 т.5 вытекает, что любое ненулевое конечномерное пространство имеет базис. Утверждение сл.9 т.5 влечет за собой, что любые два базиса одного и того же ненулевого линейного пространства состоят из одинакового числа векторов. Это число не зависит от выбора базиса и потому является характеристикой линейного пространства.

Определение размерности

Размерностью конечномерного линейного пространства V называется количество векторов в базисе V, если $V \neq \{0_V\}$, и 0, если $V = \{0_V\}$.

Размерность линейного пространства V обозначается через $\dim V$.

Примеры

Пространства геометрических векторов

Базисы пространств V_ℓ, V_π, V_g в смысле определения сл.3 являются базисами на прямой, на плоскости и в пространстве в смысле определений из аналитической геометрии. Поэтому $\dim V_\ell = 1$, $\dim V_\pi = 2$, $\dim V_g = 3$.

Пространства матриц

Базисом пространства $F^{k\times n}$ является система матричных единиц E_{ij} размеров $k \times n$ (такая матрица имеет размеры $k \times n$, все элементы которой, кроме $a_{ij} = 1$, равны 0). Поэтому $\dim F^{k\times n} = k \cdot n$.

Пространства строк

Базисом пространства строк F^n является система $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$,...,$e_n = (0, 0, \dots, 1)$ из строк единичной матрицы порядка n. Этот базис называется *стандартным базисом* пространства строк F^n. Имеем $\dim F^n = n$.

Пространства многочленов ограниченной степени

Базисом пространства VP_n всех многочленов степени не выше n является система $(1, x, \dots, x^n)$, поэтому $\dim VP_n = n + 1$.

Примеры

Некоторые множества векторов можно рассматривать как линейные пространства над различными полями. Например, если V – линейное пространство над полем $\mathbb{C}$, то V можно рассматривать и как линейное пространство над полем $\mathbb{R}$. Поэтому имеет смысл сделать

Уточнение обозначения

Размерность линейного пространства V над полем F обозначим $\dim_F V$.

Размерность поля комплексных чисел

Базисом линейного пространства $\mathbb{C}$ над $\mathbb{R}$ является система $(1, i)$, поэтому $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.

Размерность поля над собой

Любое поле F является линейным пространством над самим собой с базисом 1, поэтому $\dim_F F = 1$.

Теорема

Пусть V – линейное пространство размерности n над полем F. Тогда

1. любая система из m векторов пространства V при $m > n$ является линейно зависимой;
2. при $n > 0$ любая линейно независимая система из n векторов является базисом пространства V;
3. при $n > 0$ если $V = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, то $(a_1, \dots, a_n)$ является базисом V;
4. при $n > 1$ любая линейно независимая система из k векторов $(k < n)$ может быть дополнена до базиса V.

$\Downarrow$ Если V – нулевое пространство, то любая система его векторов содержит 0_V и потому линейно зависима (сл.2 т.5). Если V – ненулевое, то оно имеет базис из n векторов. Любая система векторов из V линейно выражается через его базис, поэтому утверждение 1 следует из свойства 4 (сл.8 т.5).

Если $(a_1, \dots, a_n)$ – линейно независимая система, то для любого $x \in V$ в силу утверждения 1 система $(a_1, \dots, a_n, x)$ будет линейно зависима, и из свойства 3 (сл.7 т.5) вытекает, что $(a_1, \dots, a_n) \vdash x$. Таким образом, $V = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$, и для системы $(a_1, \dots, a_n)$ выполняются все условия определения базиса.

Окончание доказательства

Пусть $V = \langle a_1, \dots, a_n \rangle$. Рассмотрим систему $(a_1, \dots, a_n)$. Чтобы доказать, что это базис, достаточно установить ее линейную независимость. Если система $(a_1, \dots, a_n)$ линейно зависима, то V порождается системой менее чем из n векторов, и потому все системы из n векторов в V линейно зависимы, что противоречит равенству $\dim V = n$.
Пусть $k < n$ и $(a_1, \dots, a_k)$ – линейно независимая система векторов. Возьмем произвольный базис $(b_1, \dots, b_n)$ пространства V и рассмотрим систему $(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n)$. Очевидно, что $V = \langle a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_n \rangle$. В силу утверждения 1 полученная система линейно зависима. Выберем в ней вектор, который линейно выражается через предыдущие вектора. Такой вектор существует и он принадлежит базису, так как в системе $(a_1, \dots, a_k)$ ни один вектор не выражается через предыдущие. Исключив этот вектор, получим систему из $k + n - 1$ вектора, которая порождает V. Если $k = 1$, то эта система является базисом в силу утверждения 3. При $k > 1$ полученная система будет линейно зависима, и к ней можно применить аналогичные рассуждения. Пока будут получаться системы, содержащие более n векторов, из них можно будет исключать вектор, который линейно выражается через предыдущие вектора, и полученные системы будут порождать V. Когда получится система из n векторов, она будет базисом V, и ее первые k векторов – $a_1, \dots, a_k$.
Теорема доказана. $\Uparrow$

Следствие

Если линейное пространство имеет линейно независимые системы, содержащие n векторов для любого натурального числа n, то это пространство не является конечномерным.

Линейное пространство, не являющееся конечномерным, называется *бесконечномерным*.

Линейное пространство $F[x]$ всех многочленов над полем F является бесконечномерным.

Ясно, что система многочленов $1, x, \ldots, x^{n-1}$ линейно независима и она состоит из n векторов для любого натурального числа n.

Пусть V – линейное пространство, $B = (b_1, \dots, b_n)$ – его базис. Для вектора $x \in V$ и некоторых скаляров $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in F$ имеем

$$x = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2 + \ldots + \xi_n b_n. \tag{1}$$

Покажем, что скаляры $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ определяются по вектору x однозначно. Пусть $x = \varsigma_1 b_1 + \varsigma_2 b_2 + \ldots + \varsigma_n b_n$ для некоторых скаляров $\varsigma_1, \varsigma_2, \dots, \varsigma_n \in F$. Вычитая это равенство из равенства (1), получаем $0_V = (\xi_1 - \varsigma_1)b_1 + (\xi_2 - \varsigma_2)b_2 + \ldots + (\xi_n - \varsigma_n)b_n$. Так как система B линейно независима, заключаем, что $\xi_i - \varsigma_i = 0$, т.е. $\xi_i = \varsigma_i$ для $i = 1, 2, \dots, n$.

Определение

Скаляры $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ называются *координатами* вектора x в базисе B.

Записывать координаты будем в виде столбца и обозначать через $[x]_B = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^\top$. Будем использовать матричную запись равенства (1) (см. сл.9 т.4):

$$x = B \cdot [x]_B. \tag{2}$$

Для любой конечной системы векторов $A = (a_1, \dots, a_k)$ запишем $A = B \cdot \Gamma$, где $\Gamma = (\gamma_{ij})_{n \times k}$ — матрица, столбцами которой являются столбцы координат векторов $a_1, \dots, a_k$, записанные по порядку. Если $B \cdot \Gamma = B \cdot \Delta$ для некоторой матрицы Δ, то $\Gamma = \Delta$ в силу единственности координат.

Пусть $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис линейного пространства V над полем F. Тогда для любых $x, y \in V$ и $\alpha \in F$ справедливы равенства

$$[x+y]_B = [x]_B + [y]_B; \quad (3)$$
$$[\alpha x]_B = \alpha [x]_B. \quad (4)$$

Пусть $x = \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_n b_n$, $y = \delta_1 b_1 + \ldots + \delta_n b_n$, т.е. $[x]_B = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top$, $[y]_B = (\delta_1, \ldots, \delta_n)^\top$. Тогда
$x + y = \gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_n b_n + \delta_1 b_1 + \ldots + \delta_n b_n = (\gamma_1 + \delta_1) b_1 + \ldots + (\gamma_n + \delta_n) b_n$,
и в силу единственности координат
$[x+y]_B = (\gamma_1 + \delta_1, \ldots, \gamma_n + \delta_n)^\top = [x]_B + [y]_B$. Равенство (3) доказано.
Для доказательства (4) запишем
$\alpha x = \alpha(\gamma_1 b_1 + \ldots + \gamma_n b_n) = (\alpha\gamma_1) b_1 + \ldots + (\alpha\gamma_n) b_n$, откуда
$[\alpha x]_B = (\alpha\gamma_1, \ldots, \alpha\gamma_n)^\top = \alpha [x]_B$.

Определение

Пусть U, V – линейные пространства над полем F. *Изоморфизмом* пространства U на V называется отображение $\varphi : U \longrightarrow V$, которое является биекцией множества U на V и *линейным* отображением, т.е. для любых $x, y \in U$ и любого $\alpha \in F$ справедливы равенства $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ и $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$.
Линейные пространства U и V называются *изоморфными*, если существует изоморфизм U на V.

Теорема

Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем F. Тогда V изоморфно пространству столбцов F_n и арифметическому пространству F^n.

$\Downarrow$ Пусть $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – некоторый базис линейного пространства V. Определим отображение $\varphi : V \longrightarrow F_n$, полагая $\varphi(x) = [x]_B$ для любого $x \in V$. Очевидно, φ является сюръективным отображением множества V на F_n. Его инъективность следует из единственности координат, а линейность обеспечивается свойствами координат (равенствами (3) и (4)) сл.10. Таким образом, φ – изоморфизм. Очевидно, что отображение $x \mapsto x^\top$ для $x \in F_n$ является изоморфизмом пространства F_n на пространство F^n, что завершает доказательство. $\Uparrow$

Из свойств координат (или того факта, что n-мерное линейное пространство над полем F изоморфно пространству F_n) вытекают следующие утверждения.

Предложение 1

Пусть $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис линейного пространства V над полем F, $a_1, \ldots, a_k, c \in V$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in F$. Тогда равенство $c = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_k a_k$ имеет место в пространстве V тогда и только тогда, когда $[c]_B = \lambda_1 [a_1]_B + \ldots + \lambda_k [a_k]_B$ в пространстве столбцов F_n.
В частности, система векторов $(a_1, \ldots, a_k)$ линейно зависима (соотв. линейно независима) тогда и только тогда, когда система столбцов $([a_1]_B, \ldots, [a_k]_B)$ линейно зависима (соотв. линейно независима).

Предложение 2

Пусть $B = (b_1, \ldots, b_n)$ – базис линейного пространства V над полем F. Система векторов $(c_1, \ldots, c_n)$ является базисом пространства V тогда и только тогда, когда система столбцов $([c_1]_B, \ldots, [c_n]_B)$ является базисом в пространстве столбцов F_n.

Замена базиса

Пусть в линейном пространстве V заданы два базиса $B = (b_1, \ldots, b_n)$ и $C = (c_1, \ldots, c_n)$. Как связаны между собой координаты одного вектора x в этих базисах? Для выяснения этого потребуется понятие *матрицы перехода*. Разложим векторы $c_1, \ldots, c_n$ по базису B:

$$\begin{aligned} c_1 &= \tau_{11}b_1 + \tau_{21}b_2 + \ldots + \tau_{n1}b_n, \\ c_2 &= \tau_{12}b_1 + \tau_{22}b_2 + \ldots + \tau_{n2}b_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_n &= \tau_{1n}b_1 + \tau_{2n}b_2 + \ldots + \tau_{nn}b_n. \end{aligned} \tag{5}$$

Определение

Матрица $T_{B,C} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода* от базиса B к базису C.

Столбцами матрицы перехода $T_{B,C}$ являются столбцы координат $[c_1]_B, [c_2]_B, \ldots, [c_n]_B$. Система равенств (5) может быть записана в матричном виде: $C = B \cdot T_{B,C}$.

Формулы преобразования координат

Пусть $x \in V$, $x = B \cdot [x]_B$, $x = C \cdot [x]_C$. Имеем
$x = C \cdot [x]_C = (B \cdot T_{B,C}) \cdot [x]_C = B \cdot (T_{B,C} \cdot [x]_C)$, откуда
$B \cdot [x]_B = B \cdot (T_{B,C} \cdot [x]_C)$. Следовательно, имеют место

Формулы преобразования координат при замене базиса в матричной форме

$$[x]_B = T_{B,C} \cdot [x]_C.$$

Пусть $[x]_B = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$, $[x]_C = (\varsigma_1, \ldots, \varsigma_n)^\top$. Записав равенство
$[x]_B = T_{B,C} \cdot [x]_C$ в развернутом виде, получим

Формулы преобразования координат при замене базиса в развернутом виде

$$\begin{cases} \xi_1 = \tau_{11}\varsigma_1 + \tau_{12}\varsigma_2 + \ldots + \tau_{1n}\varsigma_n, \\ \xi_2 = \tau_{21}\varsigma_1 + \tau_{22}\varsigma_2 + \ldots + \tau_{2n}\varsigma_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n = \tau_{n1}\varsigma_1 + \tau_{n2}\varsigma_2 + \ldots + \tau_{nn}\varsigma_n. \end{cases}$$

Свойства матрицы перехода

Теорема

Матрица перехода $T_{B,C}$ от базиса B к базису C является обратимой матрицей и обратная матрица $T^{-1}_{B,C} = T_{C,B}$.

$\Uparrow$ Из равенства $C = B \cdot T_{B,C}$ и аналогичного равенства $B = C \cdot T_{C,B}$ получаем $B \cdot E_n = B = C \cdot T_{C,B} = (B \cdot T_{B,C}) \cdot T_{C,B} = B \cdot (T_{B,C} \cdot T_{C,B})$, т.е. $B \cdot E_n = B \cdot (T_{B,C} \cdot T_{C,B})$. Следовательно, в силу единственности координат $E_n = T_{B,C} \cdot T_{C,B}$. Аналогично доказывается, что $E_n = T_{C,B} \cdot T_{B,C}$. Таким образом, матрица $T_{B,C}$ обратима по определению (см. сл.27 т.2) и обратная к ней есть матрица $T_{C,B}$. $\Uparrow$

Зафиксируем в линейном пространстве V базис $B = (b_1, \dots, b_n)$. Для любой невырожденной матрицы T система векторов $B \cdot T$ является линейно независимой и содержит n векторов, где $n = \dim V$, поэтому C является базисом пространства V. Таким образом, между невырожденными матрицами порядка n и базисами пространства V существует биекция.

Алгоритм нахождения матрицы перехода

Предположим, что в линейном пространстве V размерности n над полем F заданы два базиса B и C координатами своих векторов в исходном базисе A.

Описание алгоритма

Составим матрицу размеров $n \times 2n$, записав в виде столбцов сначала координаты всех векторов базиса B, и затем приписав к ним координаты всех векторов базиса C. С помощью элементарных преобразований строк приведем полученную матрицу к виду $(E_n|T)$, так что на месте координат векторов базиса B окажется единичная матрица порядка n. Тогда на месте координат векторов базиса C окажется матрица перехода T от базиса B к базису C.

Обоснование этого алгоритма получается с помощью алгоритма со сл.14 т.5. Нужно принять во внимание, что матрица перехода от базиса A к базису B является невырожденной, и потому с помощью элементарных преобразований строк может быть приведена к единичной матрице.

Найти матрицу перехода от базиса $b_1 = (1, 2), b_2 = (2, 3)$ к базису $c_1 = (5, -8), c_2 = (-4, 7)$ арифметического пространства $\mathbb{R}^2$ и записать формулы преобразования координат.

Используем алгоритм предыдущего слайда, составив матрицу из столбцов координат векторов b_1, b_2, c_1, c_2: $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & -8 & 7 \end{array}\right) \sim$ $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 5 & -4 \\ 0 & -1 & -18 & 15 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -31 & 26 \\ 0 & 1 & 18 & -15 \end{array}\right)$. Таким образом, $T_{b,c} = \begin{pmatrix} -31 & 26 \\ 18 & -15 \end{pmatrix}$ и формулы преобразования координат имеют вид :

$$\begin{cases} \xi_1 = -31\varsigma_1 + 26\varsigma_2; \\ \xi_2 = 18\varsigma_1 - 15\varsigma_2, \end{cases}$$

где для любого $x \in \mathbb{R}^2$, $x = \xi_1 b_1 + \xi_2 b_2$ и $x = \varsigma_1 c_1 + \varsigma_2 c_2$.