Тема 4: Линейные пространства

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Лекции по линейной алгебре для физиков

Пусть V – непустое множество, F – поле. Элементы из V будем обозначать малыми латинскими буквами и называть *векторами*, элементы из F будем обозначать малыми греческими буквами и называть *скалярами*.

Аксиомы линейного пространства

Непустое множество V называется *линейным* (или *векторным*) *пространством над полем* F, если выполняются следующие условия:

1. $\forall x, y \in V \ \ \exists! z \in V$ (вектор z называется *суммой векторов* x и y и обозначается через $x + y$)
2. $\forall x, y \in V \ \ x + y = y + x$
3. $\forall x, y, z \in V \ \ (x + y) + z = x + (y + z)$
4. $\exists 0 \in V \ \ \forall x \in V \ \ x + 0 = x$
5. $\forall x \in V \ \ \exists y \in V \ \ x + y = 0$
6. $\forall \alpha \in F \ \ \forall x \in V \ \ \exists! y \in V$ (вектор y называется *произведением вектора* x и скаляра α и обозначается через αx)
7. $\forall \alpha \in F \ \ \forall x, y \in V \ \ \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$
8. $\forall \alpha, \beta \in F \ \ \forall x \in V \ \ (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
9. $\forall \alpha, \beta \in F \ \ \forall x \in V \ \ \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
10. $\forall x \in V \ \ 1x = x$

Пространства геометрических векторов

1. Множества геометрических векторов V_g, V_ℓ (ℓ – любая прямая), V_π (π – любая плоскость) являются линейными пространствами над полем $\mathbb{R}$.

Это следует из свойств линейных операций над геометрическими векторами, известных из аналитической геометрии.
Данные примеры позволяют наглядно представить себе линейное пространство.

Пространства матриц

2. Множества $F^{k\times n}$ всех матриц фиксированных размеров $k \times n$ ($k, n \in \mathbb{N}$) с элементами из поля F являются линейными пространствами над полем F.

Это следует из свойств линейных операций над матрицами (т.2, сл.8).
Обозначим пространство строк $F^{1\times n}$ через F^n. Оно называется *арифметическим пространством* над полем F.
Пространство столбцов $F^{k\times 1}$ будем обозначать через F_k.

Примеры линейных пространств 3-4

Пространства многочленов

3. Множество всех многочленов $F[x]$ над полем F и множества $VP_n(F)$ всех многочленов степени, не превосходящей n, (включая нулевой многочлен) являются линейными пространствами над полем F.

Это непосредственно следует из свойств операций над многочленами.

Поле комплексных чисел

4. Поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ относительно обычных операций является линейным пространством над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

Предложение

1. *Вектор 0 из аксиомы 4 единствен. Он называется* нулевым вектором *пространства V и обозначается через 0_V.*
2. *Вектор y из аксиомы 5 единствен. Он называется* противоположным *к вектору x и обозначается через $-x$.*
3. *Сумма любого конечного семейства векторов не зависит от способа расстановки скобок.*
4. *Для любых $x, y, z \in V$ из $x + y = x + z$ следует $y = z$.*
5. $\forall x, y \in V \exists! z \in V : x + z = y$*; вектор z называется* разностью *и обозначается через $y - x$.*

$\Downarrow$ Пусть имеется два вектора 0_1 и 0_2, удовлетворяющие условию аксиомы 4. Тогда $0_1 + 0_2 = 0_2$ и $0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_1$, т.е. $0_1 = 0_2$.

Пусть для вектора x имеется два вектора y_1 и y_2, удовлетворяющие условию аксиомы 5. Тогда

$y_1 = y_1 + 0_V = y_1 + (x + y_2) = (y_1 + x) + y_2 = (x + y_1) + y_2 = 0_V + y_2 = y_2$, т.е. $y_1 = y_2$.

Утверждение 3 доказывается на следующем слайде.

Окончание доказательства

Докажем индукцией по n, что при $n \geq 3$ и любых $x_1, x_2, \ldots, x_n \in V$ выражение $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ при любом способе расстановки скобок равно $x_1 + (x_2 + (\ldots + x_n) \cdots)$. База индукции $(n = 3)$ следует из аксиомы 3: $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$.
Шаг индукции. Предположим, что для всех $3 \leq k < n$ утверждение уже доказано. Рассмотрим сумму $(x_1 + x_2 \ldots + x_m) + (x_{m+1} + \ldots x_n)$. Если $m = 1$, то требуемое сразу получается из предположения индукции, примененного к второй скобке. Пусть $m > 1$. По предположению индукции выражение в первой скобке равно $x_1 + (x_2 + (\ldots + x_m))$. Применяя аксиому 3, получаем
$(x_1 + x_2 \ldots x_m) + (x_{m+1} + \ldots x_n) = (x_1 + (x_2 + (\ldots x_m)) + (x_{m+1} + \ldots + x_n) = x_1 + ((x_2 + (\ldots x_m)) + (x_{m+1} + \ldots x_n))$, откуда в силу предположения индукции следует требуемое. Утверждение 3 доказано.

С учетом утверждения 3 выражения вида $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ принято записывать без скобок.

Пусть $x + y = x + z$ для некоторых векторов $x, y, z \in V$. Тогда $-x + (x + y) = -x + (x + z)$, откуда $(-x + x) + y = (-x + x) + z$ и $y = z$. Если $x + z = y$ для некоторых векторов $x, y, z \in V$, то в силу утверждения 4 вектор z определен однозначно, если он существует. В качестве z можно взять вектор $(-x) + y$.$\Uparrow$

Следствия из определения линейного пространства 1

Предложение

1. *Для любых* $\gamma \in F$, $a \in V$ *справедливы равенства* $\gamma 0_V = 0_V$, $0a = 0_V$.
2. *Для любых* $a \in V$, $\gamma \in F$ *справедливы равенства* $(-1)a = -a$, $\gamma(-a) = -\gamma a$, $(-\gamma)a = -\gamma a$.
3. *Для любых* $\gamma \in F$, $a \in V$ *из* $\gamma \neq 0$, $a \neq 0_V$ *следует* $\gamma a \neq 0_V$.
4. *Для любых* $a, b \in V$, $\gamma \in F$ *справедливо равенство* $\gamma(a - b) = \gamma a - \gamma b$.

$\Downarrow$ Докажем первое из равенств 1. Умножив обе части равенства $0_V + 0_V = 0_V$ на скаляр γ, получим $\gamma(0_V + 0_V) = \gamma 0_V$, откуда $\gamma 0_V + \gamma 0_V = \gamma 0_V + 0_V$ и $\gamma 0_V = 0_V$. Второе равенство доказывается аналогично.
Для доказательства первого из равенств 2 запишем $a + (-1)a = 1a + (-1)a = (1 + (-1))a = 0a = 0_V$, откуда $a + (-1)a = 0_V$ и $(-1)a = -a$. Второе и третье равенства проверяются аналогично.
Пусть $\gamma \in F$, $a \in V$ и $\gamma \neq 0$, но $\gamma a = 0_V$. Так как $\gamma \neq 0$, существует γ^{-1}. Умножим обе части равенства $\gamma a = 0_V$ на γ^{-1}: $\gamma^{-1}(\gamma a) = \gamma^{-1} 0_V$. Отсюда $(\gamma^{-1}\gamma)a = 0_V$ и $1a = 0_V$, т.е. $a = 0_V$. Утверждение 3 доказано.
Для доказательства утверждения 4 вспомним доказательство утверждение 5 сл.5 (см. сл.6): $a - b = a + (-b)$. Имеем $\gamma(a - b) = \gamma(a + (-b)) =$
$= \gamma a + \gamma(-b) = \gamma a + (-\gamma b) = \gamma a - \gamma b$. $\Uparrow$

Пусть V – линейное пространство над полем F. Конечная последовательность векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ из V называется *системой векторов*. В системе векторов существен порядок векторов и на разных местах в системе может находиться один и тот же вектор.

Определение

Линейной комбинацией системы векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ с коэффициентами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in F$ называется вектор $b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k$.

Если равенство $b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k$ выполняется для некоторых $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in F$, то будем говорить, что вектор b *линейно выражается* через систему векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и обозначать этот факт через $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash b$. Если каждый вектор системы $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ линейно выражается через систему векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, то будем писать $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ и говорить, что система $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *линейно выражается через систему* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$. Если $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \vdash (a_1, a_2, \ldots, a_k)$, то будем говорить, что системы $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *линейно эквивалентны* и писать $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash\!\dashv (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.

По правилу умножения строки на столбец имеем

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_k \end{pmatrix}.$$

Если $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, то для некоторых $\gamma_{ij} \in F$ имеем

$b_1 = \gamma_{11} a_1 + \gamma_{21} a_2 + \ldots + \gamma_{k1} a_k;$

$b_2 = \gamma_{12} a_1 + \gamma_{22} a_2 + \ldots + \gamma_{k2} a_k;$

....

$b_m = \gamma_{1m} a_1 + \gamma_{2m} a_2 + \ldots + \gamma_{km} a_k.$

Положим $\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1m} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \gamma_{k1} & \gamma_{k2} & \ldots & \gamma_{km} \end{pmatrix}.$

Тогда приведенную выше систему равенств можно записать в матричном виде: $(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot \Gamma$, где $\Gamma \in F^{k \times m}$.

Предложение

Если система векторов $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *линейно выражается через систему* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, *а система* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *линейно выражается через систему* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, *то система* $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *линейно выражается через систему* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

$\Downarrow$ Если система векторов $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ линейно выражается через систему $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$, то имеем $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \cdot \Delta$ для некоторой матрицы $\Delta \in F^{m \times n}$. Если система векторов $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ линейно выражается через систему $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, то $(b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot \Gamma$ для некоторой матрицы $\Gamma \in F^{k \times m}$. Следовательно, $(c_1, c_2, \ldots, c_n) = (b_1, b_2, \ldots, b_m) \cdot \Delta = ((a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot \Gamma) \cdot \Delta = (a_1, a_2, \ldots, a_k) \cdot (\Gamma \cdot \Delta)$. Последнее равенство в этой цепочке доказывается так же, как ассоциативность умножения матриц (т.2, с.14). $\Uparrow$

Таким образом, если A, B, C – системы векторов и $B = A \cdot \Gamma$, $C = B \cdot \Delta$ для некоторых матриц Γ, Δ, то $C = A \cdot (\Gamma \cdot \Delta)$.

Определение

Линейной оболочкой системы векторов называется множество всевозможных линейных комбинаций этой системы.

Для системы векторов $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ ее линейная оболочка обозначается через $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle$. По определению
$\langle a_1, a_2, \ldots, a_k\rangle = \{\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \ldots + \gamma_k a_k | \gamma_j \in F,\ j = 1, 2, \ldots, k\}$.
Линейная оболочка одного вектора: $\langle a\rangle = \{\gamma a | \gamma \in F\}$.

Предложение

Если $a \neq 0_V$, то отображение $\gamma \mapsto \gamma a$ является биекцией множества F на $\langle a\rangle$.

$\Downarrow$ Очевидно, что указанное отображение сюръективно. Проверим его инъективность. Пусть $\gamma a = \delta a$ для некоторых $\gamma, \delta \in F$. Тогда $\gamma a - \delta a = 0_V$, откуда $(\gamma - \delta)a = 0_V$. Так как $a \neq 0_V$, из утверждения 3 предложения сл.7 следует $\gamma - \delta = 0$ и $\gamma = \delta$. $\Uparrow$

Следствие

Если поле F бесконечно, то линейная оболочка любой системы векторов, содержащей ненулевой вектор, также является бесконечным множеством.

Предложение

1. $\langle\vec{0}\rangle = \{\vec{0}\}$.
2. Если $\vec{a} \neq \vec{0}$, то $\langle\vec{a}\rangle = V_\ell$, где ℓ – любая прямая, коллинеарная вектору $\vec{a}$.
3. Если $\vec{a} \nparallel \vec{b}$, то $\langle\vec{a}, \vec{b}\rangle = V_\pi$, где π – любая плоскость, компланарная векторам $\vec{a}, \vec{b}$.
4. Если $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – тройка некомпланарных векторов, то $\langle\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\rangle = V_g$.

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Предложение

1. *Для любых векторов* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *справедливы включения* $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$.
2. *Для любых векторов* $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ *справедливо включение* $\langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$.
3. *Для любых систем векторов* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *и* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *справедливо утверждение* $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle \subseteq \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle \iff (b_1, b_2, \ldots, b_m) \vdash (a_1, a_2, \ldots, a_k)$.
4. *Для любых систем векторов* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *и* $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ *справедливо утверждение* $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle = \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle \iff (a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash\dashv (b_1, b_2, \ldots, b_m)$.
5. *Для любой системы векторов* $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ *и любого вектора* b *справедливо утверждение* $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash b \iff \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k, b \rangle$.

$\Downarrow$ Утверждение 1 очевидно: $a_j = 0a_1 + \ldots + 1a_j + \ldots + 0a_k$.
Утверждение 2 вытекает из предложения сл.10: для любого $c \in \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle$ имеем $(b_1, b_2, \ldots, b_m) \vdash c$, а из $b_1, b_2, \ldots, b_m \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$ следует $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (b_1, b_2, \ldots, b_m)$, поэтому $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash c$ и следовательно $c \in \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$.
Утверждение 3 следует из соответствующих определений и утверждения 2.
Утверждение 4 непосредственно следует из утверждения 3.
В утверждении 5 импликация $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle = \langle a_1, a_2, \ldots, a_k, b \rangle \Longrightarrow (a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash b$ очевидна. Из $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash b$ следует $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \vdash (a_1, a_2, \ldots, a_k, b)$ и в силу утверждения 2 $\langle a_1, a_2, \ldots, a_k, b \rangle \subseteq \langle a_1, a_2, \ldots, a_k \rangle$. Обратное включение выполняется очевидным образом. $\Uparrow$