

# Тема 2: Матрицы и действия над ними

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
Департамент математики, механики и компьютерных наук  
Лекции по линейной алгебре для физиков

## Определение

Напомним, что *матрицей размеров*  $m \times k$  над множеством  $M$  называется прямоугольная таблица из элементов  $M$ , имеющая  $m$  строк и  $k$  столбцов. Элементы множества  $M$ , из которых состоит матрица, называются ее *элементами*.

Принято записывать матрицы размеров  $m \times k$  в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Кратко матрица (1) записывается в виде  $A = (a_{ij})_{m \times k}$ . Для указания размеров матрицы без обозначения элементов будем использовать обозначение  $A_{m \times k}$ .

Часто бывает удобно записывать элемент из  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца матрицы  $A$  как  $A[i, j]$ .

Обозначать матрицы будем преимущественно заглавными латинскими буквами. Примеры матриц:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & \pi & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & \pi \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & \pi & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

При этом  $X[2, 3] = \pi$ ,  $Y[1, 2] = 2$ ,  $Z[3, 1] = -1$ .

## Определение

Матрицы  $A_{m \times k}$  и  $B_{n \times \ell}$  называются **равными**, если их размеры совпадают (т.е.  $m = n$ ,  $k = \ell$ ) и элементы, стоящие на соответствующих местах, также совпадают:  $A[i, j] = B[i, j]$  при всех  $i, j$ , пробегающих независимо друг от друга значения  $i = 1, \dots, m$  и  $j = 1, \dots, k$ .

Множество всех матриц размеров  $m \times k$  с элементами из фиксированного поля  $F$  будем обозначать через  $F^{m \times k}$ . В качестве поля  $F$  обычно берется поле  $\mathbb{R}$  действительных чисел или поле  $\mathbb{C}$  комплексных чисел.

Если в определенной матрице зафиксировать какие-либо строки и столбцы и рассмотреть матрицу, образованную элементами, стоящими на пересечении выделенных строк и столбцов, то полученная матрица называется **подматрицей** исходной матрицы. Например, на слайде 3 матрицы  $Y$  и  $Z$  являются подматрицами матрицы  $X$ .

Матрица  $A_{m \times k}$  называется **строкой** [соответственно **столбцом**], если  $m = 1$  [соответственно  $k = 1$ ]. Строки и столбцы будем обозначать малыми буквами.

Если матрица  $A$  имеет размеры  $m \times m$ , то ее называют *квадратной матрицей порядка  $m$*  и обозначают так:  $A_m$ . Множество всех квадратных матриц порядка  $n$  над полем  $F$  будем обозначать через  $F^{n \times n}$ .

Как отмечалось в т.1, элементы  $A[1, 1], A[2, 2], \dots, A[m, m]$  образуют главную диагональ квадратной матрицы  $A$ . Элементы  $A[m, 1], A[m - 1, 2], \dots, A[1, m]$  образуют ее *побочную диагональ*.

Мы говорим, что элемент  $A[i, j]$  стоит ниже [соотв. выше] главной диагонали квадратной матрицы  $A_m$ , если  $i > j$  [соотв.  $i < j$ ]. Квадратная матрица называется *верхнетреугольной* [соотв. *нижнетреугольной*], если все ее элементы, стоящие ниже [соотв. выше] главной диагонали, равны 0.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если она верхнетреугольная или нижнетреугольная. Квадратная матрица называется *диагональной*, если она верхнетреугольная и нижнетреугольная, т.е. все элементы вне главной диагонали равны 0. Квадратную матрицу порядка  $n$  с элементами  $a_1, \dots, a_n$  на главной диагонали будем обозначать через  $[a_1, \dots, a_n]$ .

Квадратная матрица называется *скалярной*, если она диагональна и все элементы на главной диагонали одинаковы.

Скалярная матрица порядка  $n$  с элементами 1 на главной диагонали, как уже говорилось в т.1, называется единичной матрицей порядка  $n$  и обозначается через  $E_n$ .

Рассмотрим линейные операции над матрицами: сложение матриц и умножение матрицы на скаляр. Напомним, что для краткости скалярами называются элементы поля.

Сложение определено только для матриц одинаковых размеров. *Суммой* матриц  $A$  и  $B$  из  $F^{m \times k}$  называется матрица  $C \in F^{m \times k}$ , обозначаемая через  $A + B$ , каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ :

$$C[i, j] = A[i, j] + B[i, j], \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, k.$$

$$\text{Например, } \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & 18 \end{pmatrix};$$

$$\text{сумма } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix} \text{ не определена.}$$

*Произведением* матрицы  $A_{m \times k}$  и скаляра  $t$  называется матрица таких же размеров, как матрица  $A$ , обозначаемая через  $D = tA$ , каждый элемент которой получается умножением соответствующего элемента матрицы  $A$  на скаляр  $t$ :  $D[i, j] = tA[i, j]$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $j = 1, \dots, k$ .

Например,  $4 \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 4 & -8 & 40 \\ -4 & 0 & 36 \end{pmatrix}$ .

Для сложения матриц и умножения матрицы на число выполняются следующие проверяемые очевидным образом свойства.

1. Для любых матриц  $A, B$  одинаковых размеров справедливо равенство  $A + B = B + A$ .
2. Для любых матриц  $A, B, C$  одинаковых размеров справедливо равенство  $(A + B) + C = A + (B + C)$ .
3. Существует матрица  $O = O_{m \times k}$  размеров  $m \times k$  такая, что для любой матрицы  $A$  таких же размеров справедливо равенство  $A + O = A$ .
4. Для любой матрицы  $A_{m \times k}$  существует матрица  $B$  тех же размеров такая, что справедливо равенство  $A + B = O_{m \times k}$ .
5. Для любых матриц  $A, B$  одинаковых размеров и любого числа  $t$  справедливо равенство  $t(A + B) = tA + tB$ .
6. Для любой матрицы  $A$  и любых чисел  $s, t$  справедливо равенство  $(s + t)A = sA + tA$ .
7. Для любой матрицы  $A$  и любых чисел  $s, t$  справедливо равенство  $s(tA) = (st)A = t(sA)$ .
8. Для любой матрицы  $A$  справедливо равенство  $1A = A$ .



Свойства 1 и 2 следуют из соответствующих свойств сложения чисел. В свойстве 3 в качестве  $O_{m \times k}$  следует взять матрицу размеров  $m \times k$  с нулевыми элементами; такая матрица называется *нулевой*. В свойстве 4 в качестве  $B$  можно взять матрицу с элементами, противоположными элементам матрицы  $A$ ; такая матрица называется *противоположной* матрице  $A$ . Свойства 5–8 обеспечиваются соответствующими свойствами поля (дистрибутивностью, ассоциативностью умножения).

Заметим, что скалярная матрица порядка  $n$  с элементом  $a$  на главной диагонали может быть представлена как  $aE_n$ , где  $E_n$  – единичная матрица порядка  $n$ .

Пусть  $A_1, \dots, A_s$  – матрицы размеров  $m \times k$ ,  $t_1, \dots, t_s$  – некоторые числа. Матрица  $t_1A_1 + \dots + t_sA_s$  называется **линейной комбинацией** матриц  $A_1, \dots, A_s$  с коэффициентами  $t_1, \dots, t_s$ . Если матрица  $B$  равна линейной комбинации матриц  $A_1, \dots, A_s$  с некоторыми коэффициентами, то говорят, что  $B$  **линейно выражается** через указанные матрицы.

Обозначим через  $E_{m \times k}^{(i,j)}$  матрицу размеров  $m \times k$ , у которой все элементы равны нулю, за исключением элемента на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, который равен единице. Такие матрицы называются **матричными единицами** размеров  $m \times k$ . Для матрицы  $A = (a_{ij})_{m \times k}$  справедливо очевидное равенство (в котором используется краткое обозначение  $\sum_{r=1}^s x_r$  для суммы  $x_1 + \dots + x_s$ )

$$A_{m \times k} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k a_{ij} E_{m \times k}^{(i,j)}. \quad (2)$$

Это равенство показывает, что любая матрица размеров  $m \times k$  линейно выражается через матричные единицы размеров  $m \times k$ .

Определим теперь умножение матриц.

Говорят, что размеры матриц  $A_{m \times k}$  и  $B_{n \times \ell}$  **согласованы**, если  $k = n$ , т.е. число столбцов матрицы  $A$  равно числу строк матрицы  $B$ . В этом определении существен порядок матриц  $A, B$ : размеры  $A$  и  $B$  могут быть согласованы, а размеры  $B$  и  $A$  – не согласованы.

**Произведение матриц**  $A \cdot B$  определено только тогда, когда размеры матриц  $A_{m \times k}$  и  $B_{n \times \ell}$  согласованы, и по определению  $A \cdot B = C_{m \times \ell}$ , где  $C[i, j] = A[i, 1]B[1, j] + A[i, 2]B[2, j] + \dots + A[i, k]B[k, j]$  для всех  $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, \ell$ . Используя краткое обозначение для суммы, элемент  $c_{ij}$  можно записать в виде

$$C[i, j] = \sum_{r=1}^k A[i, r]B[r, j]. \quad (3)$$

Формула (3) дает выражение для произведения строки

$(A[i, 1], A[i, 2], \dots, A[i, k])$  на столбец  $\begin{pmatrix} B[1, j] \\ B[2, j] \\ \dots \\ B[k, j] \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 20 \\ 9 & 16 & 70 \\ 8 & 7 & 81 \end{pmatrix};$$

$$(1 \ 2 \ 2) \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ не определено};$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 2) = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 14 \\ 63 & 54 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$E_{k \times n}^{i,j} \cdot E_{\ell \times m}^{s,t} = \begin{cases} E_{k \times m}^{i,t}, & \text{если } n = \ell \text{ и } j = s, \\ O_{k \times m}, & \text{если } n = \ell \text{ и } j \neq s, \\ \text{не определено,} & \text{если } n \neq \ell. \end{cases}$$

Мы видим, что умножение матриц *некоммутативно*, т.е. не для всех матриц справедливо равенство  $A \cdot B = B \cdot A$ . Кроме того, одно из этих произведений может быть определено, а другое – не определено.

На следующих двух слайдах приведены свойства умножения матриц.

1. Для любых матриц  $A, B, C$ , если определено одно из произведений  $(A \cdot B) \cdot C$  или  $A \cdot (B \cdot C)$ , то определено и другое, и справедливо равенство  $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ .

↓ Если произведение  $(A \cdot B) \cdot C$  определено, то легко понять, что матрицы будут иметь размеры  $A_{m \times k}$ ,  $B_{k \times \ell}$ ,  $C_{\ell \times n}$ , и произведение  $A \cdot (B \cdot C)$  также определено. Обратное утверждение получается аналогично. При этом матрицы  $(A \cdot B) \cdot C$  и  $A \cdot (B \cdot C)$  имеют одинаковые размеры  $m \times n$ . Для доказательства поэлементного равенства матриц  $(A \cdot B) \cdot C$  и  $A \cdot (B \cdot C)$  необходимо воспользоваться следующим свойством суммирования:

$\sum_{s=1}^u \sum_{t=1}^v x_{st} = \sum_{t=1}^v \sum_{s=1}^u x_{st}$ . Имеем для любых  $i = 1, \dots, m$  и  $j = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} ((A \cdot B) \cdot C)[i, j] &= \sum_{r=1}^{\ell} (A \cdot B)[i, r] C[r, j] = \sum_{r=1}^{\ell} \left( \sum_{s=1}^k A[i, s] B[s, r] \right) C[r, j] = \\ &= \sum_{r=1}^{\ell} \sum_{s=1}^k A[i, s] B[s, r] C[r, j] = \sum_{s=1}^k \sum_{r=1}^{\ell} A[i, s] B[s, r] C[r, j] = \\ &= \sum_{s=1}^k A[i, s] \left( \sum_{r=1}^{\ell} B[s, r] C[r, j] \right) = \sum_{s=1}^k A[i, s] (B \cdot C)[s, j] = \\ &= (A \cdot (B \cdot C))[i, j]. \uparrow \end{aligned}$$

2. Для любых матриц  $A_{m \times k}$ ,  $B_{k \times \ell}$ ,  $C_{k \times \ell}$  справедливо равенство  $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$ .
3. Для любых матриц  $A_{m \times k}$ ,  $B_{m \times k}$ ,  $C_{k \times \ell}$  справедливо равенство  $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ .
4. Для любых матриц  $A_{m \times k}$ ,  $B_{k \times \ell}$  и любого числа  $t$  справедливы равенства  $(tA) \cdot B = t(A \cdot B) = A \cdot (tB)$ .
5. Для любой матрицы  $A_{m \times k}$  и единичных матриц  $E_k, E_m$  справедливы равенства  $A \cdot E_k = E_m \cdot A = A$ .

Эти свойства получаются из определения произведения матриц рассуждениями, аналогичными применявшимся при доказательстве свойства 1.

# Матричная запись системы линейных уравнений

Получим матричную запись системы линейных уравнений в общем виде.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \quad (4)$$

Рассмотрим матрицу  $A = (a_{ij})_{k \times n}$ , состоящую из коэффициентов при неизвестных в этой системе (напомним, что она называется *основной матрицей* этой системы), столбец  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$  неизвестных и столбец

$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}$  свободных членов. Тогда система (4) записывается в матричном виде так:

$$A \cdot x = b. \quad (5)$$

Матрица  $(A | b)$ , полученная приписыванием к основной матрице системы линейных уравнений столбца ее свободных членов, была названа в т.1 *расширенной матрицей* системы.



## Значение многочлена от матрицы

Рассмотрим квадратные матрицы порядка  $n$ . Их можно складывать и умножать, в частности возводить в степень с натуральным показателем. Пусть  $A$  – квадратная матрица порядка  $n$  и

$$f(x) = a_0x^r + a_1x^{r-1} + \dots + a_{r-1}x + a_r$$

есть многочлен степени  $r$ . Значение многочлена от матрицы определяется так:

$$f(A) = a_0A^r + a_1A^{r-1} + \dots + a_{r-1}A + a_rE_n.$$

Вот пример. Пусть  $f(x) = x^2 - 3x + 4$ ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Тогда  $f(A) =$

$$A^2 - 3A + 4E_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Можно рассматривать и матричные многочлены вида

$$F(x) = A_0x^r + A_1x^{r-1} + \dots + A_{r-1}x + A_r,$$

где  $A_0, A_1, \dots, A_r$  – фиксированные квадратные матрицы порядка  $n$ .  
Значение такого многочлена от квадратной матрицы  $B$  порядка  $n$   
вычисляется по формуле

$$F(B) = A_0 \cdot B^r + A_1 \cdot B^{r-1} + \dots + A_{r-1} \cdot B + A_r.$$

Рассмотрим пример. Пусть

$$F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \text{ Тогда}$$
$$F(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

*Транспонированной* к матрице  $A$  называется матрица, полученная из  $A$  заменой строк на столбцы. Она обозначается через  $A^T$ . Если матрица  $A$  имеет размеры  $m \times k$ , то  $A^T$  имеет размеры  $k \times m$  и

$$A^T[i, j] = A[j, i] \quad (i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, m). \quad (6)$$

Рассмотрим примеры.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 9 \end{pmatrix};$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 20 \\ 9 & 16 & 70 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 16 \\ 20 & 70 \end{pmatrix}.$$

Из определения операций над матрицами легко вывести следующие свойства, показывающие, как транспонирование взаимодействует с этими операциями.

1. Для любых матриц  $A, B$  одинаковых размеров справедливо равенство  $(A + B)^T = A^T + B^T$ .
2. Для любой матрицы  $A$  и любого скаляра  $t$  справедливо равенство  $(tA)^T = tA^T$ .
3. Для любых матриц  $A, B$  согласованных размеров справедливо равенство  $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$ .
4. Для любой матрицы  $A$  справедливо равенство  $(A^T)^T = A$ .

Матрица называется **симметрической**, если она совпадает со своей транспонированной, т.е.  $A[i, j] = A[j, i]$  для всех  $i, j$ . Квадратная матрица  $A$  порядка  $n$  называется **кососимметрической**, если  $A^T = -A$ , т.е.

$A[i, j] = -A[j, i]$  для всех  $i, j$ . Легко понять, что [косо]симметрическая матрица является квадратной. Очевидно, что сумма двух [косо]симметрических матриц одного порядка и произведение [косо]симметрической матрицы на число являются [косо]симметрическими матрицами.

Таким образом, множество всех [косо]симметрических матриц одного порядка замкнуто относительно линейных операций над матрицами.

*Матричным уравнением* мы будем называть уравнение одного из видов

$$A \cdot X = B \text{ или } X \cdot C = D, \quad (7)$$

где  $A, B, C, D$  – известные матрицы;  $X$  – неизвестная матрица. Разумеется, матрицы  $A$  и  $X$  в первом уравнении,  $X$  и  $C$  во втором должны быть согласованных размеров, а число строк в матрицах  $A$  и  $B$ , равно как и число столбцов в матрицах  $C$  и  $D$ , должно быть одинаковым. С помощью транспонирования обеих частей уравнения  $X \cdot C = D$ , получаем, что указанное уравнение равносильно следующему уравнению:  $C^T \cdot X^T = D^T$ . Таким образом, достаточно научиться решать матричные уравнения вида  $A \cdot X = B$ .

Такие уравнения сводятся к нескольким системам линейных уравнений (число систем равно числу столбцов матрицы  $B$ ) с одинаковой основной матрицей. Это легко усмотреть из матричной записи системы линейных уравнений. Удобно решать все системы одновременно с помощью метода Гаусса–Жордана. Если по крайней мере одна система оказывается несовместной, то матричное уравнение не имеет решения. Если все системы совместны и по крайней мере одна из них неопределенная, то матричное уравнение имеет бесконечно много решений. Если все системы определенные, то матричное уравнение имеет единственное решение.

1. Решить матричное уравнение  $A \cdot X = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Неизвестная матрица  $X$  имеет размеры  $3 \times 2$ , т.е. может быть записана с неопределенными элементами в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

Для отыскания неизвестных элементов имеем две системы линейных уравнений (для каждого из столбцов матрицы  $X$ ) с одинаковой основной матрицей ( $A$ ) и разными столбцами свободных членов (они образуют матрицу  $B$ ). Для решения преобразуем расширенную матрицу, полученную приписыванием к матрице  $A$  матрицы  $B$ :

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right) &\sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left( \begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Запишем по последней матрице матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

равносильное исходному.

Отсюда получаются две системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_{11} - x_{21} = -1; \\ x_{21} + x_{31} = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x_{12} - x_{22} = -2; \\ x_{22} + x_{32} = 1. \end{cases} \quad \text{Из них находим выражения}$$

элементов  $x_{11}, x_{31}$  матрицы  $X$  через  $x_{21}$ , а элементы  $x_{12}, x_{32}$  выражаем через  $x_{22}$ :  $x_{11} = x_{21} - 1$ ,  $x_{31} = -x_{21} + 1$ ,  $x_{12} = x_{22} - 2$ ,  $x_{32} = -x_{22} + 1$ .

Значения элементов  $x_{21}, x_{22}$  можно выбирать произвольно.

Положим  $x_{21} = a$ ,  $x_{22} = b$ . Таким образом, рассматриваемое матричное уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$\left\{ \left( \begin{array}{cc} a-1 & b-2 \\ a & b \\ -a+1 & -b+1 \end{array} \right) \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Решить матричное уравнение  $A \cdot X = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Неизвестная матрица  $X$  имеет размеры  $2 \times 2$ . Преобразуем матрицу

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Мы видим, что системы для каждого из столбцов матрицы  $X$  несовместны, т.е. матричное уравнение не имеет решения.



3. Решить матричное уравнение  $A \cdot X = B$ , где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Неизвестная матрица  $X$  имеет размеры  $2 \times 2$ . Преобразуем матрицу

$$\left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array} \right).$$

Мы видим, что матричное уравнение имеет единственное решение

$$X = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что если при решении матричного уравнения  $A \cdot X = B$  с квадратной матрицей  $A$  порядка  $n$  матрица  $(A | B)$  элементарными преобразованиями строк приводится к виду  $(E_n | C)$  с единичной матрицей слева, то матричное уравнение имеет единственное решение  $X = C$ .

## Определение

Матрица  $A$  называется *обратимой*, если существует такая матрица  $B$ , и такое натуральное число  $n$ , что

$$A \cdot B = E_n, \quad B \cdot A = E_n. \quad (8)$$

Из определения произведения матриц легко следует, что если матрица  $A$  является обратимой, то она и матрица  $B$  должны быть квадратными матрицами порядка  $n$ .

## Лемма

Для обратимой матрицы  $A$  существует единственная матрица  $B$  со свойствами (8).

↓ Допустим, что матрицы  $B_1$  и  $B_2$  таковы, что  $A \cdot B_1 = E_n$ ,  $B_1 \cdot A = E_n$  и  $A \cdot B_2 = E_n$ ,  $B_2 \cdot A = E_n$ . Тогда, используя свойства 5 и 1 умножения матриц, а также последние равенства, имеем  $B_1 = B_1 \cdot E_n = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E_n \cdot B_2 = B_2$ , т.е.  $B_1 = B_2$  ↑.

Для обратимой матрицы  $A$  единственная матрица  $B$ , удовлетворяющая равенствам (8), называется *обратной* и обозначается через  $A^{-1}$ . Таким образом,

$$A \cdot A^{-1} = E_n, \quad A^{-1} \cdot A = E_n. \quad (9)$$

1. Если матрица  $A$  обратима и  $t$  – ненулевое число, то матрица  $tA$  обратима и  $(tA)^{-1} = \frac{1}{t}A^{-1}$ .
2. Если матрицы  $A$  и  $B$  обратимые одного и того же порядка, то матрица  $A \cdot B$  обратима и  $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ .

Эти свойства непосредственно выводятся из определения обратимой матрицы и свойств умножения матриц.

3. Если матрица  $A$  порядка  $n$  обратима, а  $B, C$  – произвольные матрицы размеров  $n \times k$ , то из  $A \cdot B = A \cdot C$  следует  $B = C$ .

↓ Умножим равенство  $A \cdot B = A \cdot C$  слева на  $A^{-1}$ , получим  $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot (A \cdot C)$ , откуда  $(A^{-1} \cdot A) \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot C$  и  $E_n \cdot B = E_n \cdot C$ . Таким образом,  $B = C$ . ↑

Аналогично доказывается следующее свойство.

4. Если матрица  $A$  порядка  $n$  обратима, а  $B, C$  – произвольные матрицы размеров  $m \times n$ , то из  $B \cdot A = C \cdot A$  следует  $B = C$ .
5. Матрица  $A$  порядка  $n$  обратима тогда и только тогда, когда обратима транспонированная к ней матрица  $A^T$ , и при этом  $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ .

Это свойство легко выводится из свойств операции транспонирования.

Не всякая квадратная матрица является обратимой. Очевидный пример – нулевая матрица порядка  $n$  при любом натуральном  $n$ . Если матрица  $A$  является обратимой, то матричное уравнение  $A \cdot X = E_n$  имеет решение (ниже будет установлено, что единственное), которое является матрицей

$A^{-1}$ . Поэтому матрица  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$  не является обратимой, так как

матричное уравнение  $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  не имеет решений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для нахождения обратной матрицы можно решить матричное уравнение  $A \cdot X = E_n$ . Получается первый способ нахождения обратной матрицы.

*Чтобы выяснить, является ли квадратная матрица  $A$  обратимой и в случае положительного ответа найти обратную к ней матрицу, следует приписать справа к матрице  $A$  единичную матрицу такого же порядка и, используя элементарные преобразования строк полученной матрицы, попытаться привести матрицу, стоящую на месте матрицы  $A$ , к единичной. Если это удастся, то матрица  $A$  является обратимой, и на месте единичной матрицы получается обратная к  $A$  матрица. В противном случае матрица  $A$  не является обратимой.*

Применим этот алгоритм для нахождения обратной матрицы к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 2 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/3 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & 1 & 2/3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & 4/3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}.$$



Если применить указанный алгоритм к любой матрице, то после приведения левой матрицы к ступенчатому виду может возникнуть одна из двух ситуаций:

- на главной диагонали левой подматрицы все элементы ненулевые (и тогда исходная матрица является обратимой, можно найти обратную матрицу);
- одна или несколько последних строк левой подматрицы нулевые (и тогда исходная матрица не является обратимой, преобразования следует прекратить).

## Предложение

Если квадратная матрица  $A$  порядка  $n$  обратима и матрица  $B$  имеет  $n$  строк [столбцов], то матричное уравнение  $A \cdot X = B$  [ $X \cdot A = B$ ] имеет единственное решение  $X = A^{-1} \cdot B$  [ $X = B \cdot A^{-1}$ ].

↓ Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Имеем  $A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = E_n \cdot B = B$ , т.е. матрица  $A^{-1} \cdot B$  есть решение уравнения  $A \cdot X = B$ . Пусть  $C$  – произвольное решение этого уравнения. Тогда  $A \cdot C = B$ . Умножая обе части этого равенства слева на  $A^{-1}$ , получаем  $A^{-1} \cdot (A \cdot C) = A^{-1} \cdot B$ , откуда  $(A^{-1} \cdot A) \cdot C = A^{-1} \cdot B$  и  $C = A^{-1} \cdot B$  ↑.

С помощью обратных матриц можно решать системы линейных уравнений, основная матрица которых обратимая. В самом деле, пусть  $A \cdot X = B$  — такая система. Применяя предложение сл.34, получаем, что наша система имеет единственное решение, которое выражается формулой  $X = A^{-1} \cdot B$ .

Решим указанным способом систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ \phantom{x_1} + 2x_2 + 3x_3 = -5 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 7. \end{cases} \quad (10)$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ а } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $A^{-1}$  была вычислена выше. Используя формулу  $X = A^{-1} \cdot B$ , имеем

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & 4/3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система (10) имеет единственное решение:  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = -3$ .