Тема 18: Квадратичные формы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Лекции по линейной алгебре для физиков

Понятие квадратичной формы

Определение

Квадратичной формой от переменных $x_1, \ldots, x_n$ над полем F называется многочлен $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$, где $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \in F$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Матрицей* квадратичной формы называется матрица $(\alpha_{ij})_{n\times n}$, составленная из ее коэффициентов.

Формулу из определения можно переписать, приведя подобные члены: $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii} x_i^2 + \sum_{1\leq i<j\leq n} 2\alpha_{ij} x_i x_j$. Матрица $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ по определению является симметрической. Непосредственным вычислением получаем *матричное представление* квадратичной формы (где $X = (x_1, \ldots, x_n)^\top$ – столбец переменных):

$$f(X) = X^\top \cdot A \cdot X. \tag{1}$$

Пусть $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем F.

Определение

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_n$ – два набора переменных. Система равенств

$$\begin{cases} x_1 = \tau_{11}y_1 + \tau_{12}y_2 + \ldots + \tau_{1n}y_n, \\ x_2 = \tau_{21}y_1 + \tau_{22}y_2 + \ldots + \tau_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \tau_{n1}y_1 + \tau_{n2}y_2 + \ldots + \tau_{nn}y_n, \end{cases}$$

где $\tau_{ij} \in F$, называется *заменой переменных*. *Матрицей замены* называется квадратная матрица $T = (\tau_{ij})_{n\times n}$. Замена называется *невырожденной*, если $|T| \neq 0$. Замену можно кратко записать в матричной форме $X = T \cdot Y$, где $X = (x_1, \ldots, x_n)^\top$, $Y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$.

При подстановке в квадратичную форму $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вместо $x_1, \ldots, x_n$ их выражений из замены переменных и выполнении необходимых преобразований получается новая квадратичная форма $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Используя матричное представление, можно найти связь между этими формами:
$f(X) = X^\top \cdot A \cdot X = (T \cdot Y)^\top \cdot A \cdot T \cdot Y = Y^\top \cdot T^\top \cdot A \cdot T \cdot Y = g(Y)$,
откуда следует, что $g(Y)$ имеет матрицу

$$B = T^\top \cdot A \cdot T. \qquad (2)$$

Определение

Квадратичная форма $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ *эквивалентна* квадратичной форме $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, если существует невырожденная замена переменных $X = T \cdot Y$, которая переводит форму $f(X)$ в $g(Y)$.

Определение

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы. Обозначение: $\mathsf{r}(f)$.

Из формулы (2) сл. 3 и утверждения 5 теоремы сл. 13 т.8 непосредственно следует

Предложение

Если квадратичные формы эквивалентны, то их ранги совпадают.

Канонический и нормальный вид квадратичной формы

Пусть $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$.

Определение

Форма $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ имеет *канонический вид*, если при $i \neq j$ все коэффициенты при $x_i x_j$ равны 0. Форма $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ имеет *нормальный вид*, если она имеет канонический вид и ненулевые коэффициенты при квадратах имеют модуль 1.

Очевидно, что квадратичная форма имеет канонический вид тогда и только тогда, когда ее матрица диагональная. Ранг квадратичной формы в каноническом виде равен числу ее ненулевых коэффициентов.
Если после замены переменных $X = T \cdot Y$ квадратичная форма $f(X)$ превращается в форму $g(Y)$ канонического вида, то говорят, что *замена $X = T \cdot Y$ приводит квадратичную форму $f(X)$ к каноническому виду*.
От канонического вида легко перейти к нормальному виду над полем $\mathbb{R}$.
Пусть $f(X) = \alpha_1 x_1^2 + \ldots + \alpha_n x_n^2$, где $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Положим для $j = 1, \ldots, n$

$$x_j = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|\alpha_j|}} y_j, & \text{если } \alpha_j \neq 0; \\ y_j, & \text{если } \alpha_j = 0. \end{cases}$$

Тогда при $\alpha_j \neq 0$ вместо $\alpha_j x_j^2$ получим $\pm y_j^2$ (знак тот же, что у числа α_j). Очевидно, что эта замена невырожденная.

Теорема

Для любой квадратичной формы $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$ существует невырожденная замена переменных, которая приводит эту форму к каноническому виду.

$\Downarrow$Используем индукцию по числу переменных квадратичной формы. При $n = 1$ форма $f(x_1) = \alpha_{11}x_1^2$ имеет канонический вид и доказывать нечего. Предположим, что требуемое уже доказано для всех квадратичных форм от $1 \leq m < n$ переменных. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}x_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2\alpha_{ij}x_i x_j$ – ненулевая квадратичная форма от n переменных. Рассмотрим два возможных случая.

1. Форма не содержит квадратов, т.е. $\alpha_{ii} = 0$ при $i = 1, \ldots, n$. В этом случае с помощью искусственного приема получаем форму, у которой имеются ненулевые коэффициенты при квадратах. Пусть $\alpha_{ij} \neq 0$. Положим $x_i = y_i + y_j$, $x_j = y_i - y_j$, $x_k = y_k$ при $k \notin \{i, j\}$. Легко вычислить, что мы получаем невырожденную замену переменных. которая превращает исходную форму в форму, содержащую $2\alpha_{ij}y_i^2$.

2. Форма содержит квадраты. Предположим, что $\alpha_{11} \neq 0$. Это предположение не ограничивает общности, так как можно перенумеровать переменные – это невырожденная замена переменных, а две последовательные невырожденные замены можно заменить одной.

Окончание доказательства

Запишем $f(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \alpha_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j}x_1x_j + f_1(x_2, \ldots, x_n)$. Выделим полный квадрат в группе слагаемых $\alpha_{11}x_1^2 + 2\sum_{j=2}^{n} \alpha_{1j}x_1x_j =$ $\alpha_{11}(x_1^2 + 2x_1\sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}x_j) = \alpha_{11}(x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}x_j)^2 - \alpha_{11}\left(\sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}x_j\right)^2$. Положим $z_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}x_j$ и обозначим через $f_2(x_2, \ldots, x_n)$ квадратичную форму, полученную путем преобразования выражения $\alpha_{11}\left(\sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}x_j\right)^2 + f_1(x_2, \ldots, x_n)$. Имеем $f(x_1, x_2 \ldots, x_n) = \alpha_{11}z_1^2 + f_2(x_2, \ldots, x_n)$. По предположению индукции существует невырожденная замена переменных $(x_2, \ldots, x_n)^\top = T_1 \cdot (z_2, \ldots, z_n)^\top$, которая приводит форму $f_2(x_2, \ldots, x_n)$ к каноническому виду $\beta_2z_2^2 + \ldots + \beta_nz_2^n$. Тогда $(z_2, \ldots, z_n)^\top = T_1^{-1} \cdot (x_2, \ldots, x_n)^\top$. Добавив к этой замене равенство $z_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha_{1j}}{\alpha_{11}}x_j$, получаем невырожденную замену $(z_1, z_2, \ldots, z_n)^\top = T \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$, где матрица T получается из матрицы T_1^{-1} окаймлением слева первым столбцом матрицы E_n и сверху строкой $\left(1, \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}, \ldots, \frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}\right)$. Тогда, разлагая по первому столбцу, получаем $|T| = |T_1^{-1}| \neq 0$. Следовательно, невырожденная замена $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top = T^{-1} \cdot (z_1, z_2, \ldots, z_n)^\top$ приводит квадратичную форму $f(x_1, x_2 \ldots, x_n)$ к каноническому виду $\alpha_{11}z_1^2 + \beta_2z_2^2 + \ldots + \beta_nz_2^n$. Это завершает доказательство.$\Uparrow$

Примеры

1. Найти канонический вид и невырожденную замену переменных, приводящую к каноническому виду, для квадратичной формы $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_4$.

Сначала сделаем замену переменных $x_1 = y_1 + y_2$, $x_2 = y_1 - y_2$, $x_3 = y_3$, $x_4 = y_4$, чтобы получить квадраты, затем выделим полные квадраты: $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_4 = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 + 4y_2y_4 =$ $y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2 - y_3^2 - (y_2^2 - 4y_2y_4 + 4y_4^2 - 4y_4^2) = (y_1+y_3)^2 - y_3^2 - (y_2-y_4)^2 + 4y_4^2$. Сделав замену $z_1 = y_1 + y_3$, $z_2 = y_2 - y_4$, $z_3 = y_3$, $z_4 = y_4$, получаем канонический вид $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 + 4z_4^2$. Чтобы найти невырожденную замену, выразим сначала y_i через z_i: $y_1 = z_1 - z_3$, $y_2 = z_2 + z_4$, $y_3 = z_3$, $y_4 = z_4$, а затем подставим в формулы для x_i: $x_1 = z_1 + z_2 - z_3 + z_4$, $x_2 = z_1 - z_2 - z_3 - z_4$, $x_3 = z_3$, $x_4 = z_4$.

2. Найти канонический вид и невырожденную замену переменных, приводящую к каноническому виду, для квадратичной формы $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$.

Имеем $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 = 9(x_1^2 - 2x_1(\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3)) = 9((x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3)^2 -$ $-(\frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3)^2) = 9y_1^2 - 4x_2^2 - x_3^2 - 4x_2x_3$, где $y_1 = x_1 - \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_3$. Следовательно, $9x_1^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2 = 9y_1^2$. Замена переменных: $x_1 = y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$.

Приведение к главным осям

Приводить квадратичные формы над полем $\mathbb{R}$ к каноническому виду возможно, используя следствие сл.16 т.17. Пусть $f(X) = X^\top \cdot A \cdot X$ – квадратичная форма. Согласно следствию сл.16 т.17 симметрическая матрица A имеет представление $A = T \cdot D \cdot T^\top$, где D – диагональная матрица, T – ортогональная матрица. Тогда $D = T^\top \cdot A \cdot T$ и ортогональная матрица T определяет замену переменных, приводящую форму $f(X)$ к каноническому виду с диагональной матрицей D. Эту замену также называют ортогональной. Выполнять ее нет необходимости: матрица D записывается с помощью собственных значений соответствующего самосопряженного оператора, определяемого матрицей A. Главные направления образуют орты ортонормированного базиса из собственных векторов этого оператора.

На этом способе основано преобразование ортонормированного базиса в системе координат в пространстве для упрощения уравнения квадрики (чтобы в нем остались только квадраты и первые степени переменных).

Так как указанный способ требует вычисления характеристического многочлена матрицы квадратичной формы, нахождения его корней и построения ортонормированного базиса из собственных векторов, его следует применять только в задачах, где явно сказано, что квадратичную форму нужно привести к главным осям. В остальных случаях следует использовать основанный на доказательстве теоремы сл.6 метод Лагранжа, использованный при решении примеров сл.8.

Пример

Привести к главным осям квадратичную форму
$2x_1^2 + 6x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_4^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$.

Запишем матрицу формы и вычислим ее характеристический многочлен (прибавляем 3-ю строку к 2-й, вычитаем 3-й столбец из 2-го, раскладываем по первому столбцу): $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 6 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $\chi_A(x) =$

$$= \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 6-x & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 6-x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3-x & 3-x & 2 \\ 2 & -3 & 6-x & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 2-x & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 2 \\ 2 & x-9 & 6-x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = (2-x) \begin{vmatrix} 0 & 3-x & 2 \\ x-9 & 6-x & 1 \\ 0 & 1 & 4-x \end{vmatrix} +$$

$$+2 \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 3-x & 2 \\ 0 & 1 & 4-x \end{vmatrix} = -(2-x)(x-9) \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix} - 8 \begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 1 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$(x^2 - 11x + 10)(x^2 - 7x + 10)$. Находим корни $\chi_A(x)$ (коэффициенты при квадратах в каноническом виде после приведения к главным осям): $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 5$, $\lambda_4 = 10$.

Находим ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного линейного оператора, заданного в исходном ортонормированном базисе матрицей A. Ищем собственный вектор для значения $\lambda_1 = 1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Имеем $x_1 = -4x_3$, $x_2 = -x_3$, $x_4 = 0$, и получаем вектор $a_1 = (-4, -1, 1, 0)$. Нормируем его, получаем первый вектор $e_1 = \frac{1}{3\sqrt{2}}(-4, -1, 1, 0)$.

Ищем собственный вектор для значения $\lambda_2 = 2$: $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$ Имеем $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$, $x_4 = -x_3$, и получаем вектор $a_2 = (0, 1, 1, -1)$. Нормируем его, получаем второй вектор $e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, -1)$.

Пример (2)

Ищем собственный вектор для значения $\lambda_3 = 5$ (опускаем преобразования матрицы): $\begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$. Нормируем собственный вектор $a_3 = (0, 1, 1, 2)$, получаем третий вектор $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 1, 1, 2)$. Последний собственный вектор находится аналогично предыдущим: $a_4 = (1, -2, 2, 0)$. Нормируем его: $e_4 = \frac{1}{3}(1, -2, 2, 0)$. Искомый ортонормированный базис состоит из векторов e_1, e_2, e_3, e_4. Матрица перехода к этому базису является матрицей ортогональной замены переменных $X = T \cdot Y$: $T = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{2}}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & -\frac{2}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Канонический вид квадратичной формы: $y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2 + 10y_4^2$. Делать подстановку в исходную квадратичную форму не следует, так как коэффициенты канонического вида – собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Найти каноническую систему координат, каноническое уравнение и определить тип квадрики в зависимости от значения параметра α: $4x^2+4y^2-2z^2+4xy-8xz+8yz+12x-12y+24z+\alpha=0$.

Выпишем из уравнения квадратичную форму $4x^2+4y^2-2z^2+4xy-8xz+8yz$ и приведем ее к главным осям. Матрица

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix},\ \chi_A=\begin{vmatrix} 4-x & 2 & -4 \\ 2 & 4-x & 4 \\ -4 & 4 & -2-x \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 6-x & 6-x & 0 \\ 2 & 4-x & 4 \\ 0 & 12-2x & 6-x \end{vmatrix}=(6-x)^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4-x & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-(x-6)^2(x+6).$$

Собственные значения $\lambda_1=6$, $\lambda_2=-6$. Собственные векторы находим сначала для собственного значения большей кратности:

$\begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & 4 \\ -4 & 4 & -8 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. Имеем $x_2=x_1+2x_3$.

Для $\lambda_1=6$ получаем два линейно независимых собственных вектора $a_1=(1,1,0)$ и $a_2=(0,2,1)$. Так как скалярное произведение $(a_1,a_2)=2$, к ним следует применить процесс ортогонализации (сл.5-7 т.15). Для $\lambda_2=$ $=-6$ собственный вектор $a_3=(1,-1,2)$, ортогональный к a_1 и a_2.

Имеем $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 + \gamma b_1$, где $\gamma = -\frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} = -1$. Таким образом, $b_2 = (-1, 1, 1)$. Нормируя векторы b_1, b_2, b_3, получаем ортонормированный базис из собственных векторов, определяющих главные оси: $f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$, $f_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1)$, $f_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$. Заменим систему координат, сохранив прежнее начало координат и взяв в качестве базиса (f_1, f_2, f_3). Формулы преобразования координат: $(x, y, z)^\top = T \cdot (x_1, y_1, z_1)^\top$, где $T = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$. При переходе в новую систему координат квадратичная форма из уравнения квадрики примет вид $6x_1^2 + 6y_1^2 - 6z_1^2$. Вычислим линейную форму: $12x - 12y + 24z = 12(1, -1, 2) \cdot (x, y, z)^\top = 12(1, -1, 2) \cdot T \cdot (x_1, y_1, z_1)^\top = 12(0, 0, \sqrt{6}) \cdot (x_1, y_1, z_1)^\top = 12\sqrt{6}z_1$. Запишем уравнение квадрики в новой системе координат: $6x_1^2 + 6y_1^2 - 6z_1^2 + 12\sqrt{6}z_1 + \alpha = 0$. Сократим на 6 и выделим полный квадрат по z_1: $x_1^2 + y_1^2 - z_1^2 + 2\sqrt{6}z_1 + \alpha/6 = x_1^2 + y_1^2 - (z_1 - \sqrt{6})^2 + 6 + \alpha/6 = 0$, откуда, перенося начало системы координат в точку $O_1(0, 0, \sqrt{6})$, получаем каноническую систему координат и окончательный вид уравнения $x_2^2 + y_2^2 - z_2^2 = -\frac{\alpha+36}{6}$ (здесь $x_2 = x_1, y_2 = y_1, z_2 = z_1 - \sqrt{6}$). При $\alpha < -36$ получается однополостный гиперболоид, при $\alpha = -36$ получается конус 2-го порядка, при $\alpha > -36$ – двуполостный гиперболоид.

Закон инерции

Теорема

Пусть $f(x_1,\dots,x_n)$ – квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$. В любом нормальном виде формы $f(x_1,\dots,x_n)$ над полем $\mathbb{R}$ количество слагаемых с коэффициентом 1 и количество слагаемых с коэффициентом -1 постоянны и не зависят от способа приведения.

$\Downarrow$ Пусть невырожденная замена переменных $X = T \cdot Y$ приводит форму $f(x_1,\dots,x_n)$ к нормальному виду

$$y_1^2 + \dots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \dots - y_r^2 (r = \mathsf{r}(f)), \tag{3}$$

и невырожденная замена переменных $X = S \cdot Z$ приводит ту же форму к нормальному виду

$$z_1^2 + \dots + z_m^2 - z_{m+1}^2 - \dots - z_r^2. \tag{4}$$

Предположим, что $k > m$, и приведем это предположение к противоречию. При $m = 0$ придадим $y_1,\dots,y_k$ значение 1, $y_{k+1},\dots,y_n$ значение 0. Тогда $z_1,\dots,z_n$ определяются из замены переменных $Z = (S^{-1} \cdot T) \cdot Y$ и равенство $k = -z_1^2 - \dots - z_n^2$ противоречиво.

Окончание доказательства теоремы

Пусть $m > 0$. Невырожденная замена переменных $Z = (S^{-1} \cdot T) \cdot Y$ переводит форму (4) в (3). Распишем эту замену:

$$\begin{cases} z_1 = \sigma_{11}y_1 + \ldots + \sigma_{1k}y_k + \sigma_{1,k+1}y_{k+1} + \ldots + \sigma_{1n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_m = \sigma_{m1}y_1 + \ldots + \sigma_{mk}y_k + \sigma_{m,k+1}y_{k+1} + \ldots + \sigma_{mn}y_n, \\ z_{m+1} = \sigma_{m+1,1}y_1 + \ldots + \sigma_{m+1,k}y_k + \sigma_{m+1,k+1}y_{k+1} + \ldots + \sigma_{m+1,n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n = \sigma_{n1}y_1 + \ldots + \sigma_{nk}y_k + \sigma_{n,k+1}y_{k+1} + \ldots + \sigma_{nn}y_n. \end{cases}$$

Подставим вместо y_i числа γ_i, полагая $\gamma_i = 0$ при $i = k+1, \ldots, n$, а вместо z_j – числа δ_j, полагая $\delta_j = 0$ при $j = 1, \ldots, k$ так, чтобы выполнялось равенство $(\delta_1, \ldots, \delta_n)^\top = (S^{-1} \cdot T) \cdot (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top$. Учитывая (4) и (3), получим равенство $\gamma_1^2 + \ldots + \gamma_k^2 = -\delta_{m+1}^2 - \ldots - \delta_r^2$. Покажем, что можно выбрать $\gamma_1, \ldots \gamma_k$ так, что не все эти числа будут равны 0. Тогда последнее равенство будет противоречиво. Для определения $\gamma_1, \ldots \gamma_k$ получаем однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \sigma_{11}\gamma_1 + \ldots + \sigma_{1k}\gamma_k = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{m1}\gamma_1 + \ldots + \sigma_{mk}\gamma_k = 0, \end{cases}$$

в которой число уравнений меньше числа неизвестных. В силу теоремы сл.23 т.1 эта система имеет ненулевое решение. Таким образом, получили противоречие, которое показывает, что $k \leq m$. Аналогично доказывается, что $m \leq k$. Теорема доказана.$\Uparrow$

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$. В силу теоремы сл.23 корректны следующие определения.

Определения

Количество коэффициентов 1 (соотв. -1) в нормальном виде квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется ее *положительным* (соотв. *отрицательным*) *индексом инерции*. *Сигнатурой* квадратичной формы называется разность между ее положительным и отрицательным индексами инерции.

Следствие

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$, $g(y_1, \ldots, y_n)$ – квадратичные формы над полем $\mathbb{R}$. Для того, чтобы эти формы были эквивалентны над полем $\mathbb{R}$, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые положительные и одинаковые отрицательные индексы инерции.

$\Downarrow$ Необходимость обеспечивается законом инерции (сл.23). Для доказательства достаточности следует привести формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g(y_1, \ldots, y_n)$ к нормальному виду над полем $\mathbb{R}$ и сопоставить каждой переменной, квадрат которой входит в нормальный вид формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ с коэффициентом 1, переменную с тем же свойством из нормального вида формы $g(y_1, \ldots, y_n)$. Оставшиеся переменные каждого нормального вида также сопоставляются. Таким образом можно получить невырожденную замену, которая преобразует $f(x_1, \ldots, x_n)$ в $g(y_1, \ldots, y_n)$.$\Uparrow$

Пример

Выяснить, эквивалентны ли над полем $\mathbb{R}$ квадратичные формы
$f = 2x_1^2 + 9x^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 - 10x_2x_3$ и
$g = 2y_1^2 + 3y^2 + 6y_3^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 + 8y_2y_3$.

Сначала приведем эти формы к каноническому виду. Имеем
$2x_1^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 = 2(x_1^2 + 2x_1(2x_2 - x_3) + (2x_2 - x_3)^2 - (2x_2 - x_3)^2) =$
$2z_1^2 - 8x_2^2 + 8x_2x_3 - 2x_3^2$, где $z_1 = x_1 + 2x_2 - x_3$. Тогда
$f = 2z_1^2 + x^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 = 2z_1^2 + (x^2 - x_3)^2 = 2z_1^2 + z_2^2$, где $z_2 = x_2 - x_3$.
Таким образом, замена $z_1 = x_1 + 2x_2 - x_3$, $z_2 = x_2 - x_3$, $z_3 = x_3$ приводит форму f к каноническому виду $2z_1^2 + z_2^2$.
Аналогично для формы g имеем $2y_1^2 - 4y_1y_2 - 4y_1y_3 =$
$2(y_1^2 - 2y_1(y_2 + y_3) + (y_2 + y_3)^2 - (y_2 + y_3)^2) = 2u_1^2 - 2y^2 - 2y_3^2 - 4y_2y_3$, где
$u_1 = y_1 - y_2 - y_3$, откуда $g = 2u_1^2 + y^2 + 4y_3^2 + 4y_2y_3 = 2u_1^2 + (y_2 + 2y_3)^2 =$
$= 2u_1^2 + u_2^2$, где $u_2 = y_2 + 2y_3$. Таким образом, замена $u_1 = y_1 - y_2 - y_3$,
$u_2 = y_2 + 2y_3$, $u_3 = y_3$ приводит форму g к каноническому виду $2u_1^2 + u_2^2$.
Мы видим, что формы f и g эквивалентны. Чтобы найти замену переменных, которая переводит форму f в форму g, положим $z_1 = u_1$, $z_2 = u_2$, $z_3 = u_3$. Получаем систему равенств $x_1 + 2x_2 - x_3 = y_1 - y_2 - y_3$, $x_2 - x_3 = y_2 + 2y_3$, $x_3 = y_3$, откуда $x_1 = y_1 - 3y_2 - 6y_3$, $x_2 = y_2 + 3y_3$, $x_3 = y_3$ – замена переменных, которая переводит форму f в форму g.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$. Она определяет функцию от нескольких переменных, которую будем обозначать так же.

Определение

Форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется *положительно* (соотв. *отрицательно*) *определенной*, если для любых $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathbb{R}$ из $\gamma_1^2 + \ldots + \gamma_n^2 > 0$ следует $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) > 0$ (соотв. $f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) < 0$).

Понятия отрицательно и положительно определенной квадратичной формы связаны следующим очевидным утверждением.

Наблюдение

Квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$ является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда квадратичная форма $(-1) \cdot f(x_1, \ldots, x_n)$ является положительно определенной.

Эквивалентные условия для положительно определенной квадратичной формы

Теорема

Следующие условия эквивалентны для квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$:
(1) $f(x_1, \ldots, x_n)$ является положительно определенной;
(2) в любом каноническом виде формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициенты при квадратах всех переменных положительны;
(3) в некотором каноническом виде формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициенты при квадратах всех переменных положительны;
(4) $y_1^2 + \ldots + y_n^2$ – нормальный вид формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$.

$\Downarrow$ $(1) \Rightarrow (2)$. Пусть $\alpha_1 y_1^2 + \ldots + \alpha_n y_n^2$ – канонический вид формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ и $X = T \cdot Y$ – соответствующая замена переменных. Положим $y_j = 1$ и $y_i = 0$ при $i \neq j$. Тогда соответствующие значения x_i не все равны нулю, поэтому $f(x_1, \ldots, x_n) > 0$ и $\alpha_j > 0$. Импликации $(2) \Rightarrow (3)$, $(3) \Rightarrow (4)$ и $(4) \Rightarrow (1)$ справедливы очевидным образом. $\Uparrow$

Эквивалентные условия для отрицательно определенной квадратичной формы

Из теоремы предыдущего слайда и наблюдения сл.28 получается

Следствие

Следующие условия эквивалентны для квадратичной формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$:
(1) $f(x_1, \ldots, x_n)$ является отрицательно определенной;
(2) в любом каноническом виде формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициенты при квадратах всех переменных отрицательны;
(3) в некотором каноническом виде формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ коэффициенты при квадратах всех переменных отрицательны;
(4) $-y_1^2 - \ldots - y_n^2$ – нормальный вид формы $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$.

Определение

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Угловым главным минором* матрицы A называется минор $\Delta_m = A\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ 1 & \dots & m \end{pmatrix}$, стоящий в ее первых m строках и первых m столбцах.

Теорема

Пусть $f(x_1,\dots,x_n) = X^\top \cdot A \cdot X$ – квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$ с матрицей A. Форма $f(x_1,\dots,x_n)$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда у матрицы A все угловые главные миноры Δ_m $(m = 1,\dots,n)$ положительны.

$\Downarrow$Представим форму $f(x_1,\dots,x_n)$ в виде

$$f(x_1,\dots,x_n) = f_1(x_1,\dots,x_{n-1}) + 2\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{1j}x_jx_n + \alpha_{nn}x_n^2, \qquad (5)$$

где $f_1(x_1,\dots,x_{n-1})$ – форма, содержащая все слагаемые из $f(x_1,\dots,x_n)$, не содержащие x_n. Доказательство проведем индукцией по n. При $n = 1$ имеем $f(x_1) = \alpha_{11}x_1^2$, и утверждение теоремы очевидно. Предположим, что оно доказано для всех квадратичных форм от $1 \leq k < n$ переменных.

Продолжение доказательства теоремы

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ – положительно определенная квадратичная форма. Тогда очевидно, что $f_1(x_1,\ldots,x_{n-1})$ – также положительно определенная квадратичная форма. Ее матрица является подматрицей матрицы A, стоящей в первых $n-1$ строках и первых $n-1$ столбцах матрицы A, поэтому в силу предположения индукции $\Delta_m > 0$ $(m = 1,\ldots,n-1)$. Сделаем замену $X = T\cdot Y$, которая приводит форму $f(x_1,\ldots,x_n)$ к нормальному виду. В силу формулы (2) (сл. 11) получаем $E_n = T^\top \cdot A\cdot T$. Взяв определители левой и правой части, получаем $1 = |E_n| = |T^\top \cdot A\cdot T| = |T^\top||A||T| = |T|^2\Delta_n$, откуда $\Delta_n > 0$.

Пусть теперь $f(x_1,\ldots,x_n)$ – квадратичная форма, в матрице которой $\Delta_m > 0$ $(m = 1,\ldots,n)$. По предположению индукции форма $f_1(x_1,\ldots,x_{n-1})$ из равенства (5) положительно определенная. Пусть $(x_1,\ldots,x_{n-1})^\top = T_1\cdot(y_1,\ldots,y_{n-1})^\top$ – невырожденная замена переменных, которая приводит форму $f_1(x_1,\ldots,x_{n-1})$ к нормальному виду. Сделав эту подстановку в форму $f(x_1,\ldots,x_n)$, получим $f(x_1,\ldots,x_n) = y_1^2+\ldots+$ $+y_{n-1}^2+2\sum_{j=1}^{n-1}\beta_{1j}y_jx_n+\alpha_{nn}x_n^2 = \sum_{j=1}^{n-1}(y_j+\beta_{1j}x_n)^2+(\alpha_{nn}-\sum_{j=1}^{n-1}\beta_{1j}^2)x_n^2$. Положим $\beta_{nn} = \alpha_{nn}-\sum_{j=1}^{n-1}\beta_{1j}^2$. Сделаем замену $z_j = y_j+\beta_{1j}x_n$ $(j = 1,\ldots,n-1)$, $z_n = x_n$ и обозначим через T матрицу этой замены. Форма $f(x_1,\ldots,x_n)$ переходит в $z_1^2+\ldots+z_{n-1}^2+\beta_{nn}z_n^2$.

Окончание доказательства теоремы и следствие

Эта форма имеет диагональную матрицу D, у которой на главной диагонали все элементы, кроме последнего, равны 1. Так как $D = T^{\top} \cdot A \cdot T$, взяв определители левой и правой части, получим $\beta_{nn} = |T|^2|A| = |T|^2\Delta_n > 0$. Следовательно, форма $f(x_1, \dots, x_n)$ положительно определенная. Теорема доказана.$\Uparrow$

Из теоремы сл.31 и наблюдения сл.28 получаем

Следствие

Пусть $f(x_1, \dots, x_n) = X^{\top} \cdot A \cdot X$ – квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$ с матрицей A. Форма $f(x_1, \dots, x_n)$ является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда у матрицы A все угловые главные миноры Δ_m при нечетных $m = 1, 3, \dots$ отрицательны, а при четных $m = 2, 4, \dots$ положительны.

$\Downarrow$Для доказательства достаточно заметить, что при умножении квадратной матрицы порядка m на -1 ее определитель умножается на $(-1)^m$.$\Uparrow$

Пример

Найти все значения параметра α, при которых квадратичная форма $f = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4\alpha x_1 x_2 + 2x_1 x_3 - 2\alpha x_2 x_3$ является положительно определенной.

Запишем матрицу квадратичной формы f: $A = \begin{pmatrix} 2 & 2\alpha & 1 \\ 2\alpha & 3 & -\alpha \\ 1 & -\alpha & 5 \end{pmatrix}$.

Найдем ее угловые главные миноры $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 2\alpha \\ 2\alpha & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4\alpha^2$,

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 2\alpha & 1 \\ 2\alpha & 3 & -\alpha \\ 1 & -\alpha & 5 \end{vmatrix} = 27 - 26\alpha^2$. Согласно критерию Сильвестра, форма f будет положительно определенной при условии $\Delta_j > 0$, $j = 1, 2, 3$, т.е. при значениях α таких что $6 - 4\alpha^2 > 0$ и $27 - 26\alpha^2 > 0$. Решая полученную систему неравенств, получаем $|\alpha| < \sqrt{\frac{27}{26}}$.